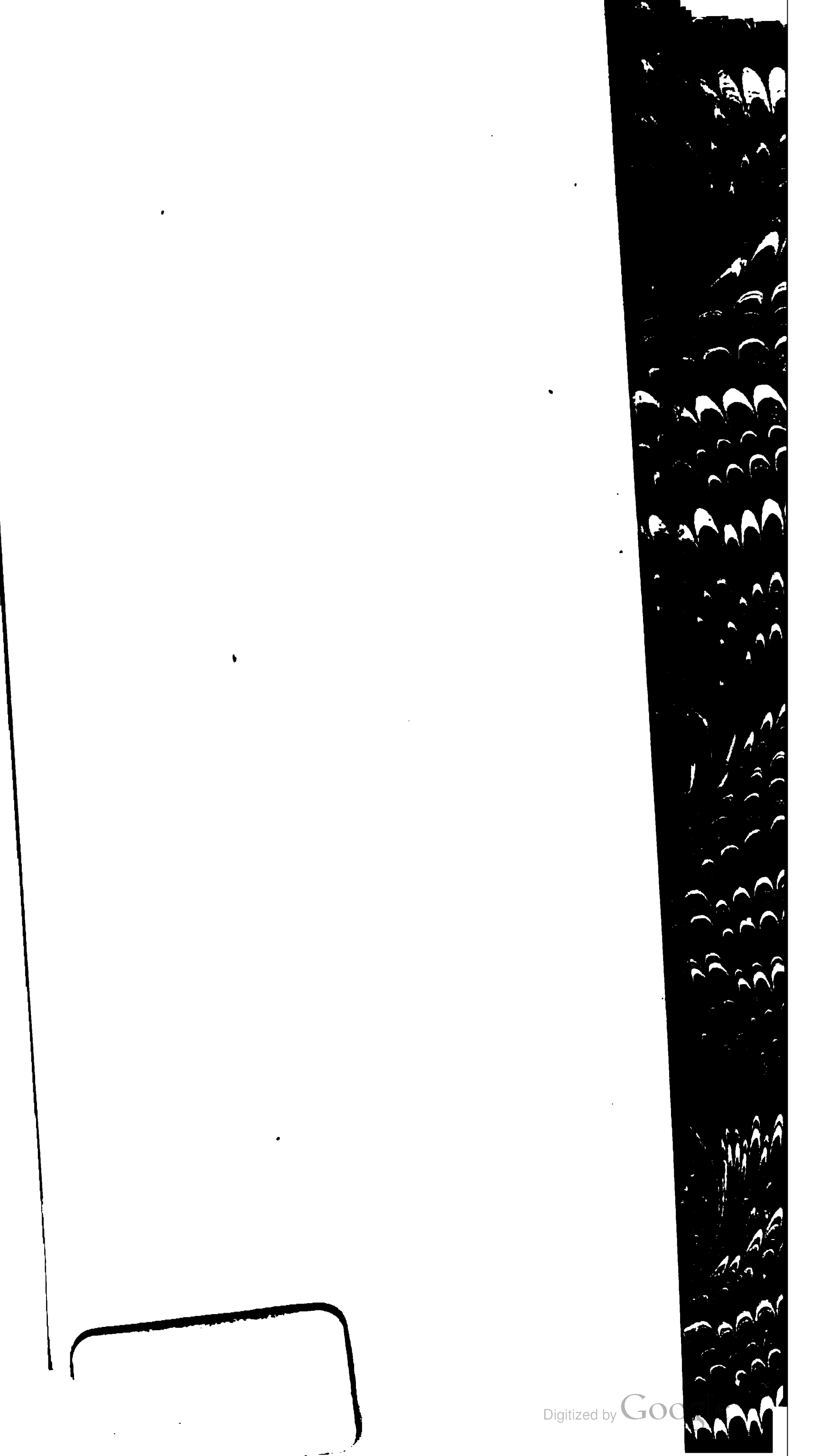




Höhere Ingenieur-Wissenschaften.

Theorie

der

Holz- und Eisen-Constructionen,

mit

besonderer Rücksicht auf das Bauwesen.

Von

Georg Rebhann,

Ingenieur im k. k. österreichischen Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten, und Docenten am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

WIEN.

Verlag und Druck von Carl Gerold's Sohn.

1856.

Vorrede.

Seit dem Jahre 1852 hält der Verfasser mit Genehmigung des hohen k. k. Ministeriums des Cultus und Unterrichtes am k. k. polytechnischen Institute in Wien über einzelne Zweige der höheren Ingenieur-Wissenschaften, insbesondere über die Theorie der Bau-Constructionen, ausserordentliche Vorlesungen, welche von dem hohen k. k. Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten den Candidaten und Beamten der Seinem Ressorte angehörigen technischen Verwaltungszweige empfohlen worden sind.

Das vorliegende Werk enthält denjenigen Theil dieser Vorlesungen, welcher auf die Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen Bezug nimmt, indem sich der Verfasser vorbehält, die Erd- und Stein-Constructionen abgesondert zu behandeln. Dasselbe ist bestimmt, zunächst als Leitfaden für die betreffenden Vorträge zu dienen, ferner aber auch die eben so umfangreichen, wie für die Praxis wichtigen Reformen und Ergänzungen, welche der Verfasser in dem genannten Zweige der Ingenieur-Wissenschaften vorgenommen hat, den weiteren Kreisen der technischen Fachmänner mitzutheilen.

Die wesentlichsten Reformen kommen in der allgemeinen Theorie des Widerstandes gegen Biegung vor, und die Consequenzen hieraus führen in der Folge bei der Anwendung auf die einzelnen Fälle zu bemerkenswerthen Resultaten, welche zuweilen bedeutend von denjenigen abweichen, die nach den älteren Theorien erhalten werden. Während nämlich nach diesen bei der Bestimmung der Form und Lage der sogenannten neutralen Schichte in einem gebogenen Träger durch die anscheinend gestattete Vernachlässigung der Seitenkraft R_2 (Fig. 21, Seite 61) ein nicht unbedeutender Irrthum

veranlasst werden kann, wie diess die im §. 49 zusammengestellten Eigenschaften für die neutrale Schichte im Vergleiche mit der gewöhnlichen Meinung hierüber deutlich erkennen lassen, findet der Verfasser ausserdem nach den §§. 77 und 83 insoferne ganz eigenthümliche Resultate für das Tragmoment und beziehungsweise Tragvermögen eines solchen Trägers, als die allgemeine Bildung der bezüglichen Formeln nicht nur von der Querschnittsgestalt und von der Art und Weise der Anspruchsnahme des Trägers, sondern auch von der Materialgattung in einer besonderen Weise abhängt. So z. B. kann das Tragvermögen eines Balkens von der Breite b, der Höhe h und der Länge l, wenn derselbe an einem Ende festgehalten und am anderen Ende belastet wird, nicht immer durch die Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, a \frac{b h^2}{l}$$

ausgedrückt werden, wenn a die grösste zulässige Spannung (per □″) in den obersten Fasern des Wurzelquerschnittes bedeutet, denn die §§. 77, 78 und 84 zeigen, dass das fragliche Tragvermögen im Allgemeinen durch die Alternativformeln

$$Q = \begin{cases} \text{entweder } \tfrac{1}{6}\, a \dfrac{b h^2}{l} \\ \text{oder } \tfrac{1}{6}\, r \dfrac{b h^2}{l} \end{cases}$$

dargestellt erscheint, worin ausser den vorigen Grössen noch die grösste zulässige Pressung r (per □″) in den untersten Fasern des Wurzelquerschnittes vorkommt. Von den beiden Alternativformeln ist nun jedesmal diejenige in Anwendung zu bringen, welche den kleineren Werth annimmt, wornach diese Wahl augenscheinlich von dem gegenseitigen Verhältnisse zwischen a und r abhängt, welches nach den verschiedenen Materialien eben so veränderlich ist, wie jenes zwischen der sogenannten absoluten und rückwirkenden Festigkeit. Hiernach würde also das Tragvermögen für einen hölzernen Balken unter den obbezeichneten Umständen aus der Formel

$$Q = \tfrac{1}{6}\, r \frac{b h^2}{l},$$

hingegen für einen gusseisernen aus der anderen Formel

$$Q = \frac{1}{6} a \frac{b h^2}{l}$$

zu berechnen sein, weil erfahrungsgemäss für Holz $r < a$, für Gusseisen aber gerade umgekehrt $a < r$ ist. Indem nun nach den älteren Theorien in beiden Fällen stets die Formel

$$Q = \frac{1}{6} a \frac{b h^2}{l}$$

anzuwenden wäre, kann man behaupten, dass die gewöhnliche Berechnungsweise des Tragvermögens selbst in dem einfachsten Falle, wo ein hölzerner Balken mit einem rechteckigen Querschnitte in Betracht steht, principiell unrichtig ist. Aehnliche Unrichtigkeiten treten in vielen anderen Fällen ein, und dieselben machen im Vereine mit dem Umstande, dass man Behufs des Vergleiches der Theorie mit der Erfahrung blos dem Verhalten des Trägers im Augenblicke des Bruches die vorzüglichste Aufmerksamkeit zuzuwenden pflegt, obgleich die der Theorie zu Grunde gelegenen Sätze bis dahin nicht als giltig betrachtet werden können, die Thatsache leicht erklärlich, dass die aus den bezüglichen Formeln berechnete Bruchbelastung, wenn man statt a die absolute Festigkeit des Materiales substituirt, mit den Versuchen nicht befriedigend übereinstimmen. Dieser Uebelstand ist längst bekannt, ohne dass seine nachtheiligen Folgen anders als dadurch zu beseitigen gesucht wurden, dass man den Coefficienten a nicht aus den directen Versuchen über die absolute Festigkeit, sondern vielmehr auf indirecte Weise aus den Versuchen über die relative Festigkeit abgeleitet hat, sodann aber zur Erzielung eines praktischen Resultates von den Verhältnissen des Bruches erst rückwärts auf das Tragvermögen zu schliessen versuchte. Kurz, mittelst einer angemessenen Modification des Coefficienten a schien man die Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung ausgleichen zu können, ohne dieser Abweichung selbst eine nähere Aufmerksamkeit zuwenden zu müssen, indem man dabei von der Ansicht ausging, durch die Einführung von derartigen Erfah-

rungs-Coefficienten in den betreffenden Formeln für die Praxis genug gethan zu haben. Dieses ist indessen keineswegs der Fall. Einerseits erscheinen die Differenzen zwischen den Resultaten der directen und indirecten Bestimmung der Werthe für a in manchen Fällen sehr bedeutend, und dieselben sind ausserdem mit der Querschnittsform mehr oder weniger verschieden, so dass z. B. der aus dem Bruche eines massiven vierkantigen Balkens abgeleitete Erfahrungs-Coefficient in der Anwendung auf eine vierkantige oder cylindrische Röhre aus demselben Materiale nicht mehr die nöthige Verlässlichkeit darbieten wird; andererseits aber ergeben sich auch bei der Vergleichung der älteren Theorien unter einander, so wie mit der Erfahrung so wesentliche Anomalien, dass man oftmals bei der Bestimmung des Tragvermögens eines Trägers ganz irre geleitet werden kann. Was soll man z. B. davon halten, wenn man findet, dass das Tragvermögen eines dreikantigen Balkens in den zwei Fällen, wo die Spitze des dreieckigen Querschnittes einmal nach abwärts, das andere Mal nach aufwärts gekehrt ist, nach der Navier'schen Theorie unverändert bleibe, hingegen die Formeln Redtenbacher's eine Veränderung dieses Tragvermögens im Verhältnisse wie 1:2 in Aussicht stellen, während man auf dem praktischen Wege der Versuche wieder ein anderes Resultat erhält; und wenn überhaupt ähnliche Unterschiede in allen solchen Fällen zum Vorschein kommen, wo der Schwerpunct des Balkenquerschnittes nicht in die halbe Höhe desselben fällt, was oft bei sehr wichtigen Querschnittsformen, wie etwa bei den einfachen und doppelten ⊤ Formen stattfinden kann.

Solche Wahrnehmungen zeigen zur Genüge, dass die älteren Theorien in der Praxis nicht vollkommen entsprechen, und zwar um so weniger, als das Bedürfniss der Anwendung von Eisenconstructionen in grossem Massstabe sich immer mehr steigert, und nicht über alle Constructionen gleich im Vorhinein verlässliche Erfahrungs-Resultate vorliegen können, so dass man oft in den wichtigsten Fällen darauf angewiesen ist, die Güte einer Bauconstruction blos nach wissenschaftlichen Grund-

sätzen im Vereine mit einigen praktischen Schätzungen zu beurtheilen.

Solche Wahrnehmungen müssen ferner auf die nähere Erörterung der Ursachen führen, die jene vorerwähnten Differenzen erzeugen, und sie beweisen endlich die Nothwendigkeit einer entsprechenden Verbesserung der bezüglichen Theorie.

In dem vorliegenden Werke ist sowohl die Frage hinsichtlich jener Ursachen befriedigend beantwortet, als auch die Theorie selbst mit der nöthigen Verbesserung gegeben, wodurch man zugleich die Ueberzeugung erlangt, dass eigentlich keine der älteren Theorien die angemessene ist, obgleich sie in der allgemeinen Lehre, wie solche von dem Verfasser durchgeführt wird, als specielle Theile enthalten sind, so dass zwar in besonderen Fällen bald die Theorie nach Navier, bald jene nach Redtenbacher verlässlich sein kann, doch in anderen Fällen wieder nach beiden Autoren unrichtige Resultate erhalten werden.

Navier und Redtenbacher, welchem letzteren auch Burg beipflichtet, sind nämlich die beiden Autoren, nach welchen sich die in der Praxis zur Geltung gekommenen Theorien des Widerstandes gegen Biegung und Bruch gruppiren lassen. Beide legen zwar in der Lehre von dem Widerstande der Materialien im Allgemeinen die gleichen Principien über Elasticität und Festigkeit zu Grunde, doch weichen sie in der speciellen Lehre von der relativen Festigkeit darin von einander ab, dass nach Ersterem der Bruch eines gebogenen Trägers immer durch die Zerstörung der entferntesten Fasern von der neutralen Axe im Bruchquerschnitte eintreten soll, während Redtenbacher den Bruch stets mit dem Zerreissen der gespanntesten Fasern beginnen lässt. Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass der Bruch allerdings in der einen oder anderen Weise eintreten kann, jedoch nicht nothwendig eintreten muss, und dass offenbar die alternative Vorstellung die richtige ist, nach welcher der fragliche Bruch entweder mit dem Zerreissen der gespanntesten oder mit dem Zerdrücken der am meisten gepressten Fasern beginnt, was in der That mit der Er-

fahrung übereinstimmt. Ob das Eine oder das Andere geschehen wird, lässt sich im Allgemeinen nicht bestimmen, es hängt diess unter Anderem auch von der Lage der neutralen Schichte im Querschnitte (also von seiner Form) und von dem Verhältnisse zwischen der absoluten und rückwirkenden Festigkeit des Materiales (also von der Gattung und Qualität desselben) ab. Indessen kann das Zerreissen der gespanntesten und das Zerdrücken der gepresstesten Fasern auch gleichzeitig erfolgen, und dieser Fall bildet sodann den Uebergang von dem einen zu dem anderen der beiden obigen Fälle.

Im vorliegenden Werke ist diese Anschauung durchgehends festgehalten, nur ist bei den Untersuchungen nie der Bruch des Trägers, sondern es sind stets die Bedingungen für seine sichere Existenz betrachtet, und zwar aus dem einfachen, jedoch hinreichenden Grunde, weil diese und nicht die Zerstörung des Materiales in der Praxis beabsichtigt wird, abgesehen davon, dass die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen bei dem Umstande, als sie an solche Grundsätze, die nur innerhalb der Sicherheitsgränzen als wahr gelten können, geknüpft sind, auf den Bruch gar nicht angewendet werden dürfen. Diese Erwägungen sind es, welche den Verfasser auf die oben erwähnte alternative Darstellung des Tragmomentes und des Tragvermögens geführt haben, und es leuchtet hiernach ein, dass dadurch viele der älteren Resultate mehr oder weniger modificirt werden müssen. Von diesen Resultaten sind insbesondere jene im §. 81, über den Einfluss des Umkehrens eines Trägerquerschnittes auf das Tragvermögen, ferner die in dem auf Seite 225 beginnenden Kapitel, über den Ort des gefährlichen Querschnittes (die schwächste Stelle eines Trägers) bemerkenswerth, wo namentlich gezeigt wird, dass dieser Ort nicht immer, wie man diess sonst anzunehmen pflegt, in die grösste Krümmung der Biegungscurve zu liegen kommt.

Auf die Thatsachen übergehend, welche die Lehren des Verfassers bestätigen, so wird schon die Hinweisung auf die grossen und umfassenden Versuche genügen, welche von Hodgkinson und Fairbairn Behufs der

Auffindung der zweckmässigsten Materialvertheilung in einem Trägerquerschnitte angestellt worden sind, indem die Resultate dieser Versuche mit jenen der neuen Theorie vollkommen übereinstimmen, was bei Anwendung der älteren Theorien nicht der Fall ist. (S. das Kapitel auf Seite 234.) Ueberhaupt wird man in diesem Kapitel, welches von den zweckmässigsten Querschnittsformen handelt, eine Reihe von neuen und wichtigen Resultaten, insbesondere bezüglich der I und T Formen finden. Neues enthält übrigens beinahe jedes Kapitel, so z. B. das auf der Seite 174 beginnende, welches von den Trägerquerschnitten überhaupt, und besonders von den regelmässigen Polygonen handelt; ferner jenes über den Widerstand von Trägern, welche an beiden Enden eingemauert sind; so wie die, welche das Verhalten von belasteten Trägern erörtern, die auf mehreren Stützen ruhen und darüber continuirlich fortlaufeu, u. s. w. Auch war der Verfasser bemüht, vorzüglich die End-Resultate nach Thunlichkeit kurz und elegant darzustellen, und so die Anwendung auf die vorkommenden Fälle zu erleichtern. Auf Seite 459 beginnt der Abschnitt über das Verfahren, nach welchem der Widerstand von zusammengesetzten Trägern beurtheilt werden kann, und in den darauf folgenden zwei Abschnitten sind die Brückenconstructionen behandelt. Der Verfasser war bemüht, in diese wichtigen Theile des Bauconstructionswesens nach wissenschaftlichen Grundsätzen im Vereine mit den Ergebnissen der Erfahrung Consequenz und Einfacheit zu bringen, dabei die Erfindungen und Verbesserungen der Neuzeit im Brückenbaufache zu berücksichtigen, und die Anwendung der vorgetragenen Lehren stets auf wirklich bestehende Brückenobjecte nachzuweisen. Auch hier wird der verehrte Leser vieles Neue und Nützliche für die Praxis finden, z. B. in der Lehre von den Kettenbrücken die bemerkenswerthen Relationen (616) und (630).

Somit übergibt der Verfasser das vorliegende Werk der Oeffentlichkeit mit der Bitte, bei der Beurtheilung desselben die Schwierigkeiten nicht übersehen zu wollen,

unter denen dasselbe zu Stande kam. Einerseits konnte derselbe in seiner Eigenschaft als Ingenieur des Staatsbaudienstes das Werk nur neben seinen Amtsgeschäften bearbeiten, andererseits aber musste er sich mit der Herausgabe desselben beeilen, um insbesondere die Priorität seiner selbstständigen Arbeiten zu sichern, die durch seine Vorlesungen schon seit mehreren Jahren in die Oeffentlichkeit gelangten.

Ausser dieser allgemeinen Bitte wird aber auch noch die besondere an den Herrn Professor Becker in der polytechnischen Schule zu Carlsruhe gestellt, dass, falls der ehrenwerthe Herr Professor wieder eine Arbeit des Gefertigten zu benützen sich veranlasst finden sollte, derselbe die Angabe der Bezugsquelle nicht eben so überflüssig halten möge, wie in seinem im Jahre 1853 herausgegebenen Werke „Allgemeine Baukunde des Ingenieurs", wo im §. 110 ein ganzer Aufsatz des Gefertigten über Futtermauern, welcher in der Förster'schen Bauzeitung vom Jahre 1850 (Seite 193—199) enthalten ist, ohne Angabe der Bezugsquelle beinahe wörtlich aufgenommen erscheint.

Wien, im September 1855.

Der Verfasser.

Inhalts-Uebersicht.

Erstes Hauptstück.

Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien (insbesondere des Holzes und Eisens).

Zweites Hauptstück.
Anwendung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien auf Holz- und Eisenconstructionen.

Seite

Erstes Hauptstück.

Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien

(insbesondere des Holzes und Eisens).



§. 1.

Wesen der Materie. Das Wesen der die Körper bildenden Materie ist nicht genau bekannt. Das Verhalten derselben gegen einwirkende Kräfte kann daher nur einer annäherungsweise richtigen Beurtheilung dadurch unterzogen werden, dass man die Eigenschaften der Materie möglichst zu erforschen strebt, und sodann von dem Erforschten den entsprechenden Gebrauch macht.

§. 2.

Annahmen. Die zu betrachtenden Körper sollen fest und elastisch sein. Die vorzüglichsten darunter sind Holz und Eisen. Die Forschungen über die Eigenschaften dieser letzteren gestatten die Aufstellung von Hypothesen, welche in der Regel auch für andere feste elastische Materialien gelten können. In der Voraussetzung, dass von den Ausnahmen abgesehen wird, und in der Ueberzeugung, dass diese Voraussetzung mit Rücksicht auf den Zweck der vorliegenden Schrift zulässig ist, wird die nachstehende gewählte Anschauungsweise genügen.

§. 3.

Formveränderung des Körpers in Folge einer Krafteinwirkung. Wirken auf einen festen Körper Kräfte ein, so entsteht zunächst eine Formveränderung. Dieselbe verschwindet wieder mehr oder weniger, wenn die Einwirkung der Kräfte aufhört. Wäre nach einem solchen Aufhören die ursprüngliche Form des Körpers genau wieder hergestellt worden, so könnte man denselben vollkommen elastisch nennen; wäre hingegen die hervorgebrachte Formveränderung gänzlich verblieben, so könnte man dem Körper gar keine Elasticität beimessen. Diese beiden Zustände sind als die Gränzzustände zu betrachten, zwischen welchen die festen Körper bezüglich ihrer Elasticität einzureihen kommen. Man ist jedoch nicht berechtigt, die Existenz von Körpern anzunehmen, welche sich in diesen Gränzzuständen selbst befänden. Es kann allerdings der Zustand

eines Körpers so nahe mit einem der beiden Gränzzustände übereinstimmen, dass man keinen Unterschied wahrzunehmen im Stande ist. Dadurch erklärt sich, dass es bisweilen scheine, als besässen manche Körper unter gewissen Umständen eine vollkommene, andere hingegen keine Elasticität. Indess werden auch solche Körper, gleich den andern, unter die unvollkommen elastischen zu zählen sein. Uebrigens werde nach üblicher Weise der nach dem Aufhören der Krafteinwirkung verschwundene Theil der beobachteten Formveränderung, die elastische, der zurückgebliebene Theil die bleibende oder permanente Formveränderung genannt. Beide zusammen geben die ganze oder totale Formveränderung.

§. 4.

Eintheilung der Kräfte. Die totale Formveränderung eines Körpers ist von Gegenkräften begleitet, die als Widerstände auftreten und durch die einwirkenden Kräfte hervorgerufen werden. Man unterscheidet daher zwischen hervorrufenden (offensiven) und hervorgerufenen (defensiven) Kräften. Die hervorrufenden Kräfte können je nach der Art ihres Entstehens in natürliche und künstliche abgetheilt und zu den ersteren die durch die Schwere und Atmosphärilien, zu den letzteren aber die durch die besonderen mechanischen und chemischen Einwirkungen entstehenden gerechnet werden.

Die hervorgerufenen Kräfte (Widerstände) sind von den hervorrufenden Kräften, so wie von den Eigenschaften der den Körper bildenden Materie abhängig.

§. 5.

Elasticitätsgränzen. Die offensiven Kräfte sind entweder ganz oder theilweise permanent. Die Schwere wirkt z. B. permanent. Es kann hieraus geschlossen werden, dass der Zustand eines jeden Körpers einer fortschreitenden Veränderung unterliege. Das Fortschreiten in der Veränderung geschieht in der Regel so allmälig, dass man dasselbe während einer gewissen Zeitperiode nicht wahrnehmen, oder wenigstens als unwesentlich betrachten kann. Es wird jedoch nach Verlauf dieser Zeitperiode immer merkbarer, und führt endlich eine Trennung der Theile des Körpers herbei. Die frag-

liche Zeitperiode hängt von den obwaltenden Umständen ab, kann manchmal Jahrhunderte betragen, zuweilen aber auch nur von kurzer Dauer sein.

Während dieser Zeitperiode kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, dass zwischen den hervorrufenden und den hervorgerufenen Kräften Gleichgewicht bestehe, und es erscheint zugleich, wenigstens während eines Theils dieser Zeitperiode, der Körper in so hohem Grade vollkommen elastisch, dass demselben ohne merklichen Fehler diese Eigenschaft beigelegt werden kann. Man pflegt in diesem Falle zu sagen, es werde durch die Anspruchsnahme des Körpers die Gränze für die vollkommene Elasticität, oder kurz die Elasticitätsgränze nicht überschritten. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Beantwortung der Frage, bis zu welchem Grade die hervorrufenden Kräfte gesteigert werden können, damit die Elasticitätsgränze nicht überschritten werde, vorzüglich von der Zeitdauer abhänge, während welcher die verlangte Eigenschaft vorhanden sein soll. Nach Verlauf dieser Zeitdauer wird jedoch die erwähnte Gränze mit zunehmender Merkbarkeit überschritten, und sofort die baldige Zerstörung des Körpers in Aussicht gestellt.

§. 6.

Bedingung für die Sicherheit der Körperexistenz. Einfluss der obwaltenden Umstände. Damit durch die Einwirkung von Kräften auf einen Körper die Besorgniss seiner Zerstörung nicht Platz greife, und daher mit genügender Sicherheit auf den Zusammenhang seiner Theile gerechnet werden kann, erfordert es die Vorsicht, dass hiebei die betreffende Elasticitätsgränze nicht überschritten werde. Zur Erfüllung dieser Bedingung hat man einerseits die Eigenschaften der den Körper bildenden Materie, anderseits die besondern Umstände zu berücksichtigen, welche die hervorrufenden Kräfte begleiten.

Diese Umstände beziehen sich

A) Auf die Art und Intensität der betreffenden Kräfte, welche	mechanische	permanent	ohne / mit	Erschütterung wirkend	sein können
		zeitweilig	ohne / mit		
	chemische	gewöhnliche d. Atmosphäre			
		aussergewöhnliche			

und

B) auf die Zeitdauer, während welcher die Zerstörung des Körpers hintangehalten werden soll.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass die günstigsten Umstände, unter welchen nämlich die einwirkenden Kräfte ein Maximum werden dürfen, dann vorhanden sind, wenn die Krafteinwirkung eine momentane ist, und keine Erschütterung hervorbringt, in welchem Falle zugleich der chemische Einfluss verschwindet. Dieser Fall tritt in der Regel bei den Experimenten ein, welche mit den Materialien zur Erforschung ihres Widerstandes gemacht werden.

Der Einfluss der Mehrzahl der erwähnten Umstände muss abgeschätzt und mit den Rechnungs-Resultaten combinirt werden. Solche Abschätzungen, von verschiedenen Fachmännern vorgenommen, werden ohne Zweifel verschieden ausfallen. Zuweilen weichen die Meinungen bedeutend von einander ab, und eine Vereinigung derselben ist nicht zu erzielen. In diesen Fällen können nur die Zeit und die weiteren Erfahrungen belehren.

§. 7.

Gang der Untersuchung. Um mit der Untersuchung der einfachsten Fälle zu beginnen, wird zunächst die prismatische Körperform gewählt, wie solche im Constructionswesen bei den unter dem Namen Balken, Stab, Stange, Schiene, Träger u. s. w. bekannten Bestandtheilen zumeist vorkommt. Die Querschnitte des Prismas stehen senkrecht auf die Längenrichtung, und die Verbindung der Schwerpuncte der einzelnen Querschnitte heisse die Längenaxe des Prismas.

Auf das Prisma sollen Kräfte zuerst in der Richtung der Längenaxe, und sodann senkrecht hierauf wirkend angenommen werden.

Eine Kraft in der Richtung der Längenaxe wirkend, bringt entweder eine Spannung oder eine Pressung hervor. Im ersten Falle besteht die Formveränderung des Prismas in einer Ausdehnung, und die Zerstörung desselben in einem Zerreissen. Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Ausdehnung. Im zweiten Falle besteht die Formveränderung des Prismas in einem Zusammendrücken, und die Zerstörung desselben in einem Zerquetschen.

Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Zusammendrückung.

Eine Kraft senkrecht auf die Längenaxe des Prismas gerichtet, bringt im Allgemeinen Spannungen und Pressungen zugleich hervor. Dabei besteht die Formveränderung des Prismas in einer Biegung, und die Zerstörung desselben in einem Brechen. Es handelt sich sodann um die Bestimmung des Widerstandes gegen Biegung. Die für das Prisma gefundenen Resultate werden sodann den Weg zur Untersuchuung anders geformter Körper, vorzüglich der von gleichem Widerstande anbahnen.

§. 8.

Mass- und Gewichts-Einheiten. Die nachfolgenden Untersuchungen und Resultate beziehen sich stets auf Wiener Mass und Gewicht. Dabei ist als Masseinheit der Zoll und als Gewichtseinheit der Zentner angenommen, wenn nicht ausdrücklich etwas anders bemerkt wird.

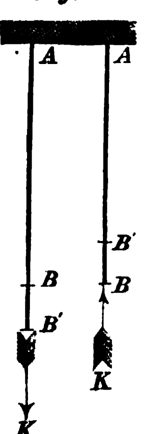
Erster Abschnitt.
Ausdehnung und Zusammendrückung.

Erstes Kapitel.
Widerstand gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.

§. 9.

Erklärung. Es werde Fig. 1 ein Prisma aus homogenem Materiale in seiner Längenrichtung einer beliebigen entweder als Spannung oder Pressung wirkender Kraft unter bestimmten Umständen ausgesetzt, welche sich gleichmässig über den Querschnitt desselben vertheilt. Sei die Länge des Prismas $AB = l$, der Querschnitt desselben $= q$, die wirkende Kraft $= K$ und die hervorgebrachte totale Längenveränderung $BB' = \Delta l$. Diese bestehe im Sinne des §. 8 aus $\Delta_1 l$, der permanenten, und aus $\Delta_2 l$, der elastischen Veränderung, und werde daher durch die Gleichung $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$ ausgedrückt. Man lasse dabei positive Werthe von K und Δl als Spannungen und Ausdehnungen gelten, und sehe sonach negative Werthe dieser Grössen als Pressungen und Zusammendrückungen an. Wird vorläufig von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, und unter den gemachten Voraussetzungen keine Ursache zugelassen, welche namentlich bei der Pressung ein Ausbiegen der Längenaxe hervorbringen könnte, so kann diese letztere nur in ihrem Ausmasse, nicht aber auch in der Richtung verändert werden.

Fig. 1.



In diesem Falle ist der Widerstand des materiel-

len Prismas sowohl gegen Ausdehnung als gegen Zusammendrückung aus der Kraft zu beurtheilen, welche eine solche Längenveränderung verursacht.

§. 10.

Längenveränderungen. Die Längenveränderungen, sie seien total, permanent oder elastisch, sind offenbar abhängig von der Länge des Prismas, dem Querschnitte desselben, der Intensität der einwirkenden Kraft, und der Natur des gewählten Materiales. Es unterliegt keinem Zweifel, und die Erfahrung bestätigt diess, dass die Längenveränderungen im einfachen und directen Verhältniss mit der Länge des Prismas stehen. Eben so leuchtet ein, dass die Intensität der Wirkung lediglich nach der Kraft zu bemessen ist, welche verhältnissmässig auf die Quadrat Einheit des Querschnittes ($\square''$) entfällt. Wird die letzterwähnte Kraft mit k bezeichnet, so ist zunächst $k = \frac{K}{q}$ und sonach in Uebereinstimmung mit dem Gesagten $\Delta l = l f(k)$, $\Delta_1 l = l f_1(k)$ und $\Delta_2 l = l f_2(k)$, und, indem $\frac{\Delta l}{l} = v$, $\frac{\Delta_1 l}{l} = v_1$ und $\frac{\Delta_2 l}{l} = v_2$ gesetzt wird, beziehungsweise auch

$$v = f(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$v_1 = f_1(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\text{und } v_2 = f_2(k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn die Fructionszeichen f, f_1 und f_2 sich auf das gewählte Materiale beziehen. Diese 3 Gleichungen lehren, dass bei einem gegebenen Materiale das Verhältniss zwischen der Längenveränderung (Ausdehnung, Zusammendrückung) und der Länge des Prismas nur von der auf die Quadrat-Einheit des Querschnittes entfallenden Kraft (Spannung, Pressung) abhängt. Diese Abhängigkeit wird jedoch eine verschiedene sein, je nachdem die totalen, permanenten oder elastischen Längenveränderungen betrachtet werden. Man beachte indess, dass wegen $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$ auch $v = v_1 + v_2$ und sofort $f(k) = f_1(k) + f_2(k)$ wird, daher die Kenntniss zweier dieser Functionen die der dritten Function nach sich zieht. Auf diese Weise ist mit Rücksicht auf §. 8 k in Zentnern zu verstehen, und auf einen Quadratzoll Querschnitt zu beziehen.

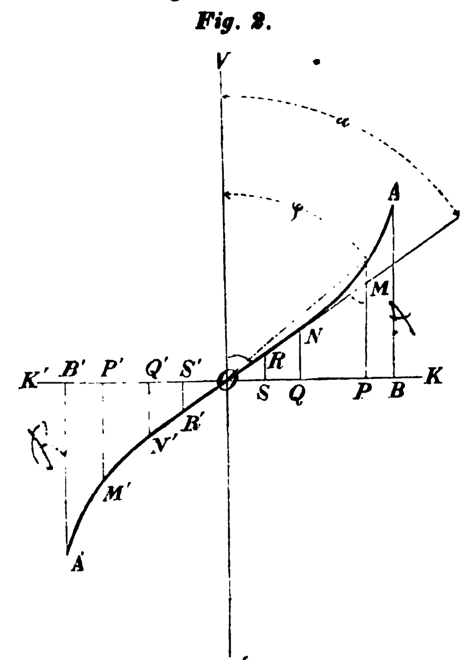
§. 11.

Totale Längenveränderungen Grösstmöglichste Anspruchsnahme. Modul der Längenveränderung. Um

sogleich in die Untersuchung der erstbezeichneten Function einzugehen, welche die Abhängigkeit der totalen Längenveränderung von der betreffenden Kraft nachzuweisen hat, betrachte man die Gleichung (1) $v = f(k)$ als die einer krummen Linie, welche auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem derart bezogen wird, dass k die Abscissen und v die Ordinaten vorstellen. Der Umstand, dass k eine Kraft und v eine Verhältnisszahl bedeutet, kann die gewählte Betrachtungsweise nicht beirren, weil es unbenommen bleibt, sowohl Kräfte als Verhältnisse graphisch darzustellen. Man wird sich nur darüber zu einigen haben, nach welchem Masstabe die Einheit sowohl für die Abscissen, als für die Ordinaten gewählt werden soll.

Sei also Fig. 2 für ein bestimmtes Materiale $A A'$ die fragliche Curve (deren Form bereits den nachfolgenden Raisonnements gemäss gezeichnet ist), sei ferner O der Ursprung der Coordinaten, $K K'$ die Axe der Abscissen, $V V'$ die der Ordinaten, ferner $O K$ die positive Richtung der ersteren und $O V$ die der letzteren. Es repräsentirt sodann $O P = k$ eine Spannung und $O P' = k$ eine Pressung, und die dazu gehörigen Ordinaten v, nämlich $M P$ und $M' P'$ beziehen sich auf die hervorgerufenen totalen Längen - Veränderungen (Ausdehnung, Zusammendrückung). Es versteht sich übrigens von selbst, dass — während bei einer solchen Betrachtung v und k variabel scheinen — die übrigen obwaltenden Umstände (§. 6) unverändert zu bleiben haben.

Fig. 2.



Diess vorausgesetzt, kann man mit Rücksicht auf die Eingangs entwickelte Anschauungsweise im Vereine mit weiteren Erfahrungs-

Resultaten bezüglich dieser Curve, und respective der **totalen** Längenveränderungen Folgendes bemerken:

1. Da die totalen Längenveränderungen mit den Kräften gleichzeitig verschwinden, positiv und negativ werden, überdiess mit einander wachsen, so geht die Curve durch den Ursprung der Coordinaten, und erscheint ausschliesslich in den 2 gegenüberliegenden Quadranten KOV und $K'O'V'$ und zwar in einer solchen Form, dass sie sich von den Coordinaten-Axen immer mehr entfernt.

2. Für den Endpunct der Curve ist OB die **grösstmöglichste Spannung vor dem Zerreissen** des Prismas, und es repräsentirt AB das **grösstmöglichste Verhältniss der totalen Ausdehnung zur Länge.** Diese Spannung werde mit A bezeichnet. Für den Endpunct A' ist OB' die **grösstmöglichste Pressung vor dem Zerquetschen,** und es repräsentirt $A'B'$ das **grösstmöglichste Verhältniss der totalen Zusammendrückung zur Länge.** Diese Pressung werde mit R bezeichnet.

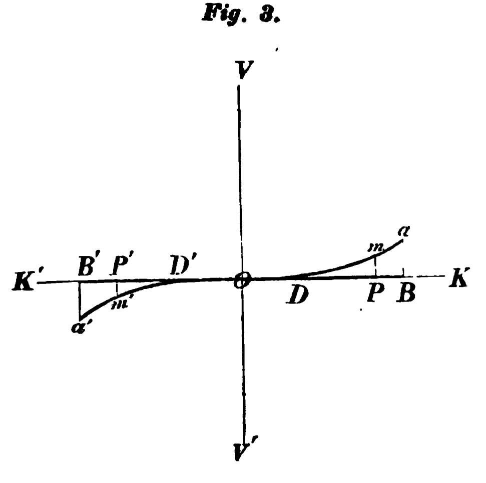
3. Eine zweckmässige Anschauungsweise für die Abhängigkeit der Längenveränderungen von den Kräften ergibt sich dadurch, dass man dem Verhältnisse $k:v$ die Aufmerksamkeit zuwendet. Nennt man diesen Quotienten $\frac{k}{v}$ **den Modul der Längenveränderung** für das in Betracht stehende Materiale, und bezeichnet denselben mit m, so ist wegen $\frac{k}{v} = \frac{OP}{MP} = tang.\, OMP = tang.\, \varphi$ sofort $m = tang.\, \varphi$, also eine mit φ veränderliche Grösse. Ist jedoch, wie vorausgesetzt werden muss die Curve eine continuirliche, und wird dieselbe von keiner der Coordinatenaxen tangirt, so muss offenbar der Modul m desto mehr constant werden, je kleiner die Veränderungen v sind, da in diesem Falle φ sich immer mehr dem Winkel α nähert, welchen die Tangente an dem Puncte O mit der Ordinatenaxe einschliesst. Obwohl hiernach nur für unendlich kleine Werthe von k und v der Modul m unter den vorhandenen Umständen als die unveränderliche Grösse $tang.\, \alpha$ zu gelten hat, so wird doch diese Unveränderlichkeit des Moduls auch für endliche Werthe der Grössen k und v in so lange **näherungsweise** angenommen werden können, als diese Grössen klein genug sind, um den auf solche Weise entstehenden Fehler nicht wahrnehmbar, oder doch unwesentlich zu machen.

Unter dieser Bedingung kann man mit hinreichender Genauigkeit von dem Satze Gebrauch gemacht werden, dass die totalen Längenveränderungen (Ausdehnungen, Zusammendrückungen) proportional mit den Kräften (Spannungen, Pressungen) wachsen. Auch leuchtet ein, dass gleichzeitig das Curvenstück NN', für welches die dem Modul äquivalenten Werthe von $\frac{k}{v}$ (also beispielsweise $\frac{OQ}{NQ}$, $\frac{OS}{RS}$, $\frac{OQ'}{NQ'}$, $\frac{OS'}{R'S'}$) nahezu constant werden, sich nur wenig von einer geraden Linie unterscheiden wird, und ohne merklichen Fehler mit derselben verwechselt werden kann. Eine Ausnahme von dieser Regel könnte nur dann eintreten, wenn eine der Coordinaten-Axen die Curve tangiren würde, ein Fall, der nach den Wahrnehmungen über die Materialien, welche man in der vorliegenden Schrift zu betrachten beabsichtigt, nicht anzunehmen ist. Wie gross übrigens der Werth von $tang. \alpha$, wie lang das Curvenstück NN', und wie die Gestalt der übrigen Theile der Curve sein werden, lässt sich im Allgemeinen nicht bestimmen. Das Nähere hierüber enthält die Untersuchung über die speciellen Materialien. Es mag vorläufig nur auf die Wahrnehmung aufmerksam gemacht werden, wornach die beiden auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Curventheile als convex gegen die Axe der Abscissen und als concav gegen die der Ordinaten anzunehmen sind, wie diess beispielweise Fig. 2 versinnlicht. Es ist nicht schwer, für diese Wahrnehmung einen Erklärungspunct zu finden. Wird nämlich zugegeben, dass die Ausdehnungen und Zusammendrückungen in einem desto grösseren Verhältniss wachsen, je bedeutender die Veränderung des ursprünglichen Zustandes geworden ist, so liegt der Schluss nicht ferne, dass, nachdem kleine Veränderungen nahezu im einfachen Verhältnisse mit den Kräften stehen, bedeutendere Längenveränderungen in einem grösseren, als einfachen und überdiess wachsenden Verhältniss mit den bezüglichen Kräften zunehmen werden. In diesem Falle muss offenbar die Curve die vorerwähnte Form besitzen, daher auch umgekehrt, wenn diese Form erfahrungsgemäss vorhanden ist, der gegebene Erklärungsgrund statthaft erscheint.

§. 12.

Permanente Längenveränderungen. Grösste zulässige Anspruchsnahme. Geht man nunmehr auf die Untersuchung der zweiten Function über, welche die Abhängigkeit der permanenten Längenveränderungen von den betreffenden Kräften nachweiset, so beachte man, dass die hieher gehörige Gleichung (2) $v_1 = f_1(k)$ auf analoge Weise, wie die Gleichung (1) analysirt werden kann. Man sehe demnach die Relation $v_1 = f_1(k)$ ebenfalls als die Gleichung einer Curve an, und beziehe dieselbe auf das bereits gewählte Coordinatensystem, wobei k abermals die Abscissen, hingegen v_1 die Ordinaten vorstellen. Mit Rücksicht auf die im §. 11 gemachten Erinnerungen über die Lage von positiven und negativen Ordinaten, welche auch hier Anwendung finden, sei Fig. 3 die fragliche Curve aa', deren Form bereits den nachfolgenden Raisonnements gemäss verzeichnet ist.

Fig. 3.



Unter Festhaltung der gemachten Voraussetzungen und mit Benützung der vorausgegangenen Erörterungen ist hinsichtlich der in Rede stehenden Curve, und respective der permanenten Längenveränderungen Folgendes zu bemerken:

1. Zunächst leuchtet ein, dass die Curve aa' ebenso, wie die voruntersuchte AA', durch den Ursprung der Coordinaten gehen, und ausschliesslich in den zwei gegenüber liegenden Quadranten VOK und $V'OK'$ wieder in einer solchen Form erscheinen werde, dass sie sich von den Coordinaten-Axen immer mehr entfernt.

2. Ist für $K = OB$ die grösstmöglichste Spannung A vor dem Zerreissen des Prismas vorhanden, so repräsentirt die Ordinate aB das grösstmöglichste Verhältniss der permanenten Ausdehnung zur Länge. Ist hingegen $K = OB'$ die grösstmöglichste Pressung R vor dem Zerquetschen, so bedeutet sodann $a'B'$ das grösstmöglichste Verhältniss der permanenten Zusammendrückung zur Länge.

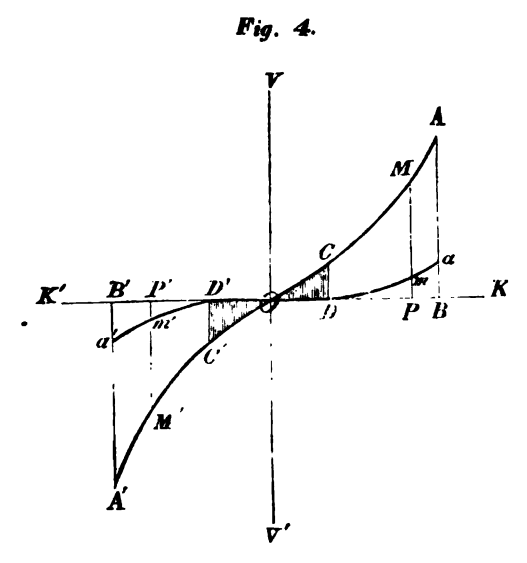
3. Ist OD die grösste Spannung, und OD' die grösste Pressung, welche beziehungsweise eintreten können, damit im Sinne des §. 5 die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, so sind die Ordinaten zwischen D und D' so klein, dass sie nicht wahrnehmbar oder wenigstens unwesentlich erscheinen, und es kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden, dass das Curvenstück DD' mit der geradlinigen Abscissenaxe zusammenfalle. In dieser Ueberzeugung darf diese Axe, wenigstens näherungsweise als Tangente an die Curve in O angesehen werden. Die weitere Gestalt der Curve ist erfahrungsgemäss convex gegen die Abscissenaxe anzunehmen.

Setzt man ferner die Spannung $OD = a$ und die Pressung $OD' = r$, so sind offenbar diese Kräfte diejenigen Gränzwerthe, welche in Hinblick auf §. 6 unter den obwaltenden Umständen höchstens vorhanden sein dürfen, um den Bestand des materiellen Prismas zu sichern. Dieser Auffassung gemäss wird a die grösste zulässige Spannung und r die grösste zulässige Pressung genannt werden. Ueber diese Gränzwerthe lässt sich im Allgemeinen nur so viel sagen, dass die Relationen $\frac{a}{A} < 1$ und $\frac{r}{R} < 1$ stattfinden müsse.

§. 13.

Totale, permanente und elastische Längenveränderungen. Proportionalität zwischen den Kräften und Längenveränderungen, praktische Definition des Moduls, und Gleichheit des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung innerhalb der Elasticitätsgränzen. Betrachtet man Fig. 4 die beiden in den §§. 11 und 12 besprochenen Curven zugleich in dem gewählten Coordinatensysteme, so kann eine gegenseitige Vergleichung zwischen den totalen, permanenten und elastischen Veränderungen vorgenommen werden, wenn man berücksichtigt, dass die Theile der Ordinaten, welche — wie etwa Mm, $M'm'$ zwischen den beiden Curven eingeschlossen sind, sich auf die elastischen Längenveränderungen beziehen. Es ist nämlich für eine beliebige Abscisse $OP = k$ gleichzeitig $MP = v$, $mP = v_1$ und $Mm = v_2$. — Ueberschreiten die Spannungen und Pressungen die Elasticitätsgränzen nicht, so können

Fig. 4.



ohne merklichen Fehler die zusammengehörigen totalen und elastischen Längenveränderungen als gleich gelten, da in diesem Falle von den permanenten Veränderungen wegen ihrer Kleinheit abgesehen werden darf. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die den grössten zulässigen Kräften (Spannung $OD = a$ und Pressung $OD' = r$) entsprechenden Ordinaten CD und $C'D'$ sich auf die grössten zulässigen Längenveränderungen beziehen. Setzt man daher der Kürze wegen $CD = \delta_a$ und $C'D' = \delta_r$, so bezeichnet δ_a die grösste zulässige Ausdehnung und δ_r die gleichnamige Zusammendrückung im Verhältniss zur Länge. Wird ferner nach den Erfahrungen über Holz- und Eisenmaterialien die Annahme zugelassen, dass die Puncte C und C' (Fig. 4), welche die Elasticitätsgränzen bestimmen, vom Ursprung der Coordinaten nicht weiter entfernt liegen, als die Puncte N und N' des als geradlinig betrachteten Curvenstückes NN' (Fig. 2), so kann unter der Beschränkung, dass die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, ohne merklichen Fehler angenommen werden.

1. Dass sowohl die totalen als elastischen Längenveränderungen, gleichgiltig ob es sich um Ausdehnung oder Zusammendrückung handelt, den einwirkenden Kräften proportional seien;

2. dass der Modul m sowohl für die Ausdehnung als Zusammendrückung einen und denselben constanten Werth besitze, und die

Gleichung $v = v_2 = \frac{k}{m}$ . . . . (4)

die Abhängigkeit der totalen und elastischen Längenveränderungen von den einwirkenden Kräften mit einer desto grösseren Ge-

nauigkeit ausdrücken werde, aus je mehr Werthen von $\frac{k}{v} = tang.\,\varphi$ man die durchschnittliche Grösse des Moduls m zu berechnen in der Lage war, dass aber weiters wegen $v = \frac{1}{m}$ für $k = 1$ sich der Modul m auf eine praktische Weise definiren lasse, indem derselbe offenbar anzeigt, um den wievielten (m^{ten}) Theil das materielle Prisma bei der als Spannung oder Pressung wirkenden Krafteinheit (1 Zentner) verlängert oder verkürzt wird;

3. dass vermöge der Gleichung (4) eine Kraft, wenn sie einmal als Spannung, das andere Mal als Pressung wirkt, stets dieselbe Längenveränderung hervorbringe, und daher — in soferne der Widerstand gegen eine gewisse Längenveränderung durch die dazu nöthige Kraft gemessen wird, die Behauptung der Gleichheit des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung folgerichtig sei; endlich

4) dass für die Bestimmung der grössten zulässigen Längenveränderungen die Gleichungen $\delta_a = \frac{a}{m}$ und $\delta = \frac{r}{m}$ . . . (5) stattfinden.

Anmerkung. Diese Zahl m pflegt man sonst auch den Elasticitätsmodul zu nennen, obwohl, wie man sieht, dieselbe mit der Elasticität in keinem Zusammenhange gebracht ist. Die Zahl m correspondirt eigentlich mit der Grösse der Längenveränderung, daher man mit derselben richtiger den Modul dieser Veränderung bezeichnen wird, wie diess in §. 11 geschehen ist.

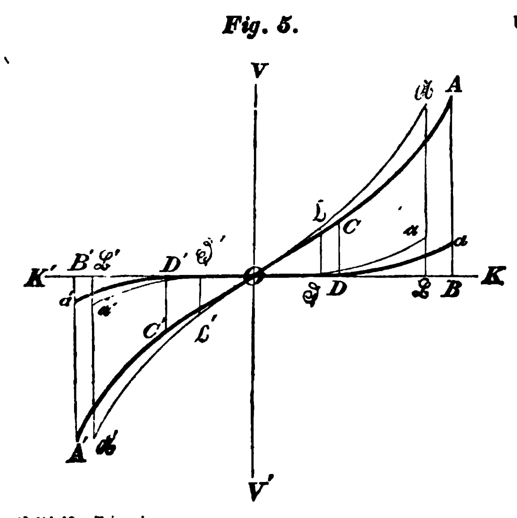
Indem die Aufmerksamkeit auf diese Eigenschaften gelenkt wird, kann zur Vermeidung eines Missverständnisses nicht genug empfohlen werden, wohl zu beachten, dass dieselben nicht eine mathematische Genauigkeit haben, sondern nur innerhalb der Elasticitätsgränzen näherungsweise vorhanden sind, dass aber eben desshalb, indem nach §. 6 die Sicherheit der Existenz des Körpers an diese Bedingung zu knüpfen ist, die Kenntniss der angeführten Eigenschaften einen um so vorzüglicheren Werth besitzt, als hiermit die Resultate der Untersuchung über einzelne Materialien in der That übereinstimmen.

§. 14.

Einfluss der Umstände. In den §§. 11, 12 und 13 hat man verschiedene Spannungen und Pressungen unter der Bedin-

gung auf das materielle Prisma eintreten lassen, dass dabei die besonderen Umstände, welche laut §. 6 in Betracht kommen, unverändert bleiben. Es erübrigt daher in dieser Beziehung noch den Einfluss kennen zu lernen, den eine Veränderung in den Umständen auf die Resultate haben wird. Dieser Einfluss wird offenbar nur darin bestehen können, dass die zu dem untersuchten Materiale gehörigen Werthe für A, R, a, r, δ_a, δ_r und m, welche unter bestimmten Umständen constant sind, mit den veränderten Umständen ebenfalls variiren werden. Um die Variation dieser Werthe anschaulich zu machen, setze man zuerst im Sinne des §. 6 die günstigsten Umstände voraus, und betrachte die denselben entsprechenden Curven als Grundlage zur Vergleichung mit den unter andern Umständen entstehenden analogen Curven. Zu diesem Behufe seien Fig. 5 AA' und aa' die Curven, welche sich unter den günstigsten Umständen auf die totalen und permanenten Längenveränderungen beziehen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass unter andern Umständen die Längenveränderungen verhältnissmässig desto grösser werden, je ungünstiger diese Umstände sind. Aus dieser Ursache werden die neuen Curven $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, welche sich auf die totalen und permanenten Längenveränderungen unter den veränderten Umständen beziehen, eine solche Lage haben, in welcher die Ordinaten v und v_1 durchgehends grösser sind, und überdiess die grösstmöglichsten Kräfte nicht mehr so weit gesteigert werden können, als unter den günstigsten Umständen.

Fig. 5.



Hieraus schliesst man, dass — ohne im Allgemeinen das innerhalb der Elasticitätsgränzen angegebene Gesetz der Proportionalität zwischen den Kräften und den totalen Längenveränderungen zu

beirren — mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen.

1. der Modul kleiner werde, indem in dem Ausdrucke $m = \frac{k}{v}$ die Grösse v zunimmt;

2. wegen $O\mathfrak{B} < OB$ und $O\mathfrak{B}' < OB'$ die Grössen A und R, welche die grösstmöglichste Spannung und Pressung bedeuten, sich vermindern und

3. das Curvenstück $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$, welches nahezu mit der Abcissenaxe zusammenfällt, im Vergleiche zu DD' kürzer werde, wodurch die Gränzen der Elasticität näher rücken, und die unter der Benennung „grösste zulässige Spannung und Pressung" beziehungsweise mit a und r bezeichneten Grössen ebenfalls vermindert werden*).

§. 15.

Einfluss der Materialgattung. In den §§. 11, 12, 13 und 14 hat man verschiedene Spannungen und Pressungen unter verschiedenen Umständen jedoch unter der Bedingung eintreten lassen, dass das Materiale, aus welchem das Prisma besteht, unverändert bleibe. Es ist daher schliesslich noch der Einfluss zu beurtheilen, welchen verschiedene Materialien auf die Resultate ausüben. Dieser Einfluss wird darin bestehen, dass die Grössen A, R, a, r, δ_a, δ_r und m einer abermaligen Veränderung nach Massgabe des gewählten Materiales unterliegen, ohne dass dabei die allgemeinen Gesetze modificirt werden.

§ 16.

Veränderung des Querschnittes. Ausser den Längenveränderungen, welche ein prismatischer Körper durch einwirkende Spannungen und Pressungen erleidet, muss noch der Veränderlichkeit des Querschnittes erwähnt werden. Diese Veränderung nimmt erfahrungsgemäss mit den einwirkenden Kräften zu, dieselbe ist indess innerhalb der Elasticitätsgränzen so gering, dass sie nicht wahrnehmbar, oder doch als unwesentlich zu betrachten ist. Wenn es sich daher um die sichere Existenz des Körpers handelt, in welchem Falle die Elasticitätsgränzen der Materie nicht überschritten werden

*) Die Kräfte A und R unter den günstigsten Umständen sind offenbar auch das Mass für die sogenannte absolute und rückwirkende Festigkeit des Materiales.

dürfen, so kann von der erwähnten Veränderlichkeit des Querschnittes unbedenklich abgesehen werden.

§. 17.

Besondere Bemerkungen für die Praxis. Bisher sind die Untersuchungen allgemein gewesen, und eben so nur allgemeine Erfahrungsresultate benützt worden. Indem eine solche Behandlungsweise zunächst zur Erreichung einer Uebersicht dient, wird zugleich die Anknüpfung der nunmehr wichtigen Untersuchung über die Widerstandsfähigkeit specieller Materialien unter speciellen Umständen um so leichter ermöglicht, als dieselbe eigentlich nur in der näheren und zwar numerischen Bestimmung der Grössen A, R, a, r, δ_a, δ_r und m zu bestehen hat. Zuvor muss jedoch zur Vermeidung von Missverständnissen Folgendes in Erwägung gezogen werden:

1. Bei der oft sehr verschiedenen Qualität einer bestimmten Materialsgattung (z. B. Schmiedeeisen, Tannenholz) leuchtet die Unmöglichkeit ein, die erwähnten Grössen selbst unter bestimmten Umständen mit unveränderlichen Ziffern auszudrücken. Man kann sich in dieser Beziehung nur auf einen Spielraum beschränken, innerhalb welchem in der Regel die betreffenden Werthe jener Grössen sich befinden, und wird sich daher mit durchschnittlichen Werthen begnügen müssen, ohne dabei die Möglichkeit eintretender Ausnahmen ablehnen zu können.

2. Es versteht sich von selbst, dass in wichtigen Fällen mit der zu verwenden beabsichtigten Materialsgattung zur möglichst genauen Erforschung des Widerstandes separate Versuche anzustellen, und die betreffenden Ergebnisse mit den in den vorausgegangenen §§. enthaltenen Begriffen auf entsprechende Weise zu combiniren sein werden. Bei solchen Versuchen ist offenbar die vorzüglichste Aufmerksamkeit auf das Verhalten des Materiales innerhalb der Elasticitätsgränzen, so wie auf die Erforschung dieser letzteren zu richten. Die Kenntniss des Widerstandes ausserhalb der Elasticitätsgränzen einerseits bis zum Zerreissen, anderseits bis zum Zerquetschen, ist übrigens ebenfalls schätzbar, obwohl ihr nur eine untergeordnete Wichtigkeit beizulegen ist. Da ferner die Versuche, falls sie sich über beide Elasticitätsgränzen a und r hinaus erstrecken sollen, nicht mit einem und demselben Stücke angestellt werden können, und zu die-

sem Zwecke mindestens mit zwei Stücken experimentirt werden muss, so wird, um eine Vergleichung der auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Resultate zulassen zu können, bei der Wahl der verschiedenen Stücke die nöthige Vorsicht darauf zu verwenden sein, dass sie hinsichtlich der Qualität nicht auf eine die Resultate beirrende Weise differiren.

3. Die auf die Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen stehen mit der Voraussetzung in Verbindung, dass das Prisma durch die Pressung keine Ausbiegung erfährt. Es muss daher die Länge desselben im Vergleiche zu seinen Querschnittsdimensionen klein genug sein, um diese Bedingung zu erfüllen, und den eigentlichen Widerstand gegen Zusammendrückung zu erhalten, welcher von der Länge des Prismas als unabhängig betrachtet werden darf. Indem man vorläufig bloss diesen eigentlichen Widerstand gegen das Zusammendrücken betrachtet, behält man sich vor, in der Folge auch den Fall zu behandeln, wo wegen des Eintrittes einer Seitenbiegung des Prismas die grösste zulässige Pressung r per □'' mit der Länge abnimmt *).

4. Bei der in den vorhergehenden §§. angestellten Untersuchung ist die Eigenschaft der Homogenität der Materie vorausgesetzt, daher in besonderen Fällen stets in Ueberlegung zu nehmen sein wird, in welchem Grade diese Eigenschaft als vorhanden angesehen werden dürfe, und in wie ferne vorkommende Mängel eine Verminderung der Widerstandsfähigkeit besorgen lassen.

5. Darf nicht übersehen werden, dass Versuche über den Widerstand der Materialien in der Regel nur unter den im § 6 erwähnten günstigsten Umständen statt zu finden pflegen, dass aber selbst in diesem einfachsten Falle die in Rede stehenden Grössen, insbesondere die Elasticitätsgränzen, sich mit keiner grossen Genauigkeit bestimmen lassen, weil es dabei grösstentheils auf Schätzungen ankömmt, welche nach Massgabe individueller Meinungen mehr oder weniger Verlässlichkeit darbieten werden. Man begreift, dass die Schwierigkeiten zur Durchführung solcher Schätzungen wachsen müssen, wenn die Umstände sich minder günstig gestalten, und sodann benützbare Versuche zumeist nur in beschränkter Weise sich

*) Siehe noch die Anmerkung 2. Seite 54.

anstellen lassen, wie diess beispielsweise bei der Beurtheilung des Einflusses von Erschütterungen und einer langen Dauer des Materiales eintreten würde. In solchen Fällen müssen insbesondere Erfahrungen über ausgeführte Constructionen geeignete Anhaltspuncte bieten. Doch können hiebei nicht immer einfache Vergleichungen genügen, sondern es wird zuweilen ein nicht gewöhnlicher Scharfsinn erfordert, um Erfahrungsresultate folgerichtig zu benützen.

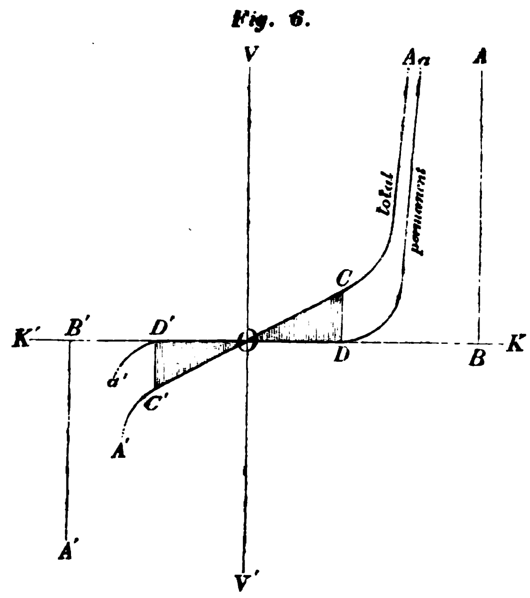
6. Endlich ist es klar, dass bei der graphischen Darstellung der fraglichen Curven zunächst nur einzelne Puncte derselben bestimmt werden können, und erst hierauf die Verbindung dieser zu continuirlichen Curven zu bewerkstelligen ist. Solcher Puncte wird man so viele erhalten, als man Partien zusammengehöriger Werthe von k, v und v_1 aus Versuchen zu ermitteln in der Lage ist, daher die erwähnten Curven desto genauer erhalten werden, je umfassendere Versuchsresultate in dieser Beziehung zu Gebote stehen.

Ungeachtet der Schwierigkeiten, welche sich der Bestimmung der auf die Beurtheilung des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen entgegensetzen, kann man doch der Ueberzeugung Raum geben, dass es in den vorkommenden Fällen gelingen werde, wissenschaftliche Betrachtungen mit practischer Beurtheilung dergestalt zu vereinen, um die daraus hervorgehenden Resultate mit einer für die Praxis genügenden Beruhigung als brauchbar empfehlen zu können. In dieser Ueberzeugung und unter Festhaltung der gemachten Erinnerungen folgen nunmehr die Erörterungen über den Widerstand gegen Ausdehnung und Zusammendrückung der im Constructionswesen vorkommenden Holz- und Eisenmaterialien, welche aus besonderen Versuchen und anderweitigen Erfahrungen entnommen sind.

§. 18.

Schmiedeeisen. Erfahrungsresultate. Schätzungen. Nach den Versuchen anerkannter Fachmänner (insbesondere Gerstner's, Hodgkinson's) kann der Widerstand des Schmiedeeisens gegen Ausdehnung und Zusammendrückung mittelst Fig. 6 versinnlicht werden, in welcher die zu den totalen und permanenten Längenveränderungen gehörigen Curven AA' und aa', und zwar mit Rücksicht auf die

Fig. 6.



günstigsten Umstände in entsprechender Weise dargestellt erscheinen. Die Merkmale dieser Curven, so wie die auf den Widerstand Bezug nehmenden Resultate sind nachstehend zusammengestellt:

1. Die grösstmöglichste Spannung $OB = A$ unter den günstigsten Umständen variirt in der Regel zwischen 300 und 700 Zentnern. Als Mittelwerth möge $A = 500$ Ztr. gelten.

Die grösstmöglichste Pressung $OB = R$ unter denselben Umständen kann bei so kurzen Stücken, wo die Länge ohne merklichen Einfluss ist, ungefähr mit $\frac{4}{5} A$ angenommen werden. Für den betreffenden Mittelwerth $A = 500$ würde sodann $R = 400$ Ztn. werden. Mit dem Eintritte von minder günstigen Umständen vermindern sich die Werthe von A und R.

2. Die grösste zulässige Spannung $OD = a$, so wie die gleichnamige Pressung $OD' = r$ können ebenfalls verschiedene Werthe haben, sie weichen jedoch in der Regel nicht viel von einander ab, ob zwar $r < a$ ist. Für genügend kurze Stücke wird die Annahme $a = r$ von der Wahrheit sich nicht weit entfernen. Unter den günstigsten Umständen mag man im Mittel $a = 200$ Ztr. gelten lassen. Mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen vermindern sich diese Grössen.

So würde man z. B. bei Kettenbrücken die grösste zulässige Spannung in den schmiedeeisernen Kettengliedern nur bis auf ungefähr $\frac{5}{6}$ von jener unter den günstigsten Umständen treiben dürfen, da in diesem Falle die zu besorgenden Erschütterungen, die beabsichtigte lange Dauer des Bauobjectes und der eben so lang währende Einfluss der Atmosphärilien zusammengenommen solche Umstände sind, welche die vorgeschlagene Bestimmung von a rechtfertigen. Hienach wäre mit Benützung des angegebenen Mittelwerthes sofort $a = 166\frac{2}{3}$ Zentner zu setzen. Noch kleiner müsste der Werth von a für die bei Kettenbrücken vorkommenden Hängestangen — abgesehen von einer etwa geringeren Qualität des Eisens im Vergleiche mit dem der Kettenglieder — und zwar darum gewählt werden, weil bei dem geringen Querschnitte und bei der verhältnissmässig bedeutenden Länge der einzelnen Hängestangen, so wie bei der grossen Ungleichförmigkeit, welche bei dem Zuge in denselben eintreten kann, der nachtheilige Einfluss von Erschütterungen noch höher als für die Kettenglieder anzuschlagen ist. Es würde nämlich in dieser Beziehung nicht rathsam sein, im Vergleiche zu dem erwähnten Mittelwerthe viel mehr als $a = 100$ Zentner anzunehmen.

Dieses Beispiel beweiset zugleich, dass bei einer Construction die verschiedenen Bestandtheile selbst bei gleicher Qualität des verwendeten Materials nicht immer auf dieselbe Weise zu beurtheilen sein werden, und dass die aus den Versuchen gefundenen Resultate, welche sich in der Regel auf die günstigsten Umstände beziehen, nicht ohne Weiteres auf das Constructionswesen übertragen werden dürfen, sondern zuvor in Ueberlegung zu nehmen ist, in wie ferne eine Reduction derselben eintreten muss

3. **Der Modul m innerhalb der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung** kann unter den günstigsten Umständen durchschnittlich mit 250,000 angenommen werden. Derselbe unterliegt einer weit geringeren Variation, als die vorbesprochenen Grössen, da in dieser Hinsicht die Qualität des Eisens und die besonderen Umstände, welche die Einwirkung der Kräfte begleiten, keinen im Verhältnisse so bedeutenden Einfluss haben, wie solcher sich auf die Grössen a und r geltend macht. Der Modul $m = 250{,}000$ zeigt übrigens im Sinne des §. 13 zugleich an, dass jeder Zentner Spannung oder Pressung eine Längenveränderung hervorbringt, welche mit dem m^{ten} (also durchschnittlich mit dem $250{,}000^{sten}$) Theile der Länge zu bemessen ist, wenn anders hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Ausser diesen Gränzen nimmt der Modul ab.

4. **Die grösste zulässige Ausdehnung δ_a und die gleichnamige Zusammendrückung δ_r** (im Verhältniss zur

Länge) werden mit Rücksicht auf den §. 13 und die angenommenen Mittelwerthe der Grössen a, r und m zunächst unter den günstigsten Umständen aus den Gleichungen (5) $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1250}$ und $\delta_r = \frac{r}{m} = \frac{1}{1250}$ zu entnehmen sein. Da sich unter minder günstigen Umständen in den beiden Brüchen $\frac{a}{m}$ und $\frac{r}{m}$ der Zähler verhältnissmässig mehr als der Nenner vermindert, so ist klar, dass sich in diesem Falle die grössten zulässigen Längenveränderungen δ_a und δ_r gleichfalls vermindern müssen. Diese Verminderung wird sich ohne Anstand ergeben, wenn nur vorerst die Werthe von a, r und m fesgestellt sind. Auch mag bemerkt werden, dass die Ausdehnung unmittelbar vor dem Zerreissen sehr verschieden ist, indem das Verhältniss AB, wie bei sehr weichem Eisen, sogar bis auf $\frac{1}{8}$ steigen, und selbst bei minder weichem Eisen noch immer $\frac{1}{25}$ betragen kann, während es bei dem harten unausgeglühten Eisen zuweilen nicht $\frac{1}{800}$ erreicht.

5. Die auf die totalen und permanenten Ausdehnungen Bezug nehmenden Curvenäste OA und Oa erinnern der Form nach an hyperbolische Curven, mit denen sie auch in der Zeichnung theilweise zusammenfallen. Auch findet man, dass diese Curvenäste, wenn k ungefähr $= 1\frac{1}{2}\, a$, d. h. die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung bereits um $\frac{1}{2} a$ überschritten ist, eben so, wie innerhalb der Elasticitätsgränzen näherungsweise geradlinig werden. Daraus folgt, dass die correspondirenden Zunahmen in den Spannungen und Ausdehnungen (sie seien total, permanent oder elastisch) nicht nur nach §. 13 innerhalb der Elasticitätsgränzen, sondern auch unter der oben bezeichneten Bedingung ausserhalb derselben als proportional, jedoch nach verschiedenen Exponenten, gelten können *).

§. 19.

Qualität des Schmiedeeisens mit Rücksicht auf die Grösse und Form des Querschnittes. Dünne Eisenstücke haben im Vergleiche zu dicken in der Regel eine bessere Qualität, weil man bei ersteren durch das Hämmern oder Walzen

*) Auf diese Eigenschaft hat schon Gerstner aufmerksam gemacht.

eine grössere Dichte nnd Homogenität zu bewirken im Stande ist, als bei letzteren. Es leisten daher meistentheils dünne Eisenstäbe, flache Eisenschienen u. s. w. einen verhältnissmässig grösseren Widerstand, als massiv gehaltene Stücke. Hierin liegt auch die Ursache, dass man z. B. zu Kettengliedern bei Kettenbrücken flache Schienen verwendet, die im Vergleich zur Breite eine nur geringe Dicke besitzen.

§. 20.

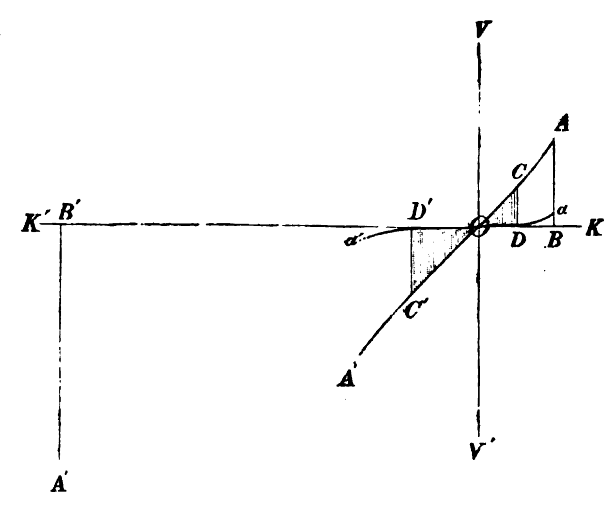
Eisenblech. Eisendraht. Der Widerstand vom Eisenblech und Eisendraht kann in der Hauptsache nach der für das Stabeisen gelieferten Erörterung beurtheilt werden. Bezüglich dieser Materialien wird auf die nachfolgende Tabelle im § 23 hingewiesen, aus welcher die numerischen Mittelwerthe zu entnehmen sind. Im Vergleiche zum Stabeisen leistet in der Regel das Eisenblech einen geringeren, der Eisendraht hingegen einen grösseren Widerstand, während in der Dehnbarkeit — wenigstens innerhalb der Elasticitätsgränzen — kein grosser Unterschied vorhanden ist. Auch hält man den Unterschied nicht für wesentlich, welcher in dem Widerstande des Eisenbleches dadurch entsteht, dass man die Richtung der Kraftwirkung von der des geschehenen Walzens des Bleches abweichend wählt.

§. 21.

Gusseisen. Erfahrungsresultate. Schätzungen. Der Widerstand des Gusseisens gegen Ausdehnung und Zusammendrückung kann nach den (vorzüglich von Hodgkinson) angestellten Versuchen mittelst Fig. 7 graphisch versinnlicht, und aus nachstehenden Bemerkungen beurtheilt werden:

1. Indem sich AA' auf die totalen, und aa' auf die permanenten Längenveränderungen bezieht, variiren die grösstmöglichste Spannung $OB=A$ und die gleichnamige Pressung $OB'=R$ unter den günstigsten Umständen je nach der verschiedenen Qualität sowohl in ihrem eigentlichen Werthe als auch in ihrem gegenseitigen Verhältnisse bedeutend. In der Regel ist die Grösse A zwischen 100 und 300 Zentnern, das Verhältniss $A:R$ aber zwischen 1 : 4 und 1 : 8 enthalten, und als Mittelwerthe mögen $A=180$ Zentner und $R=1000$ Zentner gelten, wenn man das

Fig 7.



Zerquetschen nur auf so kurze Stücke bezieht, dass die Länge ohne merklichen Einfluss ist. Mit dem Eintritte von minder günstigen Umständen vermindern sich diese Werthe.

2. Die grösste zulässige Spannung $OD = a$, so wie die gleichnamige Pressung $OD' = r$ unter den günstigsten Umständen können ebenfalls verschieden sein, und es scheint, dass das Verhältniss $a : r$ je nach der weicheren oder härteren Qualität von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{4}$ variirt. Als Durchschnittswerthe kann man $a = 80$ Ztn., $r = 240$ Ztn. und $a : r = 1 : 3$ gelten lassen, wenn r sich nur auf sehr kurze Stücke bezieht. Mit dem Eintritte und der Vermehrung von minder günstigen Umständen vermindern sich die Grössen a und r.

3. Der Modul m innerhalb der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung kann durchschnittlich mit 125,000 angenommen werden. Ausserhalb der Elasticitätsgränzen, so wie mit der Vermehrung von minder günstigen Umständen wird der Modul kleiner. In Ansehung der Bedeutung des Bruches $\frac{1}{m}$ findet die für das Schmiedeeisen angegebene Bemerkung im §. 18 auch hier Anwendung

4. Die grösste zulässige Ausdehnung δ_a und die gleichnamige Zusammendrückung δ_r (im Verhältniss zur

Länge) sind aus den Gleichungen (5) zu entnehmen. Sonach wird mit Rücksicht auf die für die günstigsten Umstände angegebenen Mittelwerthe von a, r und m sofort $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1562}$ und $\delta_r = \frac{r}{m} = \frac{1}{521}$, daher auch $\delta_a : \delta_r = a : r = 1 : 3$. Unter minder günstigen Umständen vermindern sich die Werthe von δ_a und δ_r aus demselben Grunde, wie beim Schmiedeeisen (§. 18). Die Ausdehnung AB unmittelbar vor dem Zerreissen hat man mit $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{600}$ der Länge beobachtet.

5. Die auf die totalen und permanenten **Ausdehnungen** Bezug nehmenden Curvenäste OA und Oa sind in so ferne merkwürdig, als das innerhalb der Elasticitätsgränze zwischen den Spannungen und totalen Ausdehnungen bemerkte Gesetz der Proportionalität auch ausserhalb dieser Gränzen selbst bis zum Zerreissen keine bedeutende Veränderung erleidet.

§. 22.

Holz. Erfahrungsresultate. Schätzungen. Als Bauholz werden vorzüglich verwendet: Tannen, Fichten, Kiefer, Lärchen und Eichen. Die bisherigen Versuche lassen nicht mit Bestimmtheit die Curven angeben, welche sich auf den Widerstand dieser Materialien gegen Ausdehnung und Zusammendrückung beziehen. Man muss sich daher mit denjenigen Angaben begnügen, welche den Zustand derselben innerhalb der Elasticitätsgränzen darstellen. Die Praxis bedarf übrigens nicht mehr. Diese Angaben sind aus der nachfolgenden Tabelle im §. 23 zu entnehmen. Es scheint, dass überhaupt für Holzmaterialien, so weit die bisherigen Erfahrungen eine Schätzung ermöglichen, **ungefähr** die Relationen $R = \frac{1}{2} A$ und $r = \frac{3}{4} a$ angenommen werden können, obgleich die die Elasticitätsgränzen bestimmenden Grössen a und r einer sehr grossen Veränderung unterliegen. Nur für Eichenholz mag man sich die Annahmen $R = \frac{2}{3} A$ und $r = \frac{5}{6} a$ erlauben. Die Verhältnisse $\frac{A}{R}$ und $\frac{a}{r}$ sind zwar bei vorzüglich guten Holzstücken etwas grösser, allein für die Anwendung muss man darauf Rücksicht nehmen, dass die Mängel in der Materialsqualität auf A und a in der Regel einen nachtheiligeren Einfluss nehmen, als auf R und r, daher es gerathen erscheint, die ersteren Grössen (insbesondere beim Eichenholze) verhältnissmässig

niedriger zu stellen, als die letzteren, wenn die Pressung nur auf sehr kurze Stücke bezogen wird. Uebrigens haben auf die Wahl der Grössen a und r von den obwaltenden Umständen vorzüglich die verlangte Zeitdauer für den sicheren Bestand und die stattfindenden chemischen Einwirkungen grossen Einfluss.

So z. B. wird diese Wahl wesentlich verschieden sein, je nachdem man beabsichtigt, eine Holzconstruction bloss in provisorischer Weise auf einige Jahre herzustellen, oder aber in definitiver Weise auf die grösstmöglichste Dauer auszuführen. Eben so wird man zu berücksichtigen haben, ob die Bestandtheile der Construction, etwa wie bei Brücken, abwechselnd der

Benennung des Materiales	Durchschnittswerthe auf den											
	Unter den günstigsten Umständen							Unter				
								Grösstentheils con-				
								Mässige Er-				
								Dauer einige Jahre *)				
	A	R	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$
Schmiedeeisen	500	$\frac{4}{5}A$	200	a	250000	$\frac{1}{1250}$	δ_a	—	—	—	—	—
Eisenblech	450	—	180	—	220000	$\frac{1}{1222}$	—	—	—	—	—	—
Eisendraht	800	—	320	—	270000	$\frac{1}{848}$	—	—	—	—	—	—
Gusseisen	180	$5\frac{1}{2}A$	80	$3a$	125000	$\frac{1}{1562}$	$3\delta_a$	—	—	—	—	—
Tannenholz	120	$\frac{1}{2}A$	32	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{500}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	24	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{667}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Fichtenholz	100	$\frac{1}{2}A$	28	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{536}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	20	$\frac{3}{4}a$	5000	$\frac{1}{750}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Kieferholz	130	$\frac{1}{2}A$	36	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{444}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	26	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{615}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Lärchenholz	140	$\frac{1}{2}A$	40	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{400}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	28	$\frac{3}{4}a$	16000	$\frac{1}{571}$	$\frac{3}{4}\delta_a$
Eichenholz	100	$\frac{2}{3}A$	32	$\frac{5}{6}a$	15000	$\frac{1}{469}$	$\frac{5}{6}\delta_a$	20	$\frac{5}{6}a$	15000	$\frac{1}{750}$	$\frac{5}{6}\delta_a$

*) Wie z.B. für hölzerne Nothbrücken.

**) Wie z.B. für definitive

Nässe und Trockenheit ausgesetzt, oder — wie bei Wohngebäuden — von diesem nachtheiligen Einflusse mehr oder weniger geschützt seien.

§. 23.

Tabellarische Zusammenstellung. Zur Erlangung einer Uebersicht und Vergleichung in Betreff des Widerstandes der im Constructionswesen gebräuchlichsten Holz- und Eisenmaterialien unter gewissen Umständen kann die nachfolgende Tabelle, auf welche bereits in den §§. 20 und 22 aufmerksam gemacht wurde, manche Anhaltspuncte gewähren. Es wird jedoch bei dieser Gelegenheit der Inhalt des §. 17 wiederholt empfohlen.

Wiener Zentner und Wiener Zoll bezogen.														
folgenden Umständen:														
stante Krafteinwirkung und gewöhnlicher Einfluss der Atmosphärilien														
schütterungen					Möglichst lange Dauer ***)									
Möglichst lange Dauer **)					wenige Erschütterungen					bedeutende Erschütterungen				
a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$	a	r	m	$\delta_a = \frac{a}{m}$	$\delta_r = \frac{r}{m}$
—	—	—	—	—	166	a	240000	$\frac{1}{1446}$	δ_a	83	a	230000	$\frac{1}{2771}$	δ_a
—	—	—	—	—	150	—	210000	$\frac{1}{1400}$	—	75	—	200000	$\frac{1}{2667}$	—
—	—	—	—	—	266	—	260000	$\frac{1}{977}$	—	133	—	250000	$\frac{1}{1880}$	—
—	—	—	—	—	50	$4a$	120000	$\frac{1}{2400}$	$4\delta_a$	—	—	—	—	—
12	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1250}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	$\frac{3}{4}a$	14000	$\frac{1}{1400}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—		—	—	—	—	—	—	—	—
13	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1154}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	$\frac{3}{4}a$	15000	$\frac{1}{1071}$	$\frac{3}{4}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	$\frac{5}{6}a$	14000	$\frac{1}{1400}$	$\frac{5}{6}\delta_a$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

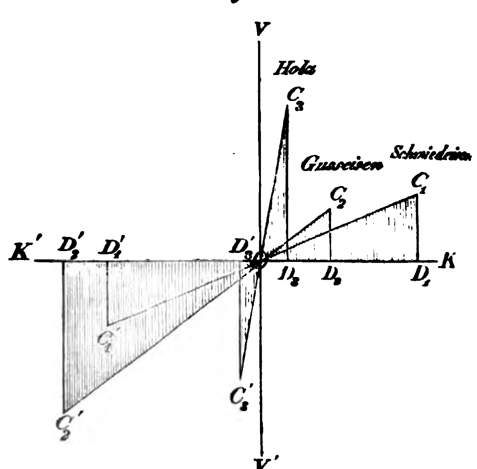
Holzbrücken.

***) Wie z. B für eiserne Brücken.

§. 24.

Graphische Vergleichung zwischen Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz. Die Vergleichung des Widerstandes von Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz gegen Ausdehnung und Zusammendrückung innerhalb der Elasticitätsgränzen kann mittelst Fig. 8 graphisch dargestellt werden, in welcher die Linien $C_1 C'_1$, $C_2 C'_2$ und $C_3 C'_3$ aufeinanderfolgend mit den totalen Längenveränderungen der angeführten Materialien correspondiren. Setzt man die günstigsten Umstände voraus, und nimmt man als bestimmte Holzgattung etwa Tannenholz an, so stellen sich mit Benützung der im vorigen §. angegebenen tabellarischen Mittelwerthe in der in Rede stehenden Figur folgende Verhältnisse heraus:

Fig. 8.



f. Schmiedeeisen:
$$\begin{cases} OD_1 = 200 \\ OD'_1 = 200 \\ C_1 D_1 = \frac{1}{1250} \\ C'_1 D'_1 = \frac{1}{1250} \end{cases}$$

für Gusseisen:
$$\begin{cases} OD_2 = 80 \\ OD'_2 = 240 \\ C_2 D_2 = \frac{1}{1562} \\ C'_2 D'_2 = \frac{1}{521} \end{cases}$$

für Tannenholz:
$$\begin{cases} OD_3 = 32 \\ OD'_3 = 24 \\ C_3 D_3 = \frac{1}{500} \\ C'_3 D'_3 = \frac{1}{667} \end{cases}$$

daher auch

$$OD_1 : OD_2 : OD_3 : OD'_1 : OD'_2 : OD'_3 =$$
$$= 200 : 80 : 32 : 200 : 240 : 24$$
$$= 25 : 10 : 4 : 25 : 30 : 3$$
$$= 1 : 0\cdot4 : 0\cdot16 : 1 : 1\cdot2 : 0\cdot12$$

und weiters

$$C_1 D_1 : C_2 D_2 : C_3 D_3 : C'_1 D'_1 : C'_2 D'_2 : C'_3 D'_3 =$$
$$= \frac{1}{1250} : \frac{1}{1562} : \frac{1}{500} : \frac{1}{1250} : \frac{1}{521} : \frac{1}{667}$$
$$= 0\cdot0008 : 0\cdot00064 : 0\cdot002 : 0\cdot0008 : 0\cdot00192 : 0\cdot0015$$
$$= 1 : 0\cdot8 : 2\cdot5 : 1 : 2\cdot4 : 1\cdot9.$$

Demgemäss kann in der Ueberzeugung, dass die Wahl einer andern Holzgattung anstatt Tannenholz die Hauptsache nicht wesentlich beirre, geschlossen werden:

1. dass bei einer und derselben Kraft die totalen Längenveränderungen innerhalb der Elasticitätsgränzen beim Holze ungefähr 16mal und beim Gusseisen doppelt so gross sind, wie beim Schmiedeeisen, daher das letztere die geringste Formveränderung erleidet;

2. dass der kleinste Spielraum für die Elasticitätsgränzen beim Holze vorhanden ist, ferner das Schmiedeeisen den grössten Zug, das Gusseisen aber den grössten Druck aushalten kann;

3. dass daher bei gespannten Constructionstheilen das Schmiedeeisen dem Gusseisen, und bei gepressten Constructionstheilen das Gusseisen dem Schmiedeeisen vorzuziehen ist, wenn man lediglich die Widerstandsfähigkeit im Auge hat,

4. dass aber bei gepressten Constructionstheilen in dem Falle, als man die geringste Formveränderung derselben bezweckt, das Schmiedeeisen bessere Dienste leistet, als das Gusseisen, und man sich deshalb veranlasst finden kann, das erstere dem letzteren vorzuziehen, wenn überhaupt auch die anderen vorkommenden Verhältnisse, z. B. die öconomischen, nicht dagegen sprechen *).

§. 25.

Anwendung der Gleichung (4). Nach dem §. 13 bezieht sich die Gleichung (4) $v = \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ auf die totalen und elastischen Längenveränderungen, wenn durch die als Spannung oder Pressung wirkende Kraft k die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Da übrigens in der Gleichung $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ vier Grössen vorkommen, also auch die Proportion $\Delta l : l = k : m$ gebildet werden kann, so lässt sich jede einzelne Grösse durch die 3 andern ausdrücken.

Es ist nämlich

$$\Delta l = \frac{k l}{m},\ l = \frac{m \Delta l}{k},\ k = \frac{m \Delta l}{l} \text{ und } m = \frac{k l}{\Delta l}.$$

Für die 3 ersten Relationen muss der Modul bekannt sein, während

---

*) Aus Anlass dieses Vorzuges des Schmiedeeisens vor dem Gusseisen hat sich z. B. Fairbairn entschlossen, bei den grossen englischen Röhrenbrücken sowohl die gespannten als auch die gepressten Röhrentheile (beziehungsweise Boden und Decke der Röhren) ganz aus Schmiedeeisen herzustellen.

die letzte Relation dazu dient, den Modul aus directen Versuchen über Ausdehnung und Zusammendrückung zu bestimmen *).

Um die Anwendung durch ein Beispiel zu zeigen, werde die Frage gestellt, um wie viel sich eine 10 Klafter lange Stange aus Schmiedeeisen bei einem Zuge von 125 Zentnern pr. Quadratzoll verlängern würde, wenn der Modul $m = 250{,}000$ anzunehmen wäre und von dem eigenen Gewichte der Stange abstrahirt würde. In diesem Falle hätte man wegen $l = 720''$ und $k = 125$ Ztr. zunächst $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m} = \frac{1}{2000}$, also auch die Ausdehnung $\Delta l = \frac{l}{2000} = 0{\cdot}36$ Zoll.

§. 26.

Gefährlicher Querschnitt**). Unter allen Querschnitten des materiellen Prismas nennt man denjenigen den gefährlichen Querschnitt, in welchem vergleichungsweise bei hinreichender Grösse der Anspruchsnahme zuerst die Gränze der Elasticität entweder für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung erreicht wird, daher die geringste Sicherheit für den Zusammenhang der Materie vorhanden ist. Hiernach leuchtet ein, dass auf diesen besonderen Querschnitt, welcher die schwächste Stelle des Prismas bezeichnet, das vorzüglichste Augenmerk gerichtet werden muss, weil die nöthige Sicherheit, wenn sie an dieser Stelle vorhanden ist, um so mehr an den übrigen Stellen gegenwärtig sein wird. Auf die Lage des gefährlichen Querschnittes hat übrigens der grössere oder geringere Grad der Homogenität der Materie einen wesentlichen Einfluss. Wenn man daher die schwächste Stelle des Prismas mit Rücksicht auf die Hypothese der vollkommenen Homogenität der Materie aufgefunden hat, so darf man den Umstand nicht aus den Augen verlieren, dass die Lage dieser Stelle nach der grösseren oder geringeren Verschiedenheit in der Qualität der Materie mehr oder weniger unsicher gemacht wird.

---

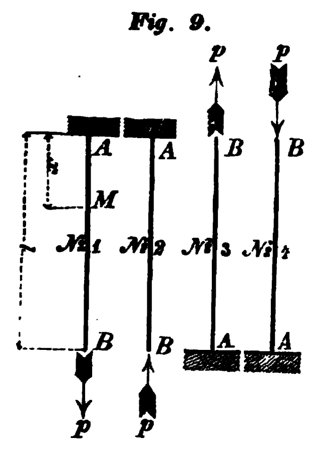
*) Hodgkinson hat den Modul für Schmiede- und Gusseisen aus Versuchen auf diese Weise bestimmt.

**) Nach der von Poncelet eingeführten Bezeichnung.

§. 27.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas. Um den Einfluss kennen zu lernen, welchen das eigene Gewicht des Prismas sowohl auf die Anspruchsnahme des Materiales, als auch auf die entstehende Längenveränderung hat, beachte man, dass in dieser Beziehung, da mit Rücksicht auf §. 9 ein Ausbiegen der Längenaxe des Prismas ausser Betracht bleibt, sich nur die in Fig. 9 dargestellten 4 Fälle ergeben, in welchen nämlich stets ein vertical gerichtetes Prisma AB an einem Ende festgehalten und am andern Ende in der Richtung der Längenaxe von einer Kraft in Anspruch genommen wird; jedoch darin ein Unterschied vorhanden ist, dass das festgehaltene Ende entweder oben oder unten sich befinden, und die Kraft entweder als Spannung oder als Pressung wirken kann. Es wird nicht nothwendig sein, in eine detaillirte Besprechung aller 4 Fälle einzugehen, sondern genügen, einen einzigen Fall zu behandeln. Wählt man zu diesem Zwecke gleich den 1. Fall, wo das vertical aufgehängte Prisma mit einem Gewichte belastet ist, und bezeichnet dieses letztere mit p, das eigene Gewicht des Prismas hingegen mit g (beide Werthe auf die Quadrateinheit des Querschnitts bezogen), setzt ferner die Länge des Prismas $AB = l$ und heisst für eine beliebige Stelle M, $AM = x$, so entsteht an dieser letzteren offenbar eine Spannung, welche — mit k bezeichnet — sofort mittelst der Gleichung $k = p +$ Gewicht $BM = p + g\frac{l-x}{l}$ auszudrücken ist, daher mit der Abnahme von x zunimmt, und mit Rücksicht auf den vorliegenden Fall für $x = o$ ein Maximum wird.

Fig. 9.



Da dieser Werth $x = o$ die Lage des gefährlichen Querschnittes anzeigt, so befindet sich derselbe an der befestigten Stelle in A, und die daselbst entstehende Spannung pr. □″ ist $k = p + g$ . . (6) die grösste, welche in dem materiellen Prisma vorwaltet.

Der grösste zulässige Werth von $k = a$ bestimmt sodann auch die grösste zulässige Belastung p, und man hat hiefür

$$p = a - g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Soll $p = o$, d. h. schon in Folge der durch das eigene Gewicht des Prismas hervorgerufenen Anspruchsnahme die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung erreicht werden, so müsste dasselbe so gross sein, dass $g = a$ wird. Ist daher das Gewicht der cubischen Einheit des Materials — also eines Kubikzolles — gleich γ, so erhält man wegen $g = l\gamma$ sofort

$$l = \frac{a}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

nämlich die Länge des Prismas, welches ausser seinem eigenen Gewichte mit Sicherheit keine Belastung mehr tragen könnte.

Fig. 10.

Sei z. B. für Schmiedeeisen $a = 180$ Ztr., und $\gamma = \frac{1}{4}$ Pfd. $= \frac{1}{400}$ Ztr., so würde

$$l = \frac{180}{\frac{1}{400}} \text{ Zoll} = 1000 \text{ Klafter}$$

resultiren.

Um sogleich auf die mit Rücksicht des eigenen Gewichtes des Prismas entstehende Längenveränderung überzugehen, sei in Fig. 10 MN ein Element des materiellen Prismas AB, wie solches vor der Ausdehnung gelegen war, $M'N'$ aber die Lage desselben Elementes nach geschehener Ausdehnung. Nach der in der Figur ersichtlich gemachten Cotirung bedeutet

$MN = dx$ das fragliche Längenelement des Prismas,

$MM' = \Delta x$ die Ausdehnung des Stückes . . . $AM = x$,

$NN' = \Delta x + d.\Delta x$ detto detto . . . $AN = x + dx$,

$NN' - MM' = M'N' - MN = d.\Delta x$ detto . . . . $MN = dx$,

$BB' = \Delta l$ detto des ganzen Prismas . . . $AB = l$ und

$k = p + g \dfrac{l - x}{l}$ die Spannung per $\square''$ in M.

Wendet man nunmehr unter der Voraussetzung, dass hiebei die Elasticitätsgränze nicht überschritten werde, die im §. 13 gegebene Gleichung (4) $v = \dfrac{k}{m}$ auf das Element MN an, und beachtet hiebei,

dass $v = \frac{\Delta . dx}{dx} = \frac{d . \Delta x}{dx}$ und m der Modul ist, so hat man

$$\frac{d . \Delta x}{dx} = \frac{k}{m} = \frac{p}{m} + \frac{g(l-x)}{lm}, \text{ daher auch}$$

$$d . \Delta x = \left(\frac{p+g}{m} - \frac{g}{lm} . x\right) . dx,$$

und die ganze Ausdehnung

$$\Delta l = \int_0^l d . \Delta x = \frac{p+g}{m}\int_0^l dx - \frac{g}{lm}\int_0^l x\,dx \text{ oder}$$

$$\Delta l = \frac{p+g}{m}\,l - \frac{gl}{2m} = \frac{p+\frac{1}{2}g}{m}\,l, \text{ und endlich für das}$$

Verhältniss der Ausdehnung zur Länge

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p+\frac{1}{2}g}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Man erkennt hienach, dass die Ausdehnung des Prismas mit Rücksicht auf sein eigenes Gewicht dieselbe ist, welche resultirt hätte, wenn von diesem eigenen Gewichte abstrahirt, dafür aber gleichzeitig die Belastung p um das halbe Gewicht des Prismas vergrössert worden wäre.

Um endlich noch die grösste zulässige Ausdehnung zu erhalten, beachte man, dass dieselbe mit der grössten zulässigen Belastung correspondirt, und zu diesem Zwecke in die Gleichung (9) für p der Werth aus der Gleichung (7), nämlich $p = a - g$ zu setzen ist. Demgemäss wäre der zulässige Maximalwerth

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{a-\frac{1}{2}g}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

also kleiner, als wenn das Prisma als gewichtlos betrachtet, und bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommen würde, wo nämlich nach den Gleichungen (5) $\frac{\Delta l}{l} = \delta_a = \frac{a}{m}$ resultirt hätte.

Für den Fall, als das eigene Gewicht des Prismas zur Erreichung der Elasticitätsgränze allein schon genügte, wäre wegen der Gleichung (8) $g = a$, und sofort

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}\,\frac{a}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11),$$

wornach die ad Gleichung (10) erwähnte Verkleinerung sogar bis auf die Hälfte des Werthes von δ_a gehen kann.

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.

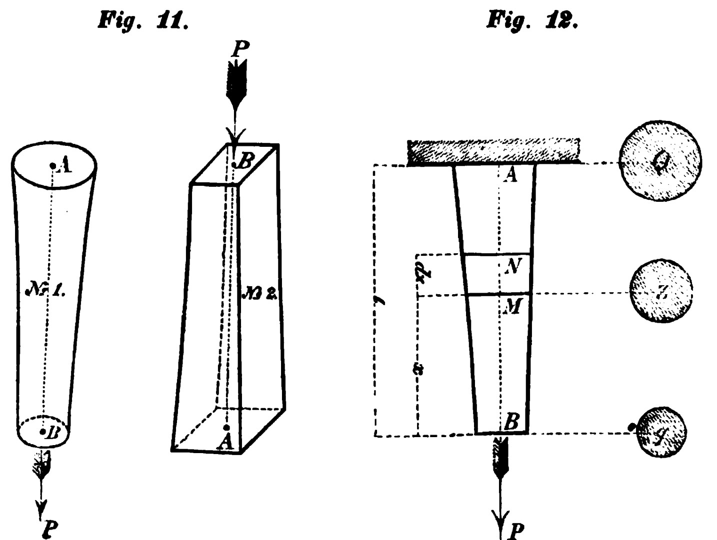
§. 28.

Erklärung. Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung und gegen Zusammendrückung sind derart geformte, bei welchen unter hinreichender Grösse der Anspruchsnahme die betreffende Elasticitätsgränze in allen Querschnitten zugleich erreicht wird. Bei solchen Körpern bleibt daher die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt.

§. 29.

Form solcher Körper. Wird von dem eigenen Gewichte des Körpers abstrahirt, und die Materie als homogen angesehen, so ist die der gestellten Bedingung entsprechende Form offenbar die prismatische; sie weicht jedoch von derselben ab, wenn auf das eigene Gewicht des Körpers Rücksicht genommen wird. Es ist klar, dass man sodann Körperformen wie in Fig. 11 erhalten werde, bei welchen zwar eben so wie bei einem Prisma eine geradlinige Längenaxe AB vorkommen muss, jedoch an den verschiedenen Stellen ungleiche Querschnitte vorhanden sind. Um diese Form näher kennen zu lernen, sei Fig. 12 ein solcher Körper einer spannenden oder pressenden Kraft P ausgesetzt, und man nenne

Fig. 11. *Fig. 12.*



die Länge des Körpers AB	. . . .	$= l$,
„ „ eines beliebigen Theiles BM	. . .	$= x$,
„ „ des Elementes MN	. . . .	$= dx$,
den Querschnitt des Körpers in B	. . . . . .	$= q$,
„ „ „ „ „ A	. . . . . .	$= Q$,
„ „ „ „ „ M	. . . . . .	$= z$,
„ „ „ „ „ N	. . . . . .	$= z + dz$,
den Körperraum zwischen B und M	. . . .	$= u$,
das Gewicht des Körpertheiles u	. . . .	$= G$
und „ „ der cubischen Einheit	. . . . . .	$= \gamma$.

Es ist vor Allem

$$du = z\,dx,\ u = \int_o^x z\,dx \text{ und } G = \gamma u = \gamma\int_o^x z\,dx,$$

ferner die in dem Querschnitte z entstehende Anspruchsnahme pr. □''

$$\frac{P+G}{z} = \frac{P+\gamma\int_o^x z\,dx}{z}.$$

Soll nun durch diese Anspruchsnahme, wie vorausgesetzt, die Gränze der Elasticität geradezu erreicht werden, so muss

$$\frac{P+G}{z} = k, \text{ und}$$

hiebei nach §. 12 entweder $k = a$ oder $k = r$ sein, je nachdem man einen Körper von gleichem Widerstande gegen Ausdehnung oder gegen Zusammendrückung betrachtet.

Hienach erhält man

$$\frac{P+\gamma\int_o^x z\,dx}{z} = k, \text{ daher auch}$$

$$P + \gamma\int_o^x z\,dx = kz,$$

und durch Differentiation $\gamma z\,dx = k\,dz$, weiters aber $\frac{\gamma}{k}\,dx = \frac{dz}{z}$, und endlich durch Integration $log\ nat. \frac{z}{q} = \frac{\gamma}{k} x$, wenn man dabei berücksichtigt, dass für $x = o$, $z = q$ werden muss.

Demgemäss wird für Körper von gleichem Widerstande

$$z = q \; e^{\frac{\gamma}{k}x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wo $e = 2 \cdot 7182818 \ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Die Gleichung (12) lehrt, die Grösse des Querschnittes an den verschiedenen Stellen der Körper von gleichem Widerstande sowohl gegen Ausdehnung als gegen Zusammendrückung zu finden, wenn man statt k beziehungsweise die Werthe a und r setzt, und überdiess die Bedingung festhält, dass die Längenaxe AB keine Ausbiegung erleidet.

Zufolge dieser Gleichung (12) kann man noch Folgendes bemerken:

1. dass die Querschnitte mit x wachsen, nämlich von B gegen A zunehmen, daher der kleinste Querschnitt q für $x = o$ in B, der grösste aber $Q = q \,.\, e^{\frac{\gamma l}{k}}$ für $x = l$ in A vorhanden ist;

2. dass der ganze Körperraum AB sich mit

$$u = \int_o^l z\,dx = \frac{kq}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma l}{k}} - 1\right) = \frac{k}{\gamma}\,(Q - q)$$

berechnet, und daher der Flächendifferenz $Q - q$ proportional ist;

3. dass, indem man $e^{\frac{\gamma l}{k}}$ auf die bekannte Weise durch eine Reihe ausdrückt, sodann auch

$$\frac{Q}{q} = 1 + \frac{\gamma l}{k} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\gamma l}{k}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\gamma l}{k}\right)^3 + \ldots$$

wird, wobei man übrigens bei der ausserordentlichen Kleinheit des Bruches $\frac{\gamma}{k}$ selten in die Lage kommt, von dem 3. Glied Gebrauch machen zu müssen, indem selbst in den meisten Fällen schon das 2. Glied unwesentlich erscheinen wird. Um diess durch ein Beispiel zu zeigen, nehme man für Schmiedeeisen $k = a = 180$ Ztr. und $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztr. an, und suche den Quotienten $\frac{Q}{q}$, so wie die Differenz zwischen Q und q bei einer Länge von 20 Klaftern.

Nach diesen Annahmen hat man

$$\frac{\gamma}{k} = \frac{1}{72000}, \; l = 1440'' \text{ und } \frac{\gamma l}{k} = \frac{1}{50},$$

daher schon nach Berücksichtigung des 2. Gliedes genau genug

$$\frac{Q}{q} = \frac{51}{50} \text{ und sofort } Q - q = \frac{1}{50}\, q.$$

Durch die auf diese Art berechnete Zunahme der Querschnitte ihrem Flächenmasse nach ist eigentlich die Körperform noch nicht vollständig bestimmt, indem ausserdem in Betracht zu ziehen ist, welche Gestalt den Querschnitten selbst gegeben werden will. So könnte z. B. verlangt werden, es sollen die Querschnitte wie in Fig. 11 ad 1 ähnlich (etwa kreisförmig), oder aber, wie in Fig. 11 ad 2 solche Rechtecke bilden, in welchen stets eine Seite constant bleibt.

Ist nun eine derartige Bedingung bekannt, so unterliegt die Vervollständigung der Formbestimmung des Körpers von gleichem Widerstande keinem Anstande, da die betreffende Bedingung für die Querschnittsform in der Formel (12) leicht zu berücksichtigen ist.

§. 30.

Längenveränderung solcher Körper. Da bei einem Körper von gleichem Widerstande die Anspruchsnahme des Materiales pr. □″ in jedem Querschnitte dieselbe ist, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die Längenveränderung durch die Formel $\frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{m}$ ausgedrückt werde, wenn Δl eben jene Längenveränderung und m den Modul bezeichnet, l und k aber die Bedeutungen im vorigen §. beibehalten.

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung und Zusammendrückung.*) Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung der Längenaxe.

§. 31.

Erklärung. Die totalen Längenveränderungen eines materiellen Prismas gehen nicht plötzlich, sondern successive vor sich, indem

*) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand genannt.

das freie Ende desselben eine verzögerte Bewegung annimmt, welche bei Beginn der Wirkung am grössten ist, dann allmälig abnimmt, und endlich nach Verlauf einer gewissen Zeit aufhört. Während dieser Zeit wird der Widerstand mit der Zunahme der Längenveränderung nach und nach bis zu dem Grade gesteigert, welcher der am Schlusse der Bewegung hervorgebrachten totalen Längenveränderung entspricht. Nachdem der jeweilige Widerstand als Gegenkraft auftritt, welche an dem freien Ende des Prismas den Angriffspunct hat, so leuchtet ein, dass dieser Widerstand einen Weg zurücklegt, der jederzeit der erzeugten Längenveränderung gleich ist. Aus dieser Ursache wird bei jeder Längenveränderung ein mechanisches Moment des Widerstandes in's Leben gerufen, welches von der jeweiligen Grösse des Widerstandes und der correspondirenden Längenveränderung abhängt. Die Kenntniss dieses Momentes ist in manchen Fällen benützbar, wie z. B. bei der Beurtheilung der Wirkung eines Stosses auf ein materielles Prisma in der Richtung der Längenaxe.

§. 32.

Bestimmung dieses Widerstandsmomentes. Zu diesem Behufe sei AB Fig. 13 ein materielles Prisma von der Länge . . . . $= l$ einer Ausdehnung oder Zusammendrückung ausgesetzt, und dadurch das freie Ende aus seiner Lage B in Folge der eingetretenen Bewegung im Verlaufe der Zeit . . $= t$ bis nach m gekommen; sei ferner der von B mittlerweile zurückgelegte Weg, nämlich die erzeugte Längenveränderung Bm . . $= \Delta l$, und der sich in diesem Augenblicke einstellende Widerstand pr. □'' Querschnitt . . $= k$, so wird man nunmehr während des unendlich kleinen Zeitzuwachses . . . . $= dt$ die Vermehrung der Längenveränderung mn . . . . $= d.\Delta l$, so wie das Wachsen des Widerstandes pr. □'' Querschnitt $= dk$ zu setzen, und sofort anzunehmen haben, dass diese Veränderungen

Fig. 13.

bis zum Stillstand der Bewegung fortschreiten, wo sodann das freie Ende des Prismas *B* in's Gleichgewicht gelangt sein wird. Uebrigens hat man auch hier die Bemerkung sich gegenwärtig zu halten, dass positive Werthe von Δl Ausdehnungen, und negative Werthe Zusammendrückungen repräsentiren.

Aus Ursache der vorhin bemerkten Veränderlichkeit der Grössen k und Δl muss man zur Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes während der Zeit t zunächst auf das unendlich kleine Moment Rüksicht nehmen, welches nämlich von dem Widerstande k während des Zeitelementes dt in's Leben gerufen wird. Diess letztere ist aber offenbar das Product aus k und dem während der Zeit dt zurückgelegten Weg $d.\Delta l$, also $dW = k.d\Delta l$, wenn das fragliche Widerstandsmoment während der Zeit t mit W, daher der unendlich kleine Zuwachs desselben mit dW bezeichnet wird.

Es ist nun nach §. 10 $\Delta l = vl$, daher auch $dW = lkdv$ und sofort durch Integration

$$W = l\int_o^v kdv,$$

indem o und v die Gränzen für die Veränderung in der t Zeit sind.

Das Resultat $W = l\int_o^v kdv$ kann graphisch dargestellt werden. Da nämlich k den Widerstand gegen die Längenveränderung $v = \frac{\Delta l}{l}$ bezeichnet, so lässt sich die mittelst Fig. 2 erörterte Anschauungsweise im §. 11 vortheilhaft benützen. Nur wähle man zu diesem Zwecke Fig. 14 VV' als die Axe der Abscissen, und KK' als die der Ordinaten, so dass man für einen beliebig gewählten Punct M der Curve $O\mu = v$ und $M\mu = k$ hat.

Man wird nunmehr ohne Schwierigkeit erkennen, dass

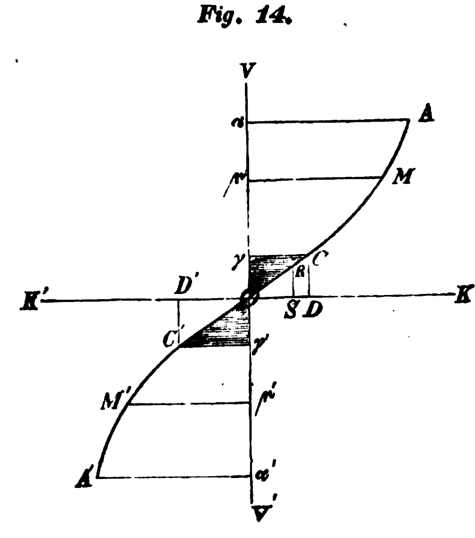
$$\int_o^v kdv = Area\ OM\mu \text{ ist,}$$

und daher, wenn diese *Area* mit f bezeichnet wird, der vorgefundene Ausdruck für das mechanische Moment des Widerstandes auf die ganz einfache Form

$$W = lf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

gebracht werden kann, die sich zur übersichtlichen und vergleichenden Darstellung vorzüglich eignet.

Fig. 14.



Selbstverständlich ist dieses mechanische Moment mit Rücksicht auf die nach §. 8 zu Grunde gelegten Einheiten mit Zoll-Zentner zu benennen, wie diess auch in der That der Ausdruck (13) zeigt, wo l eine Längendimension in Zollen ist, f aber nichts anders als ein Product aus einer in Zentnern ausgedrückten Kraft und einer absoluten Verhältnisszahl vorstellt.

Die Gleichung (12) lehrt, dass das mechanische Moment des Widerstandes, welcher sich der Längenveränderung (z. B. Verlängerung $O\mu$, Verkürzung $O\mu'$) entgegensetzt, durch das Product aus der Länge l des Prismas, und der mit f bezeichneten Fläche gemessen wird, welche mit eben dieser Längenveränderung correspondirt. (Beispielweise *Area* $OM\mu$, $OM'\mu'$.)

Da übrigens der Werth von W in der Formel (13) sich auf die Quadrateinheit des Querschnittes q bezieht, so hat man mit diesem letzteren noch das Resultat zu multipliciren, wenn man das Widerstandsmoment für den ganzen Querschnitt des Prismas erhalten will.

Wäre z. B. eine schmiedeeiserne Stange von 3° Länge und 5 □'' Querschnitt durch einen Stoss um den 1000sten Theil verlängert worden, und dabei bekannt, dass für diesen Werth von $v = O\mu = \frac{1}{1000}$ der dazu gehörige Flächenraum etwa $f =$ *Area* $OM\mu = \frac{1}{6}$ sei, so würde sich das entwickelte Widerstandsmoment mit $W = lf = 3 \times 72 \times \frac{1}{6} = 36$ Zoll-Zentner für einen Quadratzoll-Querschnitt,

und sofort wegen $q = 5$ mit $qW = 180$ Zoll-Zentner für den ganzen Querschnitt berechnen, und hieraus auf die Intensität des Stosses geschlossen werden können, indem man beachtet, dass das mechanische Moment desselben eben so gross sein müsse. Drückt man nämlich diese Stosswirkung durch das Product Ph aus, wo P ein Gewicht bedeutet, welches sich im Augenblicke des Stosses mit einer Geschwindigkeit bewegt, zu welcher die Geschwindigkeitshöhe h gehört, so hätte man in dem betrachteten Falle wegen $Ph = qW$ für das betreffende Stossgewicht allgemein $P = \frac{qW}{h}$, also, wenn dasselbe im Augenblicke des Stosses etwa 10″ hoch gefallen wäre, wegen $qW = 180$ und $h = 10''$ speciell $P = 18$ Zentner. Dieses Resultat heisst mit Worten, dass die gegebene Stange, wenn von ihrem eigenen Gewichte abgesehen würde, durch den Stoss eines 10″ hoch frei gefallenen Gewichtes von 18 Zentnern einer totalen Ausdehnung von $\frac{1}{1000}$ der Länge unterworfen wäre.

§. 33.

Besondere Resultate. Wird sich der Inhalt der §§. 31 und 32 gegenwärtig gehalten, so kann man folgende besondere Resultate für die Widerstandsmomente zur Kenntniss nehmen:

1. Das mechanische Moment des Widerstandes gegen Zerreissen, also das grösstmöglichste gegen Ausdehnung*), ist der Fläche $OA\alpha$ proportional. Es werde diese Fläche mit f_A und das fragliche Moment mit W_A bezeichnet, so dass $W_A = lf_A$ ist.

Das gleichnamige Moment gegen Zerquetschen, also das grösstmöglichste gegen Zusammendrückung**) ist eben so der Fläche $OA'\alpha'$ proportionirt. Unter Beibehaltung der gewählten symbolischen Bezeichnung hat man daher analog $W_R = lf_R$.

2. Das grösste zulässige Widerstandsmoment, also bis zu den Elasticitätsgränzen***), ist für die Ausdehnung dem $\Delta OC\gamma$ und für die Zusammendrückung dem

---

*) Nach Poncelet auch lebhafter Widertsand gegen Zerreissen genannt.

**) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand gegen Zerquetschen genannt.

***) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand der Elasticität genannt.

$\Delta\, O\, C'\gamma'$ proportionirt. Nach §. 13 können diese Dreiecke als geradlinig, und daher den beiden benachbarten Dreiecken OCD und $OC'D'$ als äquivalent gelten. Setzt man $OCD = f_a$ und $OC'D' = f_r$, und bezeichnet die bezüglichen Widerstandsmomente mit W_a und W_r, so hat man wegen $f_a = \frac{1}{2} a\, \delta_a = \frac{a^2}{2m}$ und $f_r = \frac{1}{2} r\, \delta_r = \frac{r^2}{2m}$ einerseits

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für die Ausdehnung} \ldots\ldots & W_a = \dfrac{a^2 l}{2m} \\ \text{und andererseits für die Zusammendrückung} \ldots\ldots & W_r = \dfrac{r^2 l}{2m} \end{array}\right\} \ldots \quad (14)$$

als diejenigen Widerstandsmomente, welche das Prisma pr. □'' Querschnitt ohne Gefahr für seinen Bestand entwickeln kann.

Zugleich bemerkt man, dass in diesem Falle die Relation

$$W_a : W_r = a^2 : r^2 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

stattfindet, und ausserdem die beiden Widerstandsmomente für den ganzen Querschnitt q des Prismas dem Producte ql oder dem Körperinhalte proportionirt sind.

Es werden daher prismatische Körper von verschiedenen Längen und Querschnitten unter sonst gleichen Umständen dennoch gleiche mechanische Widerstandsmomente entwickeln, wenn nur der Körperraum der Prismen derselbe ist. Selbstverständlich müssen sich hiebei vorzüglich die Bedingungen der vollkommenen Homogenität der Materie, und der gleichmässigen Verbreitung der Anspruchsnahme über den Querschnitt der Prismen gegenwärtig gehalten werden. Allerdings werden diese Bedingungen desto schwieriger zu erfüllen sein, je grösser und unregelmässiger ein Querschnitt ist, und aus diesem Grunde werden sich für die Genauigkeit der obigen Regel in der Praxis gewisse Gränzen ergeben, welche bei den betreffenden Schlussfolgerungen stets zu beachten sind.

3. Wird durch die erzeugte Wirkung die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung nicht überschritten, und der hervorgerufene Widerstand pr. □'' mit k bezeichnet, so ist die dazu gehörige Fläche entweder ORS oder $OR'S'$ Fig. 2 mit $f = \frac{1}{2} k\, v$ anzunehmen, und sofort wegen $v = \frac{k}{m}$ das betreffende Widerstandsmoment aus der Gleichung $W = \frac{k^2 l}{2m}$ $\ldots\ldots$ (16)

zu berechnen. Offenbar wird sodann für $k = a$, $W = W_a$ und für $k = r$, $W = W_r$.

4. Wird auch dermalen auf die mehr oder minder günstigen Umstände, welche das Widerstandsmoment begleiten, in so ferne Rücksicht zu nehmen sein, als es offenbar nicht gleichgiltig ist, ob z. B. Stösse kürzere oder längere Zeit anhalten, ob sie periodisch wiederkehren, u. s. w., und als jedenfalls die anfängliche Sicherheit im Laufe der Zeit durch chemische Processe gefährdet werden kann. Sind nämlich die behufs der anfänglichen Sicherheit angenommenen Grössen a, r und m, daher die bezüglichen grössten zulässigen Widerstandsmomente W_a und W_r, und seien sodann die unter ungünstigen Umständen anzunehmenden Grössen a' r' und m', daher die analogen Widerstandsmomente $W_{a'}$ und $W_{r'}$, so hat man nach den Gleichungen (14)

$$\left.\begin{aligned} W_a : W_{a'} &= \frac{a^2}{m} : \frac{a'^2}{m'} \\ \text{und} \quad W_r : W_{r'} &= \frac{r^2}{m} : \frac{r'^2}{m'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Nachdem nun mit der Vermehrung der ungünstigen Umstände im Allgemeinen die Grössen a und r sich bedeutender, als der Modul m, vermindern, so ergibt sich, dass auch die anfänglichen Widerstandsmomente W_a und W_r im Laufe der Zeit eine namhafte Reduction erfahren können. Wäre etwa $a' = \frac{1}{2} a$, $r' = \frac{1}{2} r$ und $m' = \frac{7}{8} m$, so hätte man im Sinne der Relation (17)

$$W_a : W_{a'} = W_r : W_{r'} = 3\tfrac{1}{2} : 1.$$

Hieraus geht zugleich hervor, wie vorsichtig man bei der Beurtheilung einer Stosswirkung sein müsse.

§. 34.

Schmiedeeisen. Legt man die aus Versuchen abgeleitete und im §. 18 besprochene Curve, welche den totalen Längenveränderungen für das Schmiedeeisen entspricht, zu Grunde, so hat man zunächst zu bemerken, dass, nachdem sich der Modul m mit der Qualität der Materie innerhalb der Elasticitätsgränzen nur wenig, ausserhalb derselben aber bedeutend verändert, auch ein ähnliches Verhalten hinsichtlich der Widerstandsmomente innerhalb und ausserhalb der erwähnten Gränzen zu erwarten sei.

In der That hat man nach einer Mittheilung des französischen Generalen Morin aus den von Bornet und Ardant angestellten Versuchen

1. für sehr weiches dehnbares Eisen

$$f_A = 55{\cdot}8 \text{ und } f_a = 0{\cdot}085,$$

2. für hartes ausgeglühtes Eisen

$$f_A = 6{\cdot}2 \text{ und } f_a = 0{\cdot}082 \text{ und}$$

3. für hartes nicht ausgeglühtes Eisen

$$f_A = 8{\cdot}4 \text{ und } f_a = 0{\cdot}073$$

gefunden, wonach sich die betreffenden Widerstandsmomente mit

$$\text{ad 1. } W_A = 55{\cdot}8\, l \text{ und } W_a = 0{\cdot}085\, l,$$
$$\text{ad 2. } W_A = 6{\cdot}4\, l \text{ und } W_a = 0{\cdot}082\, l$$
$$\text{und ad 3. } W_A = 8{\cdot}4\, l \text{ und } W_a = 0{\cdot}073\, l$$

berechnen*), und das gegenseitige Verhältniss $W_A : W_a$ sich beziehungsweise mit 656 : 1, 78 : 1 und 114 : 1 herausstellt.

Aus diesen Resultaten ist zu ersehen, dass das bis zur Elasticitätsgränze für die Ausdehnung entwickelte Widerstandsmoment *ungeachtet der so sehr verschieden gewählten Eisensorten* von dem durchschnittlichen Werthe 0·08 l nicht bedeutend abweicht, während das Widerstandsmoment gegen Zerreissen wesentlich verschieden ausgefallen ist, indem dasselbe bei dem harten Eisen nur 78- und respective 114mal, bei dem weichen Eisen aber sogar 656mal grösser gefunden worden ist, als das ersterwähnte Moment bis zur correspondirenden Elasticitätsgränze.

Wenn daher das harte Eisen im Vergleiche zu dem weichen einerseits den Vortheil einer grösseren Widerstandsfähigkeit darbietet, so ist anderseits wieder der Nachtheil vorhanden, dass das erstere unter der Wirkung eines Stosses leichter zerreisst als das letztere. Diese Wahrnehmung ist für die Praxis vorzüglich wichtig, denn obgleich es sich daselbst nicht um das Zerreissen, sondern vielmehr um das Einhalten der Elasticitätsgränze handelt, so muss doch die Besorgniss als gegründet erkannt werden, dass das Schmiedeeisen im Verlaufe der Zeit durch die Einwirkung von Stössen desto eher Schaden nehmen könne, je grösser die Härte desselben ist, indem nämlich der von Seite

*) Diese Zahlen sind im Sinne des §. 8 auf Wiener Mass und Gewicht reducirt.

des Widerstandsmomentes zu durchlaufende Spielraum bis zum Zerreissen mit der Zunahme der Härte kleiner wird, und daher der Zeitpunct der Zerstörung bei der harten Eisengattung näher anzunehmen ist, als bei der weichen Qualität.

Der vorher angegebene Durchschnitt für das Widerstandsmoment bis zur Elasticitätsgränze bezüglich der Ausdehnung $W_a = 0{\cdot}08\,l$ correspondirt übrigens ganz gut mit den betreffenden Mittelwerthen im §. 18. Indem nämlich daselbst $a = 200$; $m = 250{,}000$ und $\delta_a = \frac{a}{m} = \frac{1}{1250}$ angegeben ist, so erhält man für die Fläche

$$f_a = \tfrac{1}{2}\,a\,\delta_a = \frac{a^2}{2m} = 0{\cdot}08,$$

und sofort $W_a = 0{\cdot}08\,l$, also übereinstimmend mit dem aus jenen vorcitirten Versuchen entzifferten Durchschnitt.

Es erübrigt nur noch beizufügen, dass bei dem Schmiedeeisen, wegen $a = r$, das Widerstandsmoment bis zur Elasticitätsgränze für die Zusammendrückung eben so gross, wie für die Ausdehnung anzunehmen sei, und demgemäss durchschnittlich

$$W_a = W_r = \frac{a^2\,l}{2m} = \frac{r^2\,l}{2m} = 0{\cdot}08\,l \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

gesetzt werden könne.

Es ist klar, dass die gefundenen Werthe der Widerstandsmomente desto mehr zu reduciren sein werden, je ungünstiger sich die Umstände gestalten. Mit Rücksicht auf den §. 33 wird man erkennen, dass diese Reduction in den meisten Fällen wenigstens bis auf die Hälfte gehen werde, was mit den Angaben Poncelet's nahe genug übereinstimmt.

§. 35.

Eisenblech. Eisendraht. Für diese Materialien gilt nach §. 20 im Allgemeinen das im vorigen §. Angegebene. Benützt man zur Auffindung der grössten zulässigen Widerstandsmomente die in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten Mittelwerthe, so erhält man im Durchschnitt zur Beurtheilung der anfänglichen Sicherheit gegen eine Stosswirkung

1. für Eisenblech wegen $a = r = 180$ und $m = 220{,}000$

$$W_a = W_r = 0{\cdot}0736\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und

2. für **Eisendraht** wegen $a = 320$ und $m = 250,000$

$$W_a = 0{\cdot}2048\, l \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Hieraus geht hervor, dass der Draht eine verhältnissmässig grosse Fähigkeit besitzt, Stössen zu widerstehen.

§. 36.

Gusseisen. Für Gusseisen kann mit Beziehung auf die im §. 21 besprochene Curve AA' (Fig. 7) und die daselbst angegebenen Mittelwerthe im Durchschnitt zur Richtschnur dienen:

1. dass das mechanische Widerstandsmoment gegen Zerreissen bei der mit $f_A = 0{\cdot}154$ anzunehmenden *Area* $OA\alpha$ (Fig. 14) sofort $W_A = 0{\cdot}154\, l$ werde;

2. dass die Widerstandsmomente bis zu Elasticitätsgränze einerseits für die Ausdehnung, anderseits für die Zusammendrückung wegen $a=80$, $r = 160$ und 125,000 nach Massgabe der Gleichungen (14) sich mit

$$\left.\begin{aligned} W_a &= \frac{a^2 l}{m} = 0{\cdot}0256\, l \\ \text{und} \quad W_r &= \frac{r^2 l}{2m} = 0{\cdot}1024\, l \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

berechnen, und

3. dass demgemäss das beiläufige Verhältniss $W_A : W_a = 6 : 1$, so wie in Uebereinstimmung mit der Relation (15) das weitere Verhältniss

$$W_a : W_r = 1 : 4 \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

resultire. **Durch diese Ergebnisse werden die bekannten Erfahrungen erklärt, wonach das Gusseisen gegen die Einwirkung von Stössen im Sinne der Ausdehnung wenig Sicherheit gewährt, während dessen Fähigkeit, der Wirkung von Stössen im Sinne der Zusammendrückung zu widerstehen, im Verhältniss bedeutend grösser ist.**

Uebrigens wird sich ebenfalls mit der Vermehrung von ungünstigen Umständen die Sicherheit vermindern, ohne dass jedoch hierüber etwas Verlässliches bekannt wäre.

§. 37.

Holz. Beschränkt man sich in Hinblick auf den §. 22 auf die Erörterung des mechanischen Widerstandsmomentes ohne Ueberschrei-

tung der Elasticitätsgränzen, so hat man durchschnittlich für Holzmaterialien (ausschliesslich Eichenholz) wegen $r = \frac{3}{4} a$ in Folge der Relation (15) im §. 33

$$\left.\begin{array}{l} W_a : W_r = a^2 : r^2 = 16 : 9 \\ \text{für Eichenholz aber} \quad = 36 : 25 \end{array}\right\} \ldots \ldots \quad (23),$$

wonach also die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung durch eine bedeutend grössere Stosswirkung, als für die Zusammendrückung erreicht würde.

Legt man ferner die in der Tabelle des §. 23 zusammengestellten Werthe zu Grunde, so hat man hinsichtlich der anfänglichen Sicherheit durchschnittlich

$$\left.\begin{array}{llll} \text{1. für Tannenholz} & W_a = 0{\cdot}032\, l & \text{und} & W_r = 0{\cdot}018\, l \\ \text{2. „ Fichtenholz} & W_a = 0{\cdot}026\, l & „ & W_r = 0{\cdot}015\, l \\ \text{3. „ Kieferholz} & W_a = 0{\cdot}040\, l & „ & W_r = 0{\cdot}028\, l \\ \text{4. „ Lärchenholz} & W_a = 0{\cdot}050\, l & „ & W_r = 0{\cdot}026\, l \\ \text{und 5. „ Eichenholz} & W_a = 0{\cdot}034\, l & „ & W_r = 0{\cdot}024\, l \end{array}\right\} (24)$$

Für eine mehr oder minder andauernde Sicherheit werden diese Werthe nach Massgabe der Umstände einer grösseren oder geringeren Reduction unterliegen, die sich nach den betreffenden Werthen von a, r und m ergeben wird, und begreiflicher Weise sehr bedeutend ausfallen kann. In Erwägung des §. 33 wird man in der Ausübung nicht selten nur den 10ten Theil der angeführten Werthe annehmen dürfen, was mit den Angaben Tredgold's und Barlow's übereinstimmt.

§. 38.

Vergleich zwischen Schmiedeeisen, Gusseisen und Holz. Der Vergleich zwischen diesen Materialien hinsichtlich der grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomente kann sowohl ziffermässig als graphisch durchgeführt werden.

Zum Behufe der ziffermässigen Darstellung hat man nämlich nur die Gleichungen (18), (21) und (24) zu benützen.

Wird hiebei als zu vergleichende Holzgattung Tannenholz gewählt, so bekäme man folgende Relation:

$$\underbrace{W_a : W_r}_{\text{Schmiedeeisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Gusseisen}} : \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Holz}}$$

$$= 0{\cdot}08 : 0{\cdot}08 : 0{\cdot}0256 : 0{\cdot}1024 : 0{\cdot}032 : 0{\cdot}018$$

$$= 1 : 1 : 0{\cdot}32 : 1{\cdot}28 : 0{\cdot}4 : 0{\cdot}225$$

Zum Behufe der graphischen Vergleichung kann die Figur 8 ad §. 24 dienen. Man erinnere sich nämlich, dass nach §. 33 die fraglichen Widerstandsmomente sich gerade so, wie die in jener Figur ersichtlich gemachten correspondirenden Dreiecke — ihrem Flächenraume nach — verhalten müssen.

Dieser Bemerkung gemäss erhält man sofort

$$\underbrace{W_a : W_r}_{\text{Schmiedeeisen}} \quad : \quad \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Gusseisen}} \quad : \quad \underbrace{W_a : W_r}_{\text{Holz}}$$

$$= \triangle OC_1D_1 : \triangle OC'_1D'_1 : \triangle OC_2D_2 : \triangle OC'_2D'_2 : \triangle OC_3D_3 : \triangle OC'_3D'_3$$

Hienach kann, abgesehen von ungünstigen Umständen und in der Ueberzeugung, dass die Wahl einer der anderen Holzgattungen anstatt Tannenholz die Hauptsache nicht wesentlich beirre, als durchschnittliches Ergebniss für die zu vergleichen beabsichtigten Materialien gelten:

1. dass das Gusseisen die kleinste und das Schmiedeeisen die grösste Fähigkeit besitze, einem Stosse im Sinne der Ausdehnung zu widerstehen, das Holz aber in der fraglichen Beziehung nur wenig vortheilhafter, als das Gusseisen sei; und

2. dass bei einem Stosse im Sinne der Zusammendrückung das Holz die kleinste und das Gusseisen die grösste sichere Gegenwirkung entwickeln könne, welch' letztere indess die des Schmiedeeisens nicht viel übertrifft.

§. 39.

Besondere Bemerkungen. Die in diesem Kapitel gegebenen Resultate dürfen in Hinblick auf den §. 17 nicht einseitig betrachtet, und nicht ohne Weiters auf practische Fälle übertragen werden, indem die Qualität der Materie, so wie die Richtung und Vertheilung des Stosses wohl in Erwägung zu ziehen, und die hienach entstehenden im §. 33 erwähnten Gränzen für die Grösse und Gestalt des Körperquerschnittes einzuhalten sid, überdiess aber die von den jeweiligen ungünstigen Umständen im Laufe der Zeit zu besorgenden Nachtheile sorgfältig abzuschätzen kommen, um die danach nöthig erachtete Reducirung der berechneten anfänglichen Widerstandsmomente vornehmen zu können. Man kann sich bei dieser

Gelegenheit keineswegs verhehlen, dass solchen Abschätzungen zuweilen unübersteiglich scheinende Hindernisse in den Weg treten, zumal man überhaupt nur wenige Erfahrungen aufweisen kann, die einige Anhaltspuncte zu bieten gestatten. Vorzüglich ist dieses der Fall, wenn es sich um die Beurtheilung langandauernder Stosswirkungen handelt. Es ist daher in der fraglichen Beziehung noch manche Belehrung durch die Erfahrung zu erwarten.

Anmerkung 1. In Betreff vollkommen elastischer Körper. So wie nach dem im 1. Kapitel befolgten Wege die den speciellen Materialien entsprechenden Curven erfahrungsgemäss abgeleitet, und hieran die Erörterungen über das Verhalten der Materialien gegen eine Längenveränderung geknüpft worden sind, so könnte auch umgekehrt aus der Kenntniss dieses Verhaltens die Gestalt der betreffenden Curven aufgefunden werden. Durch diese Bemerkung wird man unmittelbar auf die Frage geleitet, von welcher Beschaffenheit wohl die Curven sein mögen, die vollkommen elastischen Körpern entsprechen würden. Es leuchtet ein, dass in diesem Falle nur von den totalen Längenveränderungen die Rede sein könne. Im Folgenden soll ein Versuch gemacht werden, um in die Beantwortung der angeregten Frage etwas näher einzugehen. Zuerst kann man behaupten, dass die betreffenden Curven, wie sie auch gestaltet sein mögen, doch niemals vollkommen geradlinig sein können, weil sonst bei der steten Zunahme der Ausdehnung und Zusammendrückung mit den bezüglichen Kräften die Unmöglichkeit zugegeben werden müsste, dass das Prisma mittelst einer endlichen Kraft um seine ganze Länge, und bei Vergrösserung dieser Kraft sogar noch mehr verkürzt werden könnte. Daraus geht unmittelbar hervor, dass die Proportionalität der Ausdehnungen und Zusammendrückungen mit den correspondirenden Spannungen und Pressungen keineswegs, wie es ohne diese Betrachtung scheinen mag, das Gesetz für vollkommen elastische Körper sein könne, sondern für dieselben vielmehr ein anderes Gesetz vorhanden sein müsse. Gleichwohl wird zugegeben, dass dasselbe innerhalb gewisser und vielleicht sehr weiter Gränzen jene Proportionalität annäherungsweise in sich enthalten könne.

Zum Behufe der beabsichtigten Untersuchung sei die Länge des in Betracht stehenden Prismas . . . . = l,
die Anspruchsnahme, welche durch eine als Spannung oder Pressung wirkende Kraft per. □" Querschnitt hervorgerufen wird . . = k
und die correspondirende Längenveränderung (Ausdehnung oder Zusammendrückung) . . . . = Δl;

es entstehe ferner eine unendlich kleine Vermehrung der Kraft k um . . . . dk
und hiedurch eine unendlich kleine Vermehrung der Längenveränderung um . . . . $d.\Delta l$.

In dem Augenblicke, als k die Vergrösserung dk erfährt, beträgt die Länge des Prismas $l+\Delta l$. Da nun im nächsten Augenblicke die Längenveränderung um $d.\Delta l$ vermehrt wird, so zeigt der Quotient $\frac{d.\Delta l}{l+\Delta l}$ offenbar an, den wie vielten Theil von der unmittelbar zuvor bestandenen Länge die neue Veränderung betrage.

Würde der ursprüngliche Zustand des Materiales im Augenblicke der Betrachtung noch unverändert vorhanden sein, so könnte man sich erlauben, den vorerwähnten Quotienten lediglich als proportional mit dk anzunehmen, und demgemäss die Gleichung

$$\frac{d.\Delta l}{l+\Delta l}=\frac{dk}{m}$$

aufzustellen, in welcher m eine constante und nur von dem Materiale abhängige Grösse zu bezeichnen hätte. Da aber im Augenblicke der Betrachtung, wo bereits die Längenveränderung Δl erzeugt ist, der Zustand des Materiales nicht mehr dem ursprünglichen gleich gehalten werden kann, so wird man im Allgemeinen nicht berechtigt sein, m als constant, sondern vielmehr als variabel mit k anzusehen. Behält man nun die Bezeichnung im §. 10 $\frac{\Delta l}{l}=v$ bei, so geht die obige Gleichung wegen $\Delta l=vl$ und $d.\Delta l=ldv$ in die Relation

$$\frac{dv}{1+v}=\frac{dk}{m}$$

über, welche man nach dieser Anschauungsweise in der besprochenen Hinsicht für vollkommen elastische Körper annehmen könnte.

Diese Relation integrirt gibt $log.\ nat.\ (1+v)=\int\frac{dk}{m}$ und sofort $1+v=e^{\int\frac{dk}{m}}$, oder endlich

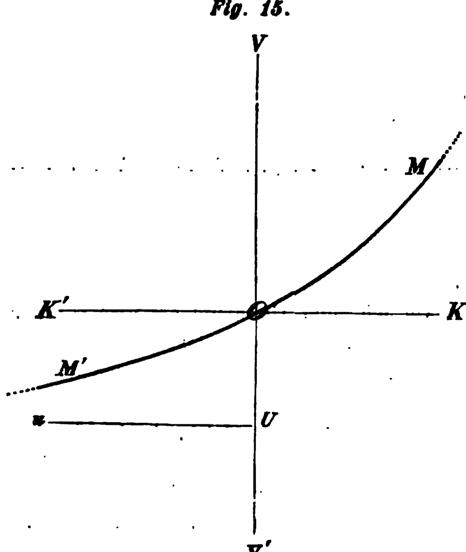
$$v=e^{\int\frac{dk}{m}}-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wenn $e=2{\cdot}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die Gleichung (25) bleibt offenbar in so lange unbestimmt, als nicht die Abhängigkeit zwischen k und m bekannt ist. Es kann hier um so weniger verlangt werden, diese Abhängigkeit näher anzugeben, als es scheint, dass dieselbe durch die alleinige Eigenschaft der vollkommenen Elasticität der Materie nicht vollständig bestimmt sei. Wie übrigens diese Abhängigkeit auch sein mag, so lässt sich doch mit Rücksicht auf die graphische Dar-

stellung der Gleichung (25) mittelst einer Curve im Geiste des §. 11 Folgendes behaupten:

1. Da v und k gleichzeitig verschwinden, positiv oder negativ werden, überdiess aber mit einander wachsen müssen, so wird $\int \frac{dk}{m}$ zugleich mit v Null, positiv oder negativ, und es hat die bezügliche Curve Fig. 15 gleichfalls die im §. 11 ad 1 erwähnten Eigenschaften.

Fig. 15.



2. Wird zu Grunde gelegt, dass bei einem vollständig elastischen Körper die Längenveränderungen ohne Ende zunehmen würden, so gelangt man zu der Ueberzeugung, dass die beiden auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Curvenäste OM und OM' sich bis in's Unendliche erstrecken, wobei übrigens nur für $k = +\infty$ ebenfalls $v = +\infty$ werden könne, hingegen für $k = -\infty$ $v = -1$ werden müsse, weil unter dieser Annahme die Zusammendrückung gleich der ganzen Länge zu setzen wäre. Aus dieser Ursache muss für $k = \pm\infty$ gleichfalls $\int \frac{dk}{m} = \pm\infty$ werden, und die fragliche Curve auf der Seite der negativen Coordinaten eine Assymtote Uu besitzen, welche in der Entfernung $OU = 1$ von der Abscissenaxe mit dieser letzteren parallel läuft.

3. Drückt man die in der Gleichung (25) vorkommende Exponentialgrösse mittelst einer Reihe aus, so erhält man

$$v = \int \frac{dk}{m} + \frac{1}{1.2}\left(\int \frac{dk}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\int \frac{dk}{m}\right)^3 + \ldots,$$

woraus in Uebereinstimmung mit §. 11 ad 3 hervorgeht, dass — weil für sehr kleine Werthe von v nahezu m constant sein wird — sodann wie im §. 13 die genäherte Relation $v = \frac{k}{m}$ entstehen, und demnach die Proportionalität zwischen den Längenveränderungen v und den betreffenden Kräften k desto mehr vorhanden sein werde, je kleiner diese Grössen selbst sind.

Für den Fall, als man m als constant betrachten wollte, ginge die Gleichung (25) in $v = e^{\frac{k}{m}} - 1$

$$= \frac{k}{m} + \frac{1}{1.2}\frac{k^2}{m^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{k^3}{m^3} + \ldots$$

oder auch in $\frac{k}{m} = log.\ nat.\ (1 + v)$ über, wo sodann die Curve selbst die sogenannte Logistik repräsentiren würde. Es wäre bei dieser Curve für $v = +1$, $k = m\ log.\ nat.\ 2$, und für $v = -\frac{1}{2}$, $k = -m\ log.\ nat.\ 2$, und daraus zu folgern, dass unter der angenommenen Bedingung das Prisma mit derselben Kraft auf die halbe Länge zusammengedrückt werden könnte, mit welcher man dasselbe um die ganze Länge auszudehnen im Stande wäre. Die hiezu nöthige Kraft hätte man mit $m\ log.\ nat.\ 2 = 0\text{·}693147\ldots m$ anzunehmen.

Anmerkung 2. In dem vorstehenden Abschnitte hat man bei der Zusammendrückung stets die Bedingung festgehalten, dass die Längenaxe des Prismas keine Ausbiegung erleide. Diese Bedingung kann jedoch nur annäherungsweise erfüllt werden, wenn die Länge des Prismas im Vergleiche zu den Querschnittsdimensionen nicht zu gross ist, in der Qualität des Materiales an den einzelnen Stellen keine wesentliche Verschiedenheit stattfindet, und endlich die einwirkende Pressung sich über den ganzen Querschnitt mit hinreichender Genauigkeit gleichförmig vertheilt. Es wird daher in einem gegebenen Falle eine gewisse Gränze für die grösste Länge des Prismas sich ergeben, welche nicht überschritten werden darf, wenn ein Ausbiegen desselben vermieden werden soll. Diese Gränze hängt von mehreren Umständen ab. Vorzüglich kann man die zulässige Länge vermehren, wenn man das Prisma nicht frei stehen lässt, sondern künstliche Vorrichtungen zur Verhinderung der Biegung in Anwendung bringt. So z. B. hat Hodgkinson bei seinen Versuchen über die Zusammendrückung die Länge von gusseisernen Stangen mit 1 engl. □" Querschnitt sogar bis auf 10 engl. Fuss treiben können. Diese Stangen befanden sich jedoch in einem eisernen Gestelle, welches das Biegen derselben verhinderte. Auch mussten sie geschmiert werden, um die Seitenreibung in den Führungen möglichst zu beseitigen. Allein auch in diesem Falle darf man die Pressung nicht zu gross werden lassen. Wenn nämlich dieselbe die Elasticitätsgränze schon merklich überschritten hat, und sofort bis zum Zerquetschen gesteigert wird, so müssen die Stücke, wenn sie sich nicht ausbiegen sollen, desto kürzer sein, je grösser die Pressung ist, so dass man am Ende der Würfelform ziemlich nahe rückt. Bei so kurzen Stücken tritt sodann der Uebelstand ein, dass die Zusammendrückungen nicht mehr mit Verlässlichkeit sich erheben

lassen. Dadurch erklärt es sich, warum die auf das Verhalten der Materialien gegen Zusammendrückung Bezug nehmenden Curven und die hieran geknüpften Eigenschaften bloss für Pressungen, welche die Elasticitätsgränze nicht oder nur wenig überschreiten, angegeben werden konnten, während die Kenntniss über das weitere Verhalten bis zum Zerquetschen mangelhaft bleiben musste, und nur der Widerstand gegen das Zerquetschen selbst nach den Experimenten mit kurzen Stücken angeführt worden ist. Diese Resultate sind indess zur Feststellung der Ansicht über den Widerstand gegen Zusammendrückung im eigentlichen Sinne genügend, da es sich in der Anwendung ohnehin um das Ueberschreiten der Elasticitätsgränze nicht handelt. Was übrigens den Fall betrifft, wenn durch die Pressung eines Prismas in der Richtung seiner Länge eine Ausbiegung desselben erfolgt, so handelt es sich sodann nicht mehr allein um den Widerstand gegen Zusammendrückung in dem vorigen Sinne, sondern auch um die gleichzeitige Berücksichtigung der Wirkung der Biegung. Die Erörterung dieses Falles ist dem 3. Kapitel des 3. Abschnittes im 2. Hauptstücke vorbehalten.

Zweiter Abschnitt.

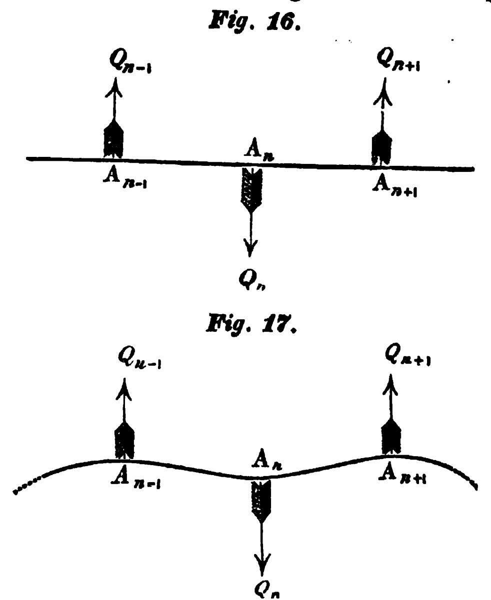
Biegung.

Erstes Kapitel.

Widerstand gegen Biegung.

§. 40.

Erklärung. Wird Fig. 16 ein Prisma aus homogenem Materiale von einer beliebigen Anzahl Kräfte Q_1, Q_2, Q_3,... Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1},... Q_N in Anspruch genommen, welche sämmtlich in einer Ebene liegen und senkrecht auf die Längenaxe gerichtet sind, so besteht, wie im §. 7 erwähnt, die Formveränderung des Prismas in einer Biegung, indem sodann Fig. 17 die Längenaxe eine krumme Linie wird. Der Widerstand, welcher sich der Biegung entgegensetzt, ist aus der Grösse derselben zu beurtheilen.



§. 41.

Hypothesen. Man stelle sich vor, dass das Prisma aus unendlich vielen Fasern zusammengesetzt sei, welche mit der Längen-

axe desselben parallel laufen, übrigens aber unter sich verbunden sind. Solche Fasern sind daher materielle Linien, die als Körperelemente auftreten. Die Zulässigkeit dieser Vorstellung unterliegt offenbar keinem Anstande. Man ist ferner, um die Untersuchung über das Verhalten des Prismas gegen Biegung anzubahnen, im Sinne der §§. 1 und 2 genöthigt, gewisse Hypothesen zu Grunde zu legen. Die Hypothesen, welche zur Erreichung einer genügenden Genauigkeit, wenigstens so lange, als durch die Anspruchsnahme die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, für den practischen Gebrauch als zulässig gelten können, sind folgende:

1. Die Fasern des Prismas sind auch nach der Biegung unter sich parallel, und bilden ebene Curven in der Richtung der einwirkenden Kräfte;

2. die Querschnitte des Prismas stehen vor und nach der Biegung senkrecht auf den Fasern, und werden in der Grösse und Form nicht verändert.

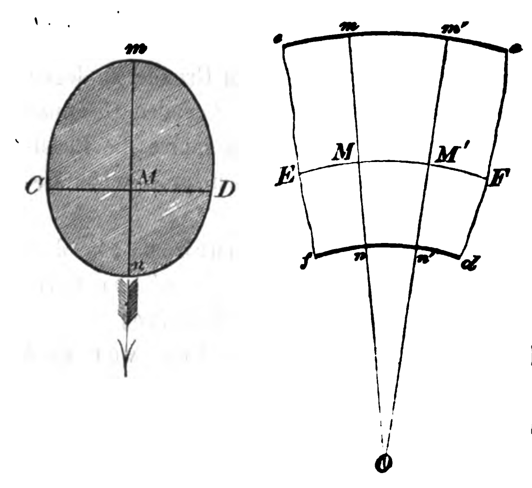
Diese Annahmen sind bisher von den Schriftstellern stets gemacht, obgleich nicht immer ausdrücklich erwähnt worden. Eine nähere analytische Untersuchung lehrt zwar, dass dieselben im Allgemeinen keineswegs genau vorhanden seien, und insbesondere bei verzerrten Querschnittsformen, sehr weichem Materiale und verhältnissmässig grosser Anspruchsnahme desselben eine nicht unwesentliche Veränderung erleiden können. In der Ueberzeugung jedoch, dass diese Umstände in der Praxis beinahe gar nie vorhanden sind, und daher die Benützung der angeregten Hypothesen in der Regel keinen wesentlichen Irrthum veranlassen kann, ist die Beibehaltung derselben als Annäherung zur Wahrheit um so mehr gestattet, als es sich in der Ausübung ohnehin nur um solche Anspruchsnahmen handelt, bei welchen die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

§. 42.

Neutrale Fasern. Neutrale Axe. Neutrale Schichte. Bezeichnen in Fig. 18 mn und $m'n'$ die Lagen zweier unendlich nahen Querschnitte nach der Biegung, welche ursprünglich zu einander parallel gewesen sind, gegenwärtig aber normal auf den gekrümmten Fasern stehen, so werden sich die beiden so gebildeten

Normalen in der Verlängerung *O* schneiden, welcher Durchschnitt als Centrum für die Krümmung der von den Fasern gebildeten

Fig. 18.



Curven zwischen den Querschnitten *mn* und *m'n'* anzusehen ist. Dieser Bemerkung gemäss haben die zwischen diesen Querschnitten gelegenen Fasern, welche ursprünglich gleiche Länge besassen, in Folge der Biegung verschiedene Längen bekommen, und da die Längenveränderungen sowohl Ausdehnungen, als auch Zusammendrückungen sein können, so muss im Allgemeinen angenommen werden, dass von jenen Fasern ein Theil gespannt und ein Theil zusammengepresst worden ist, wobei zugegeben wird, dass auch Fasern vorkommen werden, bei welchen weder das Eine noch das Andere geschehen sein mag. Eine solche Faser, etwa *MM'*, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt worden wäre, also vor und nach der Biegung dieselbe Länge hätte, nennt man eine neutrale Faser. Die Verbindung der sämmtlichen neutralen Fasern in einem Querschnitte, etwa *CD*, heisst sodann die neutrale Axe desselben, und die Verbindung der neutralen Axen der verschiedenen Querschnitte des Prismas, beispielweise *EF*, die neutrale Schichte dieses letzteren. Zufolge der im §. 41 aufgestellten Hypothesen ist man berechtigt, die neutrale Axe als gerade Linie senkrecht auf die Kraftrichtung, die neutrale Schichte aber als Cylinderfläche anzusehen. Es leuchtet jedoch ein, dass im Falle, als die Fasern nach der Biegung keine ebenen Curven wären, die neutrale Schichte in eine doppelt gekrümmte Fläche übergehen würde. Eben so muss zugegeben werden, dass zwischen den Querschnitten *mn* und *m'n'* möglicher Weise gar keine neutralen Fasern vorhanden sein könnten,

wenn nämlich der Bogen MM', dessen Länge die ursprüngliche Entfernung jener Querschnitte anzeigt, ausserhalb des prismatischen Körpers zu liegen käme, und gewissermassen nur einer imaginären Faser zugehörig wäre. Jedenfalls aber werden alle Fasern, welche zwischen der etwaigen neutralen Schichte und der convex gekrümmten Seite des Prismas liegen, ausgedehnt, während die übrigen vorhandenen Fasern eine Zusammendrückung erleiden. Hienach darf man die Lage der neutralen Axe in dem Querschnitte von der örtlichen Lage dieses letzteren nicht als unabhängig betrachten, daher es nicht gerechtfertigt wäre, die Neutralität der Fasern durch die ganze Länge des Prismas stets in einer und derselben Faserschichte anzunehmen.

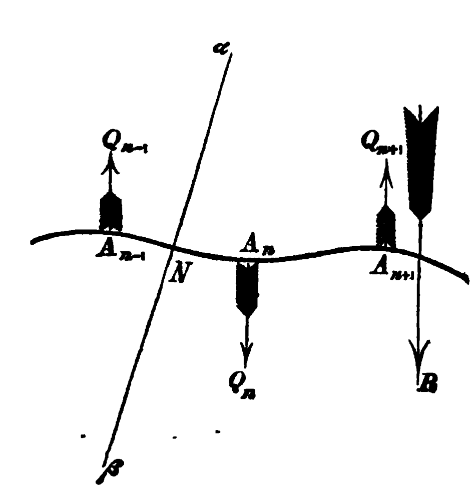
§. 43.

Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts. Statisches Kraftmoment. Statisches Widerstandsmoment. Um sogleich auf das Verhalten des in Anspruch genommenen Prismas (Fig. 16 und 17) überzugehen, beachte man, dass, wie auch die Biegung beschaffen sein mag, für das Gleichgewicht jedenfalls die Resultirende der gesammten einwirkenden Kräfte verschwinden, d. h.

$$\Sigma Q_N = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

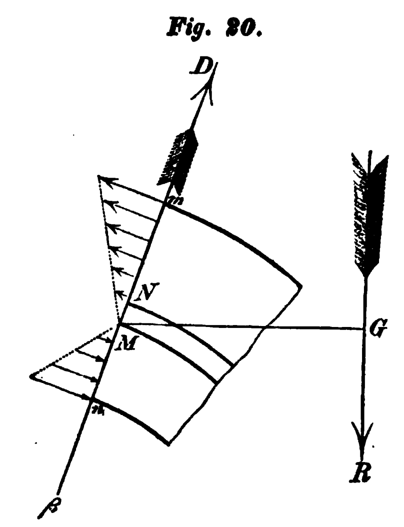
werden müsse, wobei ΣQ_N die Summe aus den Kräften Q_1, Q_2, Q_3,... Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1},... und Q_N im algebraischen Sinne bedeutet, daher etwaige entgegengesetzte Richtungen mit den entgegengesetzten Zeichen + und — anschaulich zu machen sind. In den Figuren möge die Richtung nach abwärts als die positive, daher die nach aufwärts als die negative gelten. Ausserdem aber muss nach vollendeter Biegung in jedem einzelnen Querschnitte des Prismas zwischen den in Betracht kommenden Kräften Gleichgewicht herrschen. Man betrachte daher Fig. 19 irgend einen Quer-


Fig. 19.



schnitt, etwa den durch die Richtung der Normalen $\alpha\beta$ bestimmten, für welchen mit Rücksicht auf den §. 9 N der Schwerpunct ist, wenn $A_{n-1}\ A_n\ A_{n+1}$ etc. die Längenaxe des Prismas bezeichnet. Stellt man sich nun den gewählten Querschnitt in der Lage, welche er nach vollendeter Biegung einnimmt, vollkommen festgehalten und zugleich den einen Theil des durch diesen Querschnitt abgetheilten Prismas, etwa den Theil $NA_{n-1}\ldots$ weggenommen vor, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass der andere Theil $NA_nA_{n+1}\ldots$ in einem Zustande sich befindet, wie solcher in der Figur 20 anschaulich gemacht wird. In dieser Figur ist mn die Höhe des Prismas in der Gegend des betrachteten Querschnittes, N der obenerwähnte Schwerpunct desselben, durch welchen die Längenaxe des Prismas, M hingegen die Stelle, durch welche die sogenannte neutrale Axe und beziehungsweise Schichte geht, ferner die Kraft

Fig. 20.



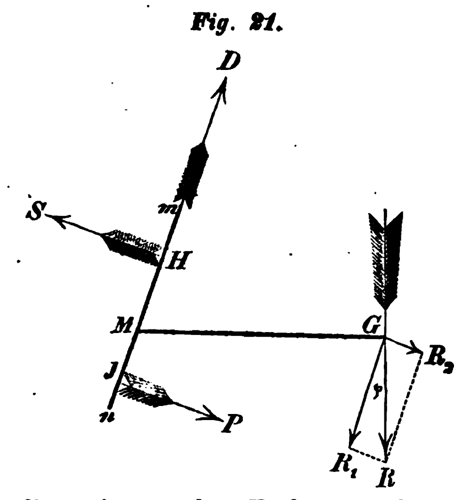
$$R = \Sigma Q_N - \Sigma Q_{n-1}\ldots \quad (27),$$

nämlich die Resultirende von den auf das in Betracht stehende Stück des Prismas einwirkenden Kräften $Q_n, Q_{n+1}, \ldots Q_N$, endlich $MG = Z$ der Hebelsarm für diese Resultirende in Bezug auf die neutrale Axe, welch' letztere offenbar für das Gleichgewicht gegen Drehung als Drehungsaxe zu fungiren hat. Dieser beabsichtigten Drehung widersetzen sich die durch die Biegung entwickelten Widerstände gegen Ausdehnung und Zusammendrückung, welche in der Figur durch kleine Pfeile senkrecht auf den Querschnitt angezeigt sind. Es werden nämlich die Fasern zwischen M und m Spannungen, zwischen M und n aber Pressungen erleiden. Diese Spannungen und Pressungen haben je eine Resultirende. Bezeichnet man diese beziehungsweise mit S und P, so wird schliesslich die Aufmerksamkeit auf das in Fig. 21 dargestellte Hebelsystem geleitet, wobei H und J die Angriffspuncte jener partiellen Resultirenden S und P sind.

Ueberdiess hat man in der Richtung $\alpha\beta$ noch eine Kraft D als

wirkend anzunehmen, welche mit dem Widerstande correspondirt, der sich dem Uebereinanderschieben der beiden in dem gewählten

Fig. 21.



Querschnitte zusammenhängenden Theile des Prismas entgegensetzt. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts für dieses so erhaltene freie Hebelsystem identisch sind, mit den für das zu untersuchende materielle Prisma, daher es die nächste Aufgabe sein wird, den Zustand dieses Hebelsystems zu analysiren. Zu diesem Behufe bringe man die vorkommenden Kräfte bezüglich ihrer Richtung in 2 Partien, wobei die Richtung der ersten Partie parallel zu dem bezüglichen Querschnitte, und die der zweiten hierauf normal sein soll. Zerlegt man in dieser Absicht die Resultirende R in die entsprechenden Componenten R_1 und R_2, so gehören die Kräfte R_1 und D in die eine, die Kräfte S, P und R_2 aber in die andere Partie. Nach bekannten Sätzen der theoretischen Mechanik kann bei einem freien Systeme von Kräften nur dann Gleichgewicht herrschen, wenn weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung möglich ist. Soll in dem vorliegenden Falle keine fortschreitende Bewegung stattfinden, so müssen sich die nach den zwei gewählten Richtungen wirkenden Kräfte aufheben, und daher die beiden Gleichungen

$$D = R_1 = R \cos \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

und $$S - P = R_2 = R \sin \varphi \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

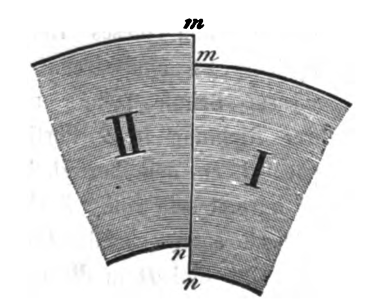
vorhanden sein. Soll weiters auch keine drehende Bewegung eintreten, so müssen sich ausserdem die bezüglichen statischen Kraftmomente gegenseitig vernichten. Demgemäss entsteht die weitere Gleichung $R . \overline{MG} = S . \overline{MH} + P . \overline{JM}$, oder, wenn $MH = u$ und $JM = v$ gesetzt wird, wegen $MG = Z$ auch

$$RZ = Su + Pv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Diese so resultirenden 3 Gleichungen (28), (29) und (30) enthalten **die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichtes** bei dem der Biegung ausgesetzten Prisma in Bezug auf jeden beliebig gelegenen Querschnitt desselben. Es wird nun vorzüglich von der klaren Auffassung dieser Bedingungsgleichungen abhängen, um in den weiteren darauf gegründeten Betrachtungen keinen Anstand zu finden. Von diesem Gesichtspuncte aus hält man für nothwendig, bei dieser Gelegenheit noch folgende Bemerkungen zu machen:

1. Die Gleichung (28) zeigt an, dass in dem gewählten Querschnitt mn (Fig. 22) sich eine Kraft geltend macht, welche die beiden Theile I und II des Prismas zu beiden Seiten des Querschnittes auf die in der Figur versinnlichte Art **über einander zu verschieben** beabsichtigt. Diese Kraft ist so gross, wie die eine Componente $R_1 = R \cos\varphi$. Soll nun dieses Verschieben nicht besorgt werden, so muss die Möglichkeit vorhanden sein, dass der aus dem Zusammenhange der beiden Theile I und II hervorgeruefne Widerstand D sich in dem verlangten Grade entwickeln könne. Indem aber zufolge der in Rede stehenden Gleichung stets $R = \frac{D}{\cos.\varphi}$ ist, und der Widerstand D nach Massgabe des für das Prisma verwendeten Materiales, so wie der Form und Grösse des Querschnittes einen Maximalwerth besitzen muss, so leuchtet ein, dass sich für R eine Gränze ergeben werde, über welche hinaus die Anspruchsnahme nicht gesteigert werden darf, wenn das Gleichgewicht gegen das erwähnte Uebereinanderverschieben nicht gestört werden soll. Nachdem ferner bei kleinen Biegungen φ ein kleiner Winkel sein, und sodann $\cos.\varphi$ sich von der Einheit nicht weit entfernen wird, so ist in diesem Falle näherungsweise $R = D$. Es ist jedoch wohl zu beachten, dass im Allgemeinen die fragliche Resultirende R mit der Lage des Querschnittes variirt, und bald positiv, bald negativ, bald Null werden, übrigens aber diese Verän-

Fig. 22.



derung entweder successive oder sprungweise geschehen kann. So z. B. hätte man nach Fig. 23, wenn von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird, für die Querschnitte

zwischen A_2 und A_3 die Resultirende $R = -Q_3$,
„ A_1 „ A_2 „ „ $R = Q_2 - Q_3$
und „ A „ A_1 „ „ $R = Q_1 + Q_2 - Q_3$,

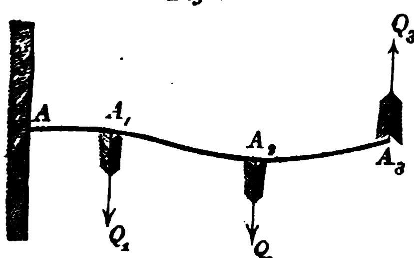


Fig 23.

daher 3 besondere Werthe, und die Veränderung der Grösse R mit der Lage des Querschnittes wäre noch immer sprungweise vorhanden, wenn man auch auf das eigene Gewicht des Prismas Rücksicht nehmen würde.

2. Die Gleichung (29) enthält die bedungene Eigenschaft ür die neutrale Schichte, wonach in derselben weder ein Zug noch ein Druck entstehen darf. Sie lehrt, dass zur Erreichung dieser Bedingung die Differenz $S-P$ zwischen den gesammten hervorgerufenen Spannungen und Pressungen der mit $R_2 = R \cdot sin\, \varphi$ bezeichneten Componenten äquivalent, und, wie man nach einiger Ueberlegung erkennen wird, jedenfalls positiv sein muss. Hieraus folgt, dass die gesammten in einem Querschnitte entwickelten Spannungen stets grösser, als die gleichzeitig hervorgerufenen gesammten Pressungen sind. Nur in den speziellen Fällen, wo R oder $\varphi = o$ wäre, würde ausnahmsweise die angeregte Differenz verschwinden, und die Gleichheit der resultirenden Spannung S und der Pressung P behauptet werden können. Es muss jedoch zugegeben werden, dass bei kleinen Biegungen, wo φ ebenfalls klein ist, die fragliche Differenz $S-P$ so unwesentlich werden kann, dass man sodann mit hinreichender Genauigkeit $S = P$ annehmen dürfte. Zu dieser Berechtigung ist übrigens nothwendig, dass S und P selbst keine zu kleinen Grössen seien, weil sonst die Vernachläsigung ihrer, wenn auch kleinen Differenz nicht zulässig wäre, und einen merklichen Fehler herbeiführen würde. In demjenigen Querschnitte, wo man $P = o$ also $S = R\, sin\, \varphi$ erhielte, wären offenbar nur Spannungen und keine Pressungen vorhanden, und die neutrale Axe käme in die unterste Kante des Querschnittes nach n Fig. 20 zu liegen. Aus

diesen Bemerkungen erkennt man, dass die Gleichung (29) zur Bestimmung der Lage der neutralen Schichte vorzüglich berufen ist.

3. Die Gleichung (30) enthält die Bedingung des Gleichgewichtes gegen Drehung. In derselben ist RZ das statische Moment der einwirkenden (offensiven) Kräfte, während $Su + Pv$ das statische Moment der hervorgerufenen Kräfte (Widerstände) ausdrückt. Hienach hat man zwischen dem statischen Kraftmomente und dem statischen Widerstandsmomente zu unterscheiden. Beide Momente sind auf die neutrale Axe als Drehungsaxe zu beziehen, aus welchem Grunde dieselbe auch Gleichgewichtsaxe genannt wird. Man sieht hieraus, dass die Bestimmtheit der in Rede stehenden Gleichung von der Kenntniss der Lage der neutralen Axe abhängt, daher diese Gleichung mit der vorigen (29) in unmittelbarem Zusammenhange zu bringen ist. Jedenfalls aber ist wegen

$$R = \frac{Su + Pv}{Z}$$

der Werth von R in so ferne begränzt, als die gesammten Spannungen und Pressungen gewisse Maximalwerthe haben, welche keine weitere Steigerung zulassen. Da überdiess bei den vorkommenden prismatischen Körpern in der Regel die Längendimension bei Weitem die Breite und Höhe übertrifft, so wird für die meisten Lagen des Querschnittes der Hebelsarm Z bedeutend grösser als u und v, wonach man im Allgemeinen R viel kleiner als S und P erhält.

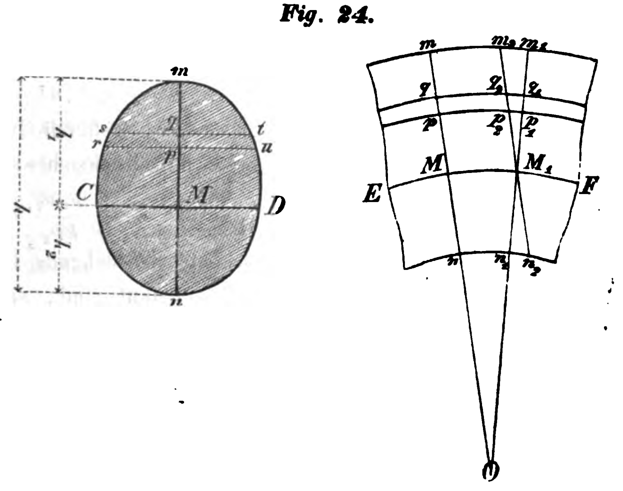
4. Die Intensität der einwirkenden Kräfte ist zufolge der Bemerkungen ad 1 und 3 in doppelter Hinsicht begränzt. Es muss nämlich einerseits $R = \frac{D}{\cos\varphi}$, anderseits aber $R = \frac{Su + Pv}{Z}$ sein, und es darf keine dieser Gleichungen unmöglich werden. Da in der Regel wegen einer Störung des Gleichgewichtes gegen das ad 1 erwähnte Uebereinanderverschieben eine geringere Besorgniss, als wegen einer Störung desselben gegen die ad 3 angeführte Drehung vorwaltet, so wird man in der Regel die erste Gleichung in der Ueberzeugung, dass sie möglich ist, keiner besonderen Untersuchung zu unterziehen, hingegen die vorzüglichste Aufmerksamkeit der zweiten Gleichung zuzuwenden haben. Man wird indess in der Folge sehen, und man kann diess auch schon jetzt erkennen, dass bei einer kleinen Länge des Prismas im Verhältniss zu den Querschnittsdimensionen, wie etwa

bei **Bolzen, Zapfen, Nieten** u. s. w., der aus der Gleichung $\frac{Su + Pv}{Z}$ hervorgehende Werth von R zu gross ausfallen könnte, um gleichzeitig der Relation $R = \frac{D}{\cos\varphi}$ zu genügen, und dass daher in einem solchen Falle ausnahmsweise die Berücksichtigung des Gleichgewichtes gegen das Uebereinanderverschieben in den Vordergrund träte.

§. 44.

Besondere Bedingung für das Gleichgewicht innerhalb der Elasticitätsgränzen. Um ausser den im vorigen §. aufgestellten Gleichungen (29) und (30) noch die besondere Bedingung für den Fall zu bestimmen, wenn durch die Biegung im Sinne des §. 5 die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, seien (Fig. 24) EF der Längendurchschnitt und CD der Querschnitt

Fig. 24.



des in Betracht stehenden Prismas, ferner mn und $m_1 n_1$ in demselben 2 unendlich nahe Querschnitte, zwischen welchen der unendlich kleine Theil des Prismas $mn m_1 n_1$ liegt. Man untersuche jetzt das Verhalten der in diesem Körperelemente vorhandenen Fasern. Zunächst leuchtet ein, dass, wenn EF die neutrale Schichte und CD die neutrale Axe vorstellt, sämmtliche Faserschichten zwischen Mm und $M_1 m_1$ ausgedehnt, zwischen Mn und $M_1 n_1$ hingegen zusammengedrückt werden. Die bezüglichen Längenveränderungen entnimmt

man deutlich, wenn man beachtet, dass die beiden Querschnitte mn und $m_1 n_1$ vor der Biegung parallel, also gegenseitig in einer Lage waren, welche man sich durch die gleichlaufenden Richtungen mn und $m_2 n_2$ versinnlichen kann. So z. B. wäre $p_1 p_2$ die Verlängerung der Faserschichte $pp_1 qq_1$, deren ursprüngliche Länge mit pp_2 zu bemessen ist. Hiebei ist im Querschnitte die Faserschichte $srut$ parallel mit CD anzunehmen. Die fragliche Längenveränderung kann im Sinne des §. 10 durch den Quotienten $\frac{p_1 p_2}{pp_2}$ versinnlicht werden, und sowohl eine Ausdehnung als auch eine Zusammendrückung bedeuten, je nachdem die gewählte Faserschichte diesseits oder jenseits der neutralen Axe liegt. Sei nun allgemein die auf den Quadrat-Zoll reducirte Kraft, welche die erwähnte Längenveränderung hervorzubringen im Stande wäre, und welche daher die in der beliebig gewählten Faserschichte vorherrschende Spannung oder Pressung anzeigt, ... $= k$,
und der Modul für die Längenveränderung des Materiales, aus welchem das Prisma besteht, ... $= m$,
so erhält man in der Voraussetzung, dass die betreffende Elasticitätsgränze nicht überschritten worden sei, mit Rücksicht auf die Gleichung (4) im §. 13 $\frac{p_1 p_2}{pp_2} = \frac{k}{m}$ und hieraus $k = \frac{p_1 p_2}{pp_2} m$.

Da in dieser Gleichung für das in Betracht stehende Körperelement $mn\,m_1 n_1$ die Grössen pp_2 und m constant sind, so ist in dem gewählten Querschnitte k lediglich der Grösse $p_1 p_2$ proportionirt. Dieser Bemerkung gemäss tritt die grösste Anspruchsnahme in denjenigen Fasern ein, welche zu beiden Seiten der neutralen Axe am entferntesten von dieser letzteren liegen. Seien demnach $Mm = h_1$ und $Mn = h_2$ die bezüglichen grössten Entfernungen für die Fasern diesseits und jenseits der neutralen Axe, so werden in m die gespanntesten und in n die am meisten gepressten Fasern vorhanden sein, und es müssen sich die entsprechende Maximal-Spannung s, so wie die Maximal-Pressung p (gleichfalls per □″ verstanden) aus den Gleichungen

$$s = \frac{m_1 m_2}{mm_2} m \text{ und } p = \frac{n_1 n_2}{nn_2} m$$

ergeben. Mit Hilfe derselben gelangt man wegen $pp_2 = mm_2 = nn_2$ zunächst auf die Proportion $k : s : p = p_1 p_2 : m_1 m_2 : n_1 n_2$ und sofort,

wenn die variable Entfernung $Mp = x$ gesetzt wird, wegen

$$p_1 p_2 : m_1 m_2 : n_1 n_2 = x : h_1 : h_2$$

auf die weitere Relation $k : s : p = x : h_1 : h_2$, oder

$$\frac{k}{x} = \frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31),$$

in welcher k sowohl eine Spannung, als auch eine Pressung bezeichnen kann. Bei dieser Gelegenheit wird festgesetzt, dass im Nachfolgenden die Grössen k und x durch die Zeiger 1 und 2 unterschieden werden, je nachdem dieselben mit den ausgedehnten oder zusammengedrückten Faserschichten correspondiren. Die grösste Höhendimension des Querschnittes (Fig. 24) wird $h_1 + h_2 = h$ gesetzt.

Die Gleichung (31) lehrt, dass die Spannung oder Pressung k, die in einer Faserschichte hervorgerufen wird, mit ihrer Entfernung x von der neutralen Axe im directen Verhältnisse steht, und der Quotient $\frac{k}{x}$ in einem und demselben Querschnitte eine constante Grösse wird. Dieser Quotient zeigt gleichzeitig die Anspruchsnahme pr. □″ in den beiden Faserschichten an, welche diesseits und jenseits der neutralen Axe in dem Abstande $x = 1$ von derselben gelegen sind. Diese Eigenschaft ist jedoch mit Rücksicht auf den §. 18 nur innerhalb der Elasticitätsgränzen als vorhanden anzusehen.

§. 45.

Nähere Bestimmung der Gleichung (29) unter der Voraussetzung des Nichtüberschreitens der Elasticitätsgränzen. Lage der neutralen Schichte in diesem Falle. Zu diesem Behufe hat man die im §. 43 mit S und P bezeichneten gesammten Spannungen und Pressungen mit Rücksicht auf den §. 44 zu bestimmen. Diess kann auf folgende Weise geschehen:

Sei die Querschnittsfläche der Faserschichte *stur* . . $= df_1$
und die gesammte Spannung in dieser Faserschichte . . $= dS$,
so hat man mit Rücksicht auf den §. 10 $dS = k_1\, df_1$ und sofort

$$S = \int_0^{h_1} k_1\, df_1,$$

indem man sich k_1 und df_1 als Functionen der Grösse x_1 vorstellt, und hiebei beachtet, dass letztere bezüglich der gespannten Faserschichten von o bis h_1 variirt. Auf dieselbe Weise findet man für die gesammten Pressungen

$$P = \int_o^{h_2} k_2 \, df_2 ,$$

wobei die analogen Grössen k_2 und df_2 sich auf die zusammengedrückten Faserschichten beziehen. Sonach geht die Differenz $S - P$, welche man zufolge der Gleichung (29) benöthigt, über in

$$S - P = \int_o^{h_1} k_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} k_2 \, df_2 ,$$

und da nach der Relation (31)

$$k_1 = \frac{s}{h_1} x_1 \text{ und } k_2 = \frac{p}{h_2} x_2$$

zu setzen ist, auch in

$$S - P = \frac{s}{h_1} \left[\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2 \right] = \frac{p}{h_2} \left[\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2 \right] \quad (32),$$

wenn man bemerkt, dass $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ ist, und hiebei die Grössen s und p von x_1 und x_2 unabhängig sind.

Die Gleichung (32) kann auf eine einfache Art anschaulich gemacht werden. Ist nämlich CD (Fig. 25) die neutrale Axe im Querschnitte, und N sein Schwerpunct, so hat man bekanntlich nach der Theorie des Schwerpunctes von materiellen homogenen Flächen unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen

Fig. 25.

$$f \cdot \overline{MN} = \int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2 \quad . \quad (33),$$

wenn f die *Area* des ganzen Querschnittes vorstellt. Demgemäss kann der Ausdruck

$$\int_o^{h_1} x_1 \, df_1 - \int_o^{h_2} x_2 \, df_2$$

auch erhalten werden, wenn man sich die Querschnittsfläche f als materiell und homogen vorstellt, und sodann das statische Moment der ganzen Fläche in Bezug auf die neutrale Axe auf die übliche

Weise ausdrückt, nämlich die Fläche mit der Materie derselben verwechselt. Setzt man die Entfernung des Schwerpunctes N von der neutralen Axe, also $MN = e$, und benützt die Relation (33) in der Gleichung (32), so wird $S - P = \frac{sfe}{h_1} = \frac{pfe}{h_2}$, und hieraus wegen der Gleichung (29) $S - P = R \sin \varphi$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{entweder} & e = \frac{h_1 R \sin \varphi}{sf} \\ \text{oder} & e = \frac{h_2 R \sin \varphi}{pf} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Diese beiden Gleichungen, welche identische Resultate geben müssen, sind geeignet, die Aufklärung über die Lage der neutralen Axe in einem Querschnitte im Vergleiche zu dem Orte seines Schwerpunctes zu liefern, und zur Ueberzeugung zu führen, dass dieselbe im Allgemeinen nicht durch den erwähnten Schwerpunct geht, sondern diess nur ausnahmsweise dann eintreten würde, wenn wegen R oder $\varphi = o$ auch $S - P = o$ wäre.

Indem vorläufig nur im Allgemeinen auf diese Eigenschaft aufmerksam gemacht wird, wird zugleich auf den spätern §. 49 hingewiesen, welcher die weiters nöthigen Erörterungen über die neutrale Schichte enthält.

§. 46.

Nähere Bestimmung der zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente herrschenden Gleichung (30) unter der Voraussetzung des Nichtüberschreitens der Elasticitätsgränzen. Zu diesem Behufe hat man die im §. 43 mit Su und Pv bezeichneten statischen Momente der sämmtlichen Spannungen und Pressungen aufzusuchen. In dieser Absicht bemerke man, dass $x_1\, dS$ das statische Moment der in der Faserschichte $srut$ (Fig. 24) entwickelten Spannungen, daher $\int_o^{h_1} x_1\, dS = Su$ die Summe der statischen Momente aller vorkommenden Spannungen bezeichnet. Es ist aber nach § 45

$$dS = k_1\, df_1 = \frac{s\, x_1\, df_1}{h_1}, \text{ daher auch}$$

$$Su = \frac{s}{h_1} \int_o^{h_1} x_1^2\, df_1.$$

Auf dieselbe Weise hat man für die Summe der statischen Momente der gesammten Pressungen

$$Pv = \frac{p}{h_2} \int_0^{h_2} x_2^2 \, df_2.$$

Mit Rücksicht auf diese Werthe wird sofort die gesuchte Summe der statischen Widerstandsmomente wegen $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$,

$$Su + Pv = \frac{s}{h_1} \left[\int_0^{h_1} x_1^2 \, df_1 + \int_0^{h_2} x_2^2 \, df_2 \right] = \frac{p}{h_2} \left[\int_0^{h_1} x_1^2 \, df_1 + \int_0^{h_2} x_2^2 \, df_2 \right] \quad (35).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist ein Aggregat von Producten, welche je aus einem Flächenelemente und dem Quadrate seines Abstandes von der Drehungsaxe gebildet sind. Indem man diese Wahrnehmung macht, erinnert man sich auf die in der Mechanik vorkommende Lehre über die Trägheitsmomente von materiellen homogenen Flächen. Man würde nämlich ganz denselben Ausdruck für das Trägheitsmoment der Fläche f erhalten haben, wenn man sich dieselbe materiell und um die neutrale Axe CD (Fig. 25) gedreht vorgestellt, dabei aber anstatt der Materie der Flächenelemente diese letzteren selbst substituirt hätte

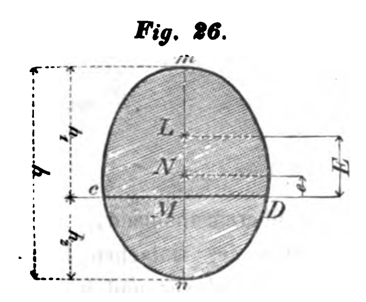
In dieser Erkenntniss kann man jenen Ausdruck eben so, wie man die Gleichung (33) als das statische Moment der ganzen Fläche angesehen hatte, als Repräsentant für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe betrachten, wenn man statt der Materie der Fläche diese letztere selbst gelten lässt. Es ist übrigens durchaus nicht nothwendig, auf die eigentliche Bedeutung des Trägheitsmomentes in der Mechanik zurückzugehen, sondern dasselbe nur der Bildung des Werthes nach in so ferne sich gegenwärtig zu halten, als es für jedes Flächenelement aus dem Producte desselben und dem Quadrate des betreffenden Abstandes von der Drehungsaxe besteht. Hienach leuchtet ein, dass der Werth für das Trägheitsmoment, welches mit T bezeichnet werden soll, stets die Form

$$T = fE^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

haben, nämlich ein Product aus der Fläche f und dem Quadrate einer Dimension E sein müsse, wobei E die Entfernung desjenigen

Punctes L (Fig. 26) von der Drehungsaxe vorstellt, in welchem man sich die ganze Fläche ohne Veränderung ihres Trägheitsmomentes vereinigt vorstellen könnte. Es hat daher der Punct L für das Trägheitsmoment des Querschnittes dieselbe Bedeutung, wie der Schwerpunct N für das statische Moment desselben, und man begreift zugleich, dass wegen $E < h$ ohne Zweifel $E^2 = C \cdot h^2$, also $T = C \cdot f h^2$ sein werde, wo die Zahl C einen gewissen echten Bruch bedeutet, welcher von der Querschnittsform und der Lage der neutralen Axe abhängt. Dies vorausgesetzt, reducirt sich die zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente herrschende Gleichung (30) auf folgende:

Fig. 26.



$$RZ = \frac{s}{h_1} T = \frac{p}{h_2} T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Dieser Ausdruck zeigt an, dass das statische Moment der hervorgerufenen Spannungen und Pressungen in Bezug auf die Drehungsaxe gefunden wird, wenn man $\left(\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}\right)$ die Anspruchsnahme der Fasern in der Entfernung 1 von dieser Axe mit (T) dem bezüglichen Werthe für das Trägheitsmoment des Querschnittes in dem erwähnten Sinne multiplicirt.

§. 47.

Mittelpuncte für die Spannungen und für die Pressungen. Die beiden Puncte H und J in Fig. 21, als die Angriffspuncte für die partiellen Resultirenden S und P, sind offenbar die Mittelpuncte für die gesammten Spannungen und beziehungsweise Pressungen. Die Lage dieser Puncte bestimmt sich aus der Grösse der Hebelsarme u und v. Es ist nämlich

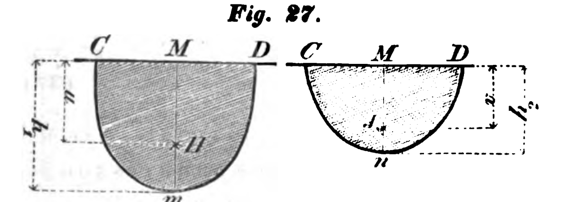
nach §. 46 $\quad Su = \frac{s}{h_1} \int_0^{h_1} x_1^2 \, df_1$ und $Pv = \frac{p}{h_2} \int_0^{h_2} x_2^2 \, df_2$,

ferner nach §. 45 $\quad S = \frac{s}{h_1} \int_0^{h_1} x_1 \, df_1$ und $P = \frac{p}{h_2} \int_0^{h_2} x_2 \, df_2$,

$$\left.\begin{aligned} &\text{daher einerseits } u = \frac{\int_0^{h_1} x_1^2 \, df_1}{\int_0^{h_1} x_1 \, df_1} \\ &\text{und anderseits } v = \frac{\int_0^{h_2} x_2^2 \, df_2}{\int_0^{h_2} x_2 \, df_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Diese Formeln sind mit denjenigen übereinstimmend, welche man nach der Pendeltheorie für die Länge des einfachen Pendels findet, wenn man die Querschnittsfläche als schwer und homogen betrachten, dann die beiden durch die neutrale Axe entstandenen Theile trennen und jeden dieser Theile abgesondert um jene Axe schwingen lassen würde. Die beiden vorhin erwähnten Mittelpuncte *H* und *J* sind nämlich zugleich die Schwingungspuncte der getrennten Flächentheile *CmD* und *CnD* (Fig. 27). Wären z. B. diese beiden Querschnittstheile Rechtecke, so hätte man bekanntlich $u = \frac{2}{3} h_1$ und $v = \frac{2}{3} h_2$.

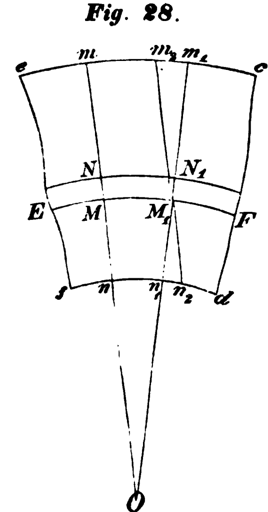
Fig. 27.



§. 48.

Krümmungshalbmesser für die neutralen Fasern und für die Längenaxe. Vervollständigt man die in der Fig. 18 dargestellte Zeichnung für den Längenschnitt des Prismas noch mit der Längenaxe desselben, so erhält man die Fig. 28, wo in der Gegend des beliebig gewählten Querschnittes *mn* der Krümmungshalbmesser für die neutralen Fasern . . . . $MO = \varrho$, der für die Längenaxe aber . . $NO = \varrho'$ gesetzt werden soll. Hienach wird die mittelst der Gleichung (34) ausgedrückte Grösse $e = MN = \varrho' - \varrho$, d. h. der Differenz jener Krümmungshalbmesser gleich.

Fig. 28.



Um zuerst für ϱ eine Relation aufzufinden, bemerke man, dass mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit der beiden $\Delta\, M_1\, m_1\, m_2$ und $M_1\, M\, O$ die Proportion $m_1 m_2 : M M_1 = M_1 m_2 : M O$ entseht, aus welcher wegen $M M_1 = m m_2$, $m_2 M_1 = h_1$ und $M O = \varrho$ zunächst $\frac{m_1 m_2}{m m_2} = \frac{h_1}{\varrho}$ folgt. Da nun nach §. 44 $\frac{m_1 m_2}{m m_2} = \frac{s}{m}$ ist, so hat man weiters $\frac{s}{m} = \frac{h_1}{\varrho}$, daher mit gleichzeitiger Rücksicht auf die Gleichung (31) auch $\frac{m}{\varrho} = \frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ und sofort

$$\varrho = \frac{h_1 m}{s} = \frac{h_2 m}{p} = \frac{m}{\frac{s}{h_1}} = \frac{m}{\frac{p}{h_2}} = \frac{h_1}{\frac{s}{m}} = \frac{h_2}{\frac{p}{m}} \quad \ldots \quad (39).$$

Diese Gleichungen, welche stets den Krümmungshalbmesser ϱ bestimmen, geben unter den dargestellten verschiedenen Formen Anlass zu interessanten Betrachtungen, wenn man sich erinnert, dass $\frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2}$ nach §. 44 die Anspruchsnahme der Fasern in dem Abstande 1 von der neutralen Axe bedeutet, $\frac{s}{m}$ und $\frac{p}{m}$ aber nach §. 13 sich auf die hervorgerufenen Längenveränderungen in den gespanntesten und gepresstesten Fasern beziehen. Man erhält nunmehr für den Krümmungshalbmesser der Längenaxe

$$\varrho' = \varrho + e = \frac{h_1}{s}\left(m + \frac{R \sin \varphi}{f}\right) = \frac{h_2}{p}\left(m + \frac{R \sin \varphi}{f}\right) (40),$$

daher auch

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = 1 + \frac{R \sin \varphi}{f m} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

und

$$\frac{\varrho' - \varrho}{\varrho} = \frac{e}{\varrho} = \frac{R \sin \varphi}{m f} \quad \ldots \ldots \quad (42),$$

welch' letztere Gleichung auch unmittelbar aus den Gleichungen (34) folgt, wenn man dort anstatt $\frac{h_1}{s}$ und $\frac{h_2}{p}$ den äquivalenten Werth $\frac{\varrho}{m}$ setzt. Durch die in der Gleichung (39) gegebenen Werthe für ϱ nimmt zugleich die Gleichung der statischen Widerstandsmomente die Form

$$R Z = \frac{m T}{\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (43),$$

also eine solche an, welche die Abhängigkeit zwischen dem Krümmungshalbmesser der neutralen Fasern (ϱ) und dem correspondirenden statischen Kraftmomente (RZ) anzeigt, und zur Bestimmung der Biegung des Prismas dienen wird.

§. 49.

Hauptsätze in Betreff der Lage der neutralen Schichte. Mit Benützung der bisher aufgestellten Relationen kann man unter der gemachten Voraussetzung, dass durch die Anspruchsnahme die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, in Betreff der Lage der neutralen Schichte folgende Hauptsätze zur Kenntniss nehmen:

1. Da nach der Gleichung (34) für $\varphi = o$ auch $e = o$ wird, so geht die neutrale Schichte durch den Schwerpunct jener Querschnitte, zu welchen auch nach der Biegung die Richtung der einwirkenden Kräfte parallel ist. So z. B. würde die neutrale Schichte in Fig. 29 durch den Schwerpunct N des festgehaltenen Querschnitts mn, in Fig. 30 aber durch die Schwerpuncte N_1, N_2 und N_3 der bezüglichen Querschnitte $m_1 n_1$, $m_2 n_2$ und $m_3 n_3$

Fig. 29.

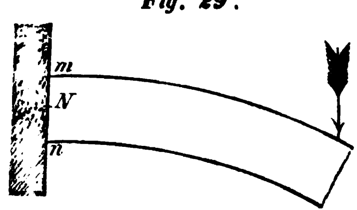
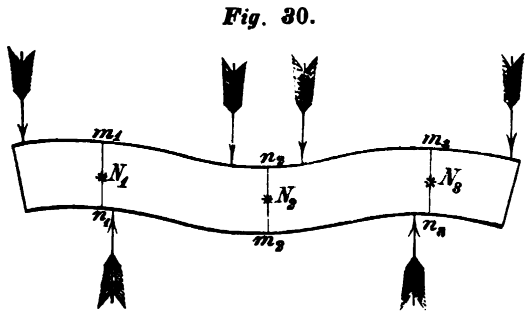


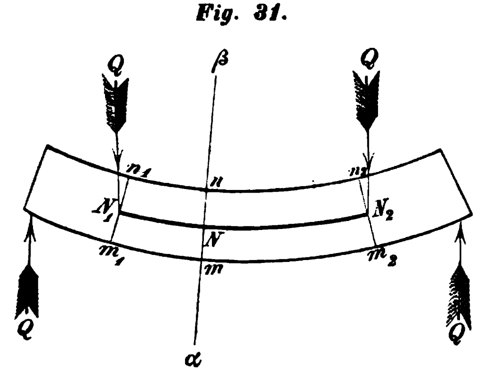
Fig. 30.



gehen, wenn die einwirkenden Kräfte zu jenen Querschnitten auch nach der Biegung parallel laufen. Diese Eigenschaft kann auch durch die Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas nicht beeinträchtigt werden, wenn die Längenaxe desselben ursprünglich horizontal gelegen ist, und demgemäss die hierauf normalen Kräfte und die Schwere des Prismas in einem und demselben Sinne wirken.

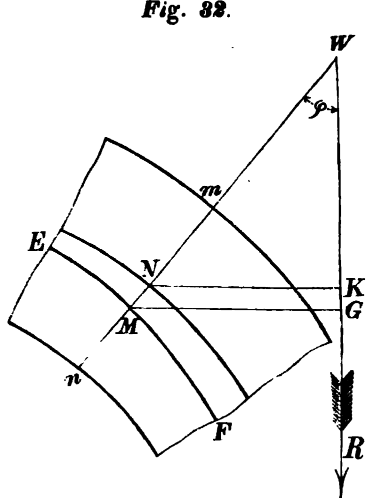
2. Für $R = o$ geht wegen $e = o$ die neutrale Schichte gleichfalls durch den Schwerpunct des betreffenden Querschnittes. Auf die Möglichkeit, dass R verschwinden kann, wurde schon im §. 43 hingewiesen. So z. B. wäre in Fig. 31 für jeden beliebigen Querschnitt mn, welcher zwischen den Normalen $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ liegt, die Resultirende sowohl diesseits als jenseits von $\alpha\beta$, $R = Q - Q = o$, wenn man von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, und es würde unter dieser Voraussetzung die neutrale Schichte $N_1 N N_2$ in der ganzen Strecke zwischen N_1 und N_2 stets durch die Schwerpuncte der daselbst vorkommenden Querschnitte gehen, also die Längenaxe des Prismas in sich enthalten.

Fig. 31.



3. Für jeden anders gelegenen Querschnitt mn (Fig. 32), wo weder $R = o$ noch $\varphi = o$ wird, geht die neutrale Schichte EMF durch einen Punct M, welcher zwischen dem Schwerpuncte N des Querschnittes und der am meisten gepressten Faserschichte in n derart liegt, dass man für die Entfernung $MN = e$ die eben so einfache, wie merkwürdige Relation

Fig. 32.



$$e = \frac{d^2}{w} = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} \quad . \; . \; . \; (44)$$

hat, wenn $NW = w$, $NK = z$ und d eine von der Querschnittsform abhängige übrigens constante Grösse ist. Es folgt nämlich aus den Gleichungen (42) und (43) $e = \frac{\varrho R \sin\varphi}{fm}$ und $\frac{R\varrho}{m} = \frac{T}{Z}$, hieraus aber $e = \frac{T \sin\varphi}{fZ}$.

Man beachte nun, dass T das Trägheitsmoment der Fläche f in Bezug auf die durch M ausserhalb des Schwerpunctes N gehende Drehungsaxe ist, und dass man nach einem bekannten Satze der Mechanik $T = t + fe^2$ setzen kann, wo t das Trägheitsmoment dieser Fläche in Bezug auf die durch den Schwerpunct N mit der vorigen parallel gezogene Axe vorstellt. Man erwäge ferner, dass im Geiste der Gleichung (36) t die Form $t = fd^2$ annimmt, wobei d bezüglich des Trägheitsmomentes t dieselbe Bedeutung hat, wie in jener Gleichung (36) E bezüglich des dortigen Trägheitsmomentes T.

Man berücksichtige endlich, dass unter Beibehaltung der bisher gewählten Bezeichnungen

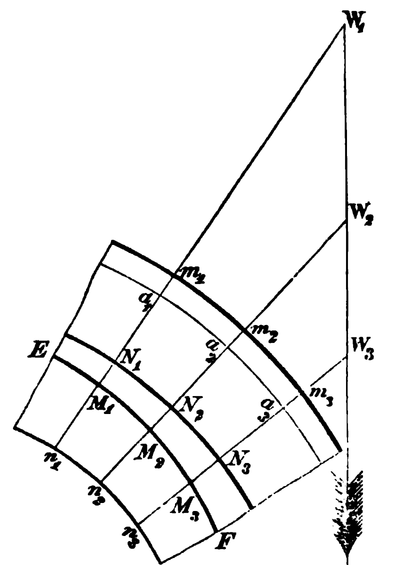
$$NW = w = \frac{NK}{\sin\varphi} = \frac{z}{\sin\varphi} \text{ und}$$

$$WM = w + e = \frac{MG}{\sin\varphi} = \frac{Z}{\sin\varphi},$$

demgemäss aber

$$e = \frac{T.\sin\varphi}{fZ} = \frac{\frac{T}{f}}{\frac{Z}{\sin\varphi}} = \frac{d^2 + e^2}{w + e} \text{ wird,}$$

Fig. 33.



woraus die zuvor behauptete Relation (44)

$$e = \frac{d^2}{w} = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} \text{ entsteht.}$$

In dieser Gleichung ist d nur von der Gestalt des Querschnittes abhängig, w hingegen und eben so z und φ mit der örtlichen Lage derselben veränderlich. Man erkennt hiernach, dass sich die neutrale Schichte desto mehr von der Längenaxe des Prismas entfernt, je kleiner $NW = w$ wird. So z. B. würde in Fig. 33, wenn zu den dortigen Querschnitten $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ stets dieselbe Resultirende R gehörte, die neutrale Schichte EF durch M_1, M_2, M_3 gehen, wobei

$$M_1 N_1 = \frac{d^2}{W_1 N_1}, M_2 N_2 = \frac{d^2}{W_2 N_2}, \quad M_3 N_3 = \frac{d^2}{W_3 N_3},$$

daher auch

$$M_1 N_1 : M_2 N_2 : M_3 N_3 = \frac{1}{W_1 N_1} : \frac{1}{W_2 N_2} : \frac{1}{W_3 N_3}$$

und weiters $M_1 N_1 < M_2 N_2 < M_3 N_3$ wäre, wenn, wie nach der Zeichnung, $W_1 N_1 > W_2 N_2 > W_3 N_3$ ist.

Ueberdiess hat man nach der Gleichung (44) die Proportion $e : d = d : w$, daher d als die mittlere geometrische Proportionale zwischen e und w anzusehen, und es werden in dem Falle, wenn man $a_1 N_1 = a_2 N_2 = a_3 N_3 = d$ macht, die entsprechenden Verhältnisse

$$M_1 N_1 : a_1 N_1 = a_1 N_1 : W_1 N_1,$$
$$M_2 N_2 : a_2 N_2 = a_2 N_2 : W_2 N_2,$$
$$M_3 N_3 : a_3 N_3 = a_3 N_3 : W_3 N_3$$

anschaulich. Aus diesen Bemerkungen leuchtet ein, dass im Allgemeinen die Neutralität der Fasern nicht durch die ganze Länge des Prismas in einer und derselben Faserschichte vorhanden ist, sondern successive von einer Faserschichte auf die nächstgelegene übergehet, und die Verbindung aller neutralen Orte in den Fasern im Längendurchschnitte eine Curve EF bilden muss, welche nicht mit der Längenaxe des Prismas parallel läuft. Nur in dem ad 2 erwähnten besonderen Falle würde ausnahmsweise die erwähnte Längenaxe zum Theile in die neutrale Schichte fallen. Aus der Gleichung (44) sind übrigens auch die beiden ad 1 und 2 besprochenen Fälle leicht zu folgern, wenn man die Bedingungen untersucht, unter welchen $e = o$, oder, was dasselbe ist, $w = \infty$ werden kann. Nach Fig. 32 wird nämlich $WN = w = \infty$, wenn entweder die beiden Geraden WN und WG parallel laufen, also $\varphi = o$ wäre, oder aber, wenn $z = NK = \infty$, d. h. die Resultirende R in einer unendlich weiten Entfernung zu liegen käme. Nach den Lehren der Mechanik über die statischen Kraftmomente tritt bekanntlich das letzte für $R = o$ wie etwa in Fig. 31 — ein.

4. In demjenigen Querschnitte $m_1 n_1$ (Fig. 34), wo $e = \frac{d^2}{w} = N_1 n_1$ wird, liegen die neutralen Orte in der Kante n_1 und in seinen Fasern

sind durchaus Spannungen vorhanden. Geht aber die Richtung der Resultirenden R durch den Schwerpunct N_2 des betreffenden Quer-

Fig. 34.

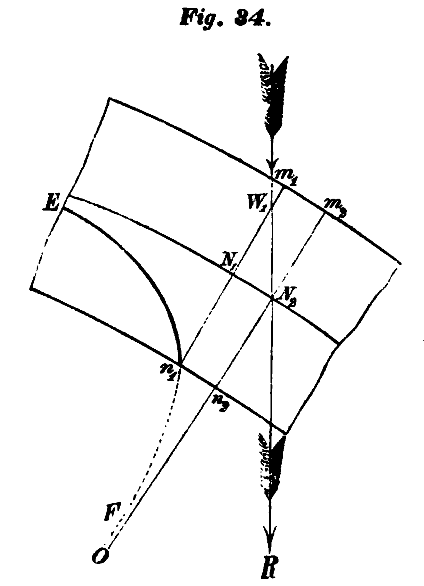
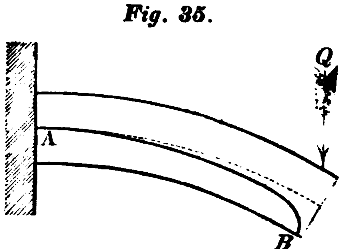
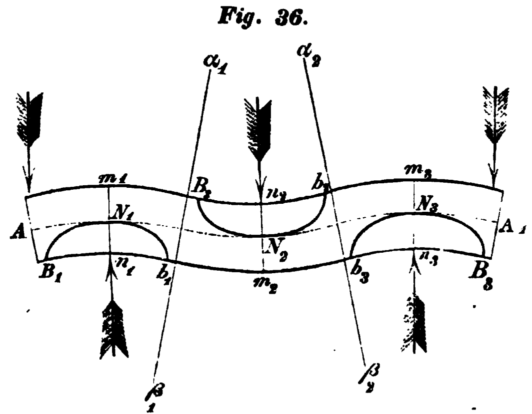


Fig. 35.



schnittes $m_2 n_2$ selbst, so ist wegen $w=z=o$ sodann $e=\infty$, was anzeigt, dass die Normale $N_2\,O$ eine **Assymtote** zu der Curve $E n_1 F$ bildet, wenn man nämlich diese letztere auch ausserhalb des Prismas fortsetzen wollte. Aus diesem Grunde können die zwischen den Querschnitten $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ gelegenen Fasern eigentlich keine neutralen Orte enthalten, sondern müssen sämmtlich ausgedehnt werden. Es ist jetzt nicht schwer einzusehen, dass z. B. bei dem in Fig. 35 dargestellten Prisma, welches an einem Ende festgehalten und am andern Ende belastet wäre, die neutrale Schichte in dem Längendurchschnitte der Wesenheit nach

Fig. 36.

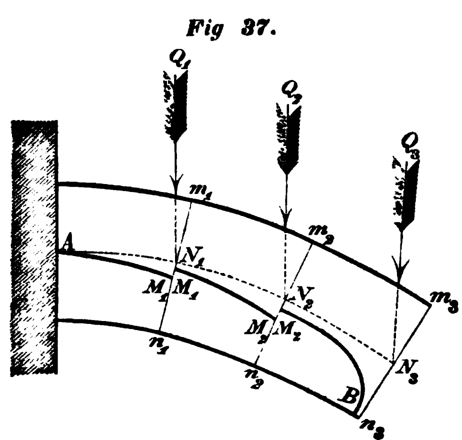


mittelst der Curve AB darzustellen sei. Eben so leuchtet ein, dass in dem mittelst der Fig. 36 dargestellten Falle die neutrale Schichte aus den abgesonderten krummen Flächen $B_1 N_1 b_1$, $B_2 N_2 b_2$ und $B_3 N_3 b_3$ bestehen werde, wenn

die Normalen $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ zu denjenigen Querschnitten gehören, in welchen die Längenaxe des Prismas einen unendlich grossen Krümmungshalbmesser besitzt.

5. Da in der Gleichung (44) $e = \frac{d^2}{w}$ die Grösse w von der jeweiligen Lage des Querschnittes und der dazu gehörigen Resultirenden R abhängt, so ist die neutrale Schichte mit der continuirlichen oder discontinuirlichen Veränderung dieser Resultirenden gleichfalls continuirlich oder discontinuirlich. Auf die zu beachtende Veränderlichkeit der Resultirenden wurde bereits mittelst Fig. 23 ad §. 43 aufmerksam gemacht. Wäre z. B. Fig. 37 ein Prisma in dem Querschnitte in A festgehalten, und von den Kräften Q_1, Q_2 und Q_3 in Anspruch genommen, so bestände die neutrale Schichte aus den 3 abgesonderten Theilen $A M_1$, $M_1 M_2$ und $M_2 B$, da sich in diesem Falle die Grösse w und mit ihr auch e bei den 2 Querschnitten $m_1 n_1$ und $m_2 n_2$ nicht successive, sondern sprungweise ändern würde. Diese Eigenschaft wird auch durch die Berücksichtigung des eigenen Gewichtes nicht beirrt.

Fig 37.



§. 50.

Die Untersuchungen über das Verhalten eines materiellen Prismas gegen Biegung sollen von jetzt an in 2 Theile zerfallen, je nachdem es sich um die Bestimmung der Formveränderung desselben, oder um die der Anspruchsnahme des Materiales handelt.

Formveränderung der Längenaxe. Biegungscurven. Grösse der Biegung.

§. 51.

Erklärung. Die Längenaxe des Prismas, welche vor der Biegung geradlinig war, ist nach derselben eine krumme Linie, welche

man auch **Biegungscurve** nennt. Die grösste Abweichung dieser Curve von der ursprünglichen geraden Richtung heisst **die Grösse der Biegung** oder auch kurzweg **die Biegung des Prismas.**

§. 52.

Hauptsätze für die Form der Biegungscurven. Indem man auf die Gleichungen für die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' im §. 48 zurückgeht, findet man unter Beibehaltung der gewählten Bezeichnungen folgende Hauptsätze:

1. Es ist für jede beliebige Stelle in der Längenaxe der Krümmungshalbmesser

$$\varrho' = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Denn man hat, $T = t + f.e^2 = f(d^2 + e^2)$, also mit Benützung der Gleichung (44) auch,

$$T = f\left(d^2 + \frac{d^4}{w^2}\right) = fd^2 . \frac{d^2 + w^2}{w^2} = t . \frac{d^2 + w^2}{w^2},$$

und da überdiess mit Rücksicht auf die Fig. 32 $\frac{MG}{NK} = \frac{WM}{WN}$ oder $\frac{Z}{z} = \frac{w + e}{w} = \frac{d^2 + w^2}{w^2}$ wird, die **wichtige** Relation $\frac{T}{t} = \frac{Z}{z}$, mittelst welcher sofort die Gleichung (43) in $Rz = \frac{mt}{\varrho}$ übergeht, hieraus aber $\varrho = \frac{mt}{Rz}$ und sofort wegen $\varrho' = \varrho + e$ die oben angeführte Relation

$$\varrho' = \frac{mt}{Rz} + \frac{d^2 \sin\varphi}{z} = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right)$$

folgt. Zu Folge dieser Gleichung nimmt der Krümmungshalbmesser für die Längenaxe des Prismas mit der Grösse d^2, dem Modul m und der Querschnittsfläche f zu, hingegen mit der Resultirenden R und ihrem Hebelsarme z in Bezug auf den Schwerpunct des Querschnittes ab. Dabei ist übrigens z von dem in Bezug auf die neutrale Axe vorhandenen Hebelsarme Z wohl zu unterscheiden, indem nach Fig. 32 $MG = Z$ und $NK = z$, weiters aber $Z - z = \frac{e}{\sin\varphi}$ ist.

In der Regel ist $\frac{mf}{R}$ gegen $\sin\varphi$ so gross, dass man sich als **Annäherung zur Wahrheit** wird erlauben können

$$\varrho' = \frac{d^2 mf}{Rz} = \frac{mt}{Rz}, \text{ also } \varrho' = \varrho \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

zu setzen, oder mit andern Worten, **die neutrale Schichte durch die Längenaxe des Prismas zu legen.** Wäre z. B. für eine schmiedeeiserne Schiene $m = 250000$, $f = 10\,\square''$, $R = 25$ Ztr. und $\sin\varphi = \frac{1}{100}$, so hätte man $\frac{mf}{R} = 100000$ und hienach $\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{10000001}{10000000}$, welcher Bruch ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums als die Einheit selbst angenommen werden könnte. Dieses genäherte Verfahren kann in analogen Fällen um so unbedenklicher eingeführt werden, als es sich in der Praxis durchgehends nur um geringe Biegungen handelt, bei welchen für $\sin\varphi$ häufig noch viel kleinere Werthe, als der im vorigen Beispiele angenommene, vorkommen. Zur Vermeidung eines Missverständnisses wird bemerkt, dass hier die hypothetische Verlegung der neutralen Schichte in die Längenaxe des Prismas nur in so ferne bevorwortet wird, als es sich um die Formbestimmung dieser letzteren handelt, und dass dabei selbst der Umstand des Unendlichgrosswerdens der zu vernachlässigenden Grösse e keine wesentliche Störung hervorbringen könne, weil der Werth von e nicht absolut, sondern nur im Verhältniss zu dem Krümmungshalbmesser ϱ', gegen welchen die Vernachlässigung beabsichtigt wird, zu betrachten ist, dieses Verhältniss aber

$$\frac{e}{\varrho'} = \frac{\frac{d^2}{z}\sin\varphi}{\frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right)} = \frac{\sin\varphi}{\frac{mf}{R} + \sin\varphi}$$

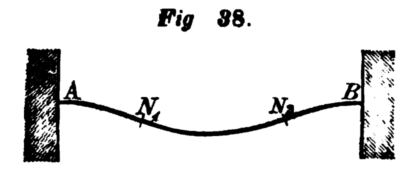
auch für unendlich grosse Werthe von e und ϱ, bei geringen Biegungen in der Regel ausserordentlich klein erscheint.

2. Für $z = o$ werden die beiden Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' **gleichzeitig** mit der Grösse e unendlich gross, was mit der vorigen Schlussbemerkung, so wie mit dem §. 49 ad 4 in Uebereinstimmung steht.

3. Das Zeichen des statischen Kraftmomentes Rz entscheidet die **Richtung** des betreffenden Krümmungshalbmessers. In den Figuren

ist daher die Richtung der Krümmungshalbmesser nach abwärts als die **positive**, nach aufwärts aber als die **negative** anzusehen. Der Uebergang aus der einen Richtung in die andere wird durch die ad 2 erwähnten unendlich grossen Krümmungshalbmesser angebahnt. Aus diesem Grunde nennt man die Puncte der Längenaxe, wo ein solcher Uebergang stattfindet, **die Wendepuncte** der Biegungscurve. So z. B. wären in Fig. 38 für die Längenaxe des Prismas AB die Krümmungshalbmesser zwischen A und N_1, so wie zwischen B und N_2 positiv, hingegen zwischen N_1 und N_2 negativ, und diese letztgenannten beiden Puncte die Wendepuncte, wenn daselbst die Krümmungshalbmesser $\pm \infty$ werden. Auch leuchtet ein, dass für diese Stellen das statische Moment Rz verschwinden muss.

Fig 38.



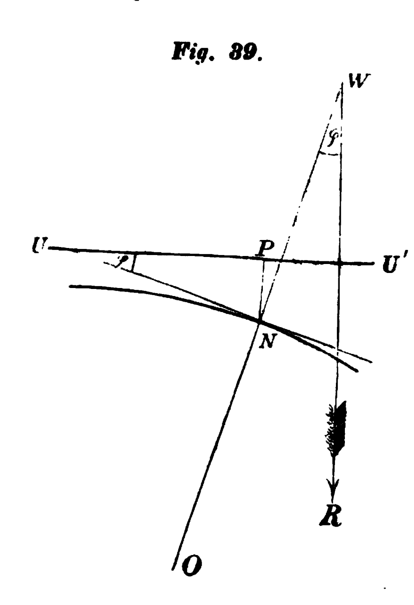
4. Wird $R = o$, so fällt nach §. 49 ad. 2 der betreffende Theil der neutralen Schichte $N_1 N_2$ (Fig 31) mit der Längenaxe zusammen, und die Form dieses Theiles im Längendurchschnitte ist **insbesondere ein Kreisbogen**. Die Richtigkeit dieses Resultates erkennt man auch dadurch, wenn man beachtet, dass in der betreffenden Strecke mit $R = o$ gleichzeitig $z = \infty$ wird, und überdiess das statische Moment Rz nicht variabel ist, sondern einen gewissen constanten Werth annimmt *), in Folge dessen die Krümmungshalbmesser des bezüglichen Theiles der Längenaxe gleichfalls constant sein, also einem Kreisbogen zugehören müssen.

5. Der Werth des Krümmungshalbmessers ϱ' ist mit der **continuirlichen** oder **discontinuirlichen** Veränderung von e gleichfalls **continuirlich** oder **discontinuirlich**. Diese Schlussfolgerung darf jedoch nicht auf die Form der gekrümmten Längenaxe ausgedehnt werden. Dieselbe muss vielmehr eine continuirliche

*) Es ist nämlich allgemein $d.Rz = Rdz + zdR$. Soll zuerst R für eine Reihe von aufeinanderfolgenden Querschnitten sich nicht ändern, also $dR = o$ sein, so entsteht $d.Rz = Rdz$. Ist überdiess $R = o$, so hat man $d.Rz = o$, sofort aber Rz = Constanz, und $z = \infty$, wenn anders das Moment Rz nicht selbst Null ist.

Curve bilden, und die sprungweise Veränderung des Krümmungshalbmessers ϱ' beirrt diese Eigenschaft hier eben so wenig, wie bei Korblinien, welche aus mehreren Kreisbögen von verschiedenen Radien zusammengesetzt, demungeachtet aber im Ganzen continuirlich sind. Es handelt sich nämlich dabei nur darum, dass an den Stellen, wo der Krümmungshalbmesser sich sprungweise ändert, die zusammenstossenden Curventheile eine gemeinschaftliche Tangente besitzen. Was hingegen den Werth des Krümmungshalbmessers ϱ für die neutralen Fasern betrifft, so ist derselbe stets continuirlich, weil in dem Ausdrucke $\varrho = \frac{mt}{Rz}$ das statische Kraftmoment Rz bei dem successiven Fortschreiten von einem Querschnitte zu dem nächstgelegenen keiner plötzlichen Veränderung unterliegt, obgleich eine solche in Beziehung auf die einzelnen Factoren R und z eintreten kann. Es versteht sich übrigens von selbst, dass von der Verschiedenartigkeit des Verhaltens der Werthe von ϱ und ϱ' in so ferne abgesehen werden dürfe, als nach der Bemerkung ad 1 dieses §. die Verwechslung der beiden Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' ohne Nachtheil gestattet ist.

Fig. 39.



6. Die Gleichung der Biegungscurve kann auf folgende Art aufgefunden werden: Man beziehe die fragliche Curve (Fig. 39) auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen Abcissenaxe UU' in die ursprüngliche geradlinige Längenaxe des Prismas gelegt wird, nehme in einem Puncte U dieser letzteren den Ursprung der Coordinaten an, und bezeichne die Richtung nach abwärts als die positive für die Ordinaten. Sei ferner für einen beliebig gewählten Punct N der krummlinigen Längenaxe $UP = x$, $NP = y$ und der

Krümmungshalbmesser $NO = \varrho'$, so hat man zunächst nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\varrho' = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wobei $\frac{dy}{dx} = tang.\,\varphi$, und φ der Neigungswinkel ist, welchen die in dem Puncte N gezogene Tangente mit der Abscissenaxe bildet. Denselben Winkel schliessen offenbar auch die Normale des gewählten Punctes N und die Richtung der Resultirenden R ein. Wie schon ad 1 bemerkt, handelt es sich in den in der Ausübung vorkommenden Fällen nur um geringe Biegungen. Werden daher in dieser Ueberzeugung bloss sehr kleine Werthe von φ zugelassen, so kann man als Annäherung zur Wahrheit $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$, also

$$\varrho' = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ d. h } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$$

setzen, und wegen der gleichzeitig vorhandenen genäherten Relation (46) sofort

$$mt \,.\, \frac{d^2y}{dx^2} = Rz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

annehmen. Ist nun das statische Kraftmoment Rz gleichfalls als eine Function von x dargestellt, und integrirt man 2mal nacheinander, so hat man es mit der Auflösung der beiden Integralformeln

$$mt \,.\, \frac{dy}{dx} = \int Rz\,dx \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

$$\text{und } mty = \int dx \int Rz\,dx \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

zu thun, um die Gleichung zwischen y und x zu erhalten.

Diese 3 Gleichungen sind wichtig. Sie bilden die Grundlage zu den weiteren Untersuchungen. Die erste Gleichung (47) bezieht sich auf den zweiten Differentialquotienten von y nach x, so wie auf den betreffenden Krümmungshalbmesser; die zweite Gleichung (48) hingegen wegen der Bedeutung von $\frac{dy}{dx}$ auf die Richtung der Tangenten, welche an die Biegungscurve gezogen werden, während die dritte Gleichung (49) als die der

Curve selbst die weiters nöthige Aufklärung über die entstehende Formveränderung der Längenaxe gibt. Es ist indess zu erinnern, dass sämmtliche 3 Gleichungen nur für sehr kleine Biegungen, und wenn hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, zulässig sind, gleichwohl aber in so ferne genügend erscheinen, als es sich in der Praxis gerade um die Erfüllung dieser Bedingungen handelt.

§. 53.

Grösse der Biegung. Biegungsmoment. Die Grösse der Biegung ist die Maximal-Ordinate, welche zufolge der Gleichung (49) in der Biegungscurve stattfinden kann. Dieser grösste Werth ist jedoch nur in numerischer Hinsicht, nämlich abgesehen von dem algebraischen Werthszeichen zu verstehen. Da aus der citirten Gleichung allgemein $y = \frac{\int dx \int Rz\,dx}{mt}$ folgt, so steht die Grösse der Biegung im umgekehrten Verhältnisse mit dem Producte aus dem Modul m und dem mit t bezeichneten Trägheitsmomente, und hängt überdiess von der Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte ab. Das Product mt nennen einige Schriftsteller auch das Biegungsmoment. Es ist mit der Grösse und Gestalt des Querschnittes veränderlich.

Im Nachfolgenden ist daher der Einfluss auf die Biegung zu untersuchen, welchen einerseits die Querschnitte, anderseits aber die Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte haben.

§. 54.

Fig. 40.

Einfluss des Querschnittes auf die Biegung. Wie erwähnt, macht sich der Einfluss des Querschnittes mittelst des Werthes t geltend. Dieser Werth ist nämlich der Rechnungsoperation nach das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch den Schwerpunct desselben zu ziehende neutrale Axe. Es sei nun (Fig. 40) der in Betracht stehende Querschnitt, N sein Schwerpunct und AB

die bezügliche durch diesem gezogene Axe. Im Uebrigen beachte man die cotirten Dimensionen, so wie die Bezeichnungen in Fig. 24 ad §. 44, nur mit dem Unterschiede, dass gegenwärtig die Grösse e ausser Betracht bleibt. Es leuchtet ein, dass mit Rücksicht auf die positiven und negativen Abscissen x das Trägheitsmoment t sich ausdrücken lässt durch die Formel

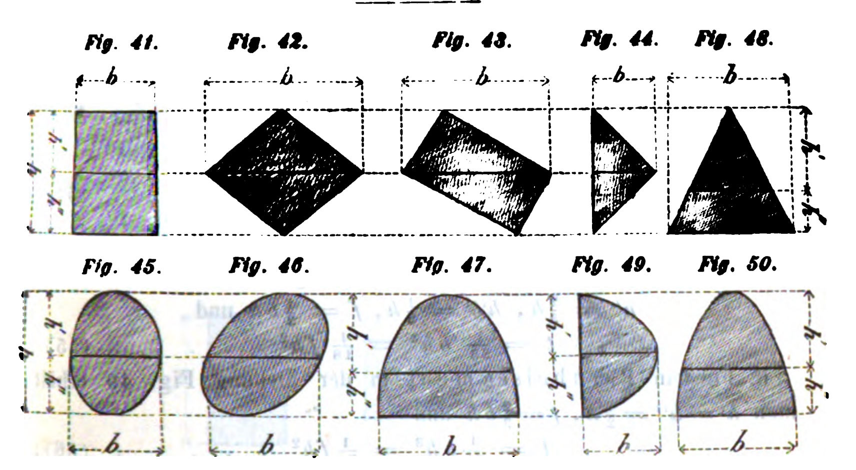
$$t = \int_{-h''}^{+h'} x^2 df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

und dass man nur noch die Gleichung der Umfangslinie des Querschnittes zu kennen braucht, um df als Function von x auszudrücken und sofort das obige Integrale zu bestimmen. Wie übrigens auch der Querschnitt geformt sein möge, so lässt sich doch, wie schon früher erwähnt, t stets auf die Form $t = fd^2$ bringen, wo d einem gewissen Theile der Höhendimension gleich ist. Man kann daher $d^2 = ch^2$, weiters aber auch die Fläche $f = c'bh$ setzen, wo c und c' nur von der Querschnittsform abhängige Zahlen sind, und b der Cotirung gemäss als Breite des Querschnittes anzusehen ist. In Folge dessen wird $t = cfh^2 = cc'.bh^3$, also ein Ausdruck, welcher bei analogen Querschnittsfiguren mit der Breite b im einfachen und mit der Höhe h im cubischen Verhältnisse wächst. Die Biegungen bei prismatischen Körpern mit ähnlichen Querschnitten stehen demnach unter sonst gleichen Umständen im umgekehrten Verhältnisse mit den 4ten Potenzen der homologen Querschnittsseiten.

Auf die Trägheitsmomente specieller Figuren übergehend, wird es vorläufig genügen, bloss die wesentlichsten einfachen Figuren zu besprechen.

§. 55.

Trägheitsmoment einfacher Figuren. Die einfachen Figuren 41 bis inclusive 50 sind der Gegenstand der jetzigen Betrachtung. Die Lage der neutralen Axe wird in jedem Querschnitte horizontal vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die den Figuren beigefügten Coten ist nun Folgendes zu bemerken:



1. Für ein Rechteck in der Stellung Fig. 41 ist wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ und $f = b h$,

$$t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)\ ^{*})$$

Dieselbe Formel gilt auch für das Quadrat.

2. Für ein Rhombus in der Stellung Fig 42 ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, $f = \frac{1}{2} b h$ und

$$t = \frac{1}{48} b h^3 = \frac{1}{24} f h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52).$$

Dieselbe Formel gilt auch für die Figuren 43 und 44, wenn hiebei gleichfalls $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ ist. Man beachte nämlich, dass diese Figuren in ein Rhombus verwandelt werden können, wenn man die bezüglichen Flächenelemente parallel zur Drehungsaxe verschiebt, ohne hiedurch das Trägheitsmoment t zu verändern.

3. Für eine Ellipse Fig. 45 hat man $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, $f = \frac{\pi}{4} b h$ und

$$t = \frac{\pi}{64} b h^3 = \frac{1}{16} f h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53),$$

wobei $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$ ist.

Diese Formel gilt auch für den Kreis, so wie für eine andere Stellung der Ellipse, wie in Fig 46, wenn nur statt f und h die geeigneten Werthe gesetzt werden.

---

*) Es ist nämlich nach der Gleichung (50) allgemein $t = \int_{-h''}^{+h'} x^2 df$, daher wegen $df = b\,dx$ auch $t = b \int_{-h''}^{+h'} x^2 dx = \frac{b}{3}(h'^3 + h''^3)$, und sofort für $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, wie oben, $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$.

4. Für eine halbe Ellipse in der Stellung Fig. 47 ist
$h' = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) h = 0{\cdot}576\, h$, $h'' = \frac{4}{3\pi}\, h = 0{\cdot}424\, h$, $f = \frac{\pi}{4}\, bh$
und

$$t = \left(\tfrac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) fh^2 = 0{\cdot}070\, fh^2 \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Dieselbe Formel gilt auch für den Halbkreis.

5. Für ein Dreieck in der Stellung Fig. 48 hat man

$$h' = \tfrac{2}{3} h,\ h'' = \tfrac{1}{3} h,\ f = \tfrac{1}{2} bh \text{ und}$$

$$t = \tfrac{1}{36}\, bh^3 = \tfrac{1}{18}\, fh^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

6. Für ein Parabelsegment in der Stellung Fig. 49 erhält man $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, $f = \frac{2}{3} bh$ und

$$t = \tfrac{1}{30}\, bh^3 = \tfrac{1}{20}\, fh^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56);$$

in der Stellung Fig. 50 aber $h' = \frac{2}{5} h$, $h'' = \frac{3}{5} h$, $f = \frac{2}{3} bh$ und

$$t = \tfrac{8}{175}\, bh^3 = \tfrac{12}{175}\, fh^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57),$$

wobei die Dimension h im ersten Falle die Sehne, im zweiten Falle aber die Höhe des parabolischen Segmentes vorstellt.

§. 56.

Folgerungen. Die im vorigen §. gegebenen Formeln machen viele interessante Resultate anschaulich. Es werden hievon einige angegeben.

1. Will man z. B. die Biegungen vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten I und II (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen erleiden, und bezeichnet man diese Biegungen mit δ_I und δ_{II}, ferner die Seite des Quadrates mit α und den Durchmesser des Kreises mit β, so hat man

Fig. 51.

für das Quadrat $h = \alpha$, $f = \alpha^2$ und nach Formel (51) ... $t_I = \frac{1}{12} f\alpha^2$,

für den Kreis aber $h = \beta$, $f = \frac{\pi}{4}\beta^2$ und nach Formel (53) $t_{II} = \frac{1}{16} f\beta^2$;

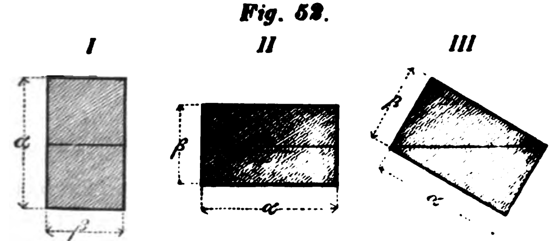
daher wegen $\alpha^2 = \frac{\pi}{4}\beta^2$ sofort

$$\delta_I : \delta_{II} = \frac{1}{t_I} : \frac{1}{t_{II}} = \frac{3}{\alpha^2} : \frac{4}{\beta^2} = 3 : \pi = 1 : 1{\cdot}047.$$

Es ist also die Biegung des Prismas mit dem kreisförmigen Querschnitte im Verhältniss wie 1 : 1·047 grösser, als mit den quadratischen.

2. Um einen weiteren Vergleich anzustellen, sei der Querschnitt des Prismas ein Rechteck von den Seiten α und β, und man betrachte dasselbe in den 3 Stellungen *I*, *II* und *III* (Fig. 52), wo ad *I*...β,

Fig. 52.



ad *II*...α und ad *III* die Diagonale horizontal ist. Heisst man wieder die correspondirenden Biegungen δ_I, δ_{II} und δ_{III}, so hat man

ad *I*, $h=\alpha$ und nach der Formel (51) $t_I=\frac{1}{12}f\alpha^2$,

ad *II*, $h=\beta$ „ „ „ „ (51) $t_{II}=\frac{1}{12}f\beta^2$,

und ad *III*, $h=\frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ „ „ (52) $t_{III}=\frac{1}{6}f.\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$,

sofort aber

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \frac{2}{\alpha^2} : \frac{2}{\beta^2} : \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = 2\beta^2 : 2\alpha^2 : \alpha^2+\beta^2.$$

Für $\alpha>\beta$ ist $\delta_I<\delta_{III}<\delta_{II}$ und

„ $\alpha<\beta$ . . . $\delta_I>\delta_{III}>\delta_{II}$,

also δ_{III} stets zwischen δ_I und δ_{II}.

Für $\alpha=\beta$ endlich ist $t_I=t_{II}=t_{III}$ und $\delta_I=\delta_{II}=\delta_{III}$, also für den quadratischen Querschnitt die Grösse der Biegung in allen 3 Fällen dieselbe.

3. Wird ein dreikantiges Prisma ebenfalls in 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes α, β und γ horizontal sind, und jetzt eine Vergleichung zwischen den entstehenden Biegungen δ_I, δ_{II} und δ_{III} unter sonst gleichen Umständen vorgenommen, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \text{ad } I,\ h=\frac{2f}{\alpha} \\ \text{ad } II,\ h=\frac{2f}{\beta} \\ \text{und ad } III,\ h=\frac{2f}{\gamma} \end{array}\right\}, \text{ daher nach Formel (55)} \left\{\begin{array}{l} t_I=\frac{2}{9}\frac{f^3}{\alpha^2} \\ t_{II}=\frac{2}{9}\frac{f^3}{\beta^2} \\ t_{III}=\frac{2}{9}\frac{f^3}{\gamma^2}, \end{array}\right.$$

also auch

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \frac{1}{t_I} : \frac{1}{t_{II}} : \frac{1}{t_{III}} = \alpha^2 : \beta^2 : \gamma^2,$$

wonach sich die betreffenden Biegungen verhalten, wie die Quadrate der horizontalen Seiten.

Ist das Dreieck rechtwinkelig, und γ die Hypothenuse, so hat man überdiess wegen $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ das Verhältniss

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = \alpha^2 : \beta^2 : \alpha^2 + \beta^2, \text{ und } \delta_I + \delta_{II} = \delta_{III}.$$

Wäre noch das Dreieck gleichschenklich, also $\alpha = \beta$, so würde sein

$$\delta_I : \delta_{II} : \delta_{III} = 1 : 1 : 2 \text{ und } \delta_I = \delta_{II} = \tfrac{1}{2}\delta_{III}.$$

4. Bei dieser Gelegenheit wird ein für allemal erinnert, dass die Biegung eines materiellen Prismas nicht geändert werde, wenn sein Querschnitt in die genau entgegengesetzte Lage gebracht wird, vorausgesetzt, dass auch in diesem Falle keine Elasticitätsgränze überschritten wird. Durch die so veränderte Lage bleibt nämlich die durch den Schwerpunct gehende Axe, und der Abstand jedes Flächentheiles von derselben, also auch das Trägheitsmoment t unverändert.

§. 57.

Trägheitsmoment zusammengesetzter Figuren. Ist eine Figur aus zwei oder mehreren andern einfachen Figuren zusammengesetzt, so bildet die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile das Trägheitsmoment der ganzen Figur. Nur müssen die sämmtlichen Trägheitsmomente auf eine und dieselbe Axe bezogen werden, welche in diesem Falle durch den Schwerpunct der ganzen Figur horizontal zu ziehen ist, wenn die Krafteinwirkung vertical angenommen wird. Da aber diese Axe im Allgemeinen nicht mehr durch den Schwerpunct jedes einzelnen Querschnittstheiles gehen wird, so muss man sodann von dem bekannten Satze des sogenannten Uebersetzens der Trägheitsmomente von einer Axe auf eine andere Gebrauch machen, wie diess beispielsweise im §. 49 ad 3 geschehen ist. Man findet indess vorläufig hierauf nicht näher einzugehen, sondern die noch weiters nöthigen Erläuterungen für die Anwendung dem 2. Hauptstücke vorzubehalten.

§. 58.

Einfluss der Intensität und Anordnung der wirkenden Kräfte auf die Biegung. Auch in dieser Beziehung sollen vor der Hand nur die einfachsten Fälle erläutert werden. Als diese pflegt man anzunehmen:

I. **Festhaltung des Prismas an einem Ende und Belastung desselben am andern Ende;**

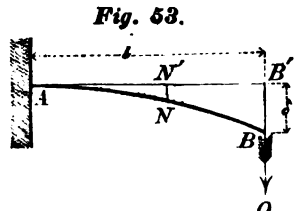
II. **Festhaltung des Prismas an einem Ende, und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach;**

III. **Unterstützung beider Enden des Prismas, und Belastung desselben in der Mitte; und**

IV. **Unterstützung beider Enden des Prismas, und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach.**

§. 59.

Fig. 53.



I. Fall. Es werde (Fig. 53) ein Prisma an einem Ende A horizontal festgehalten, und am andern Ende B mit einem Gewichte Q belastet, hiebei aber von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt. Man setze in Uebereinstimmung mit den gewählten Bezeichnungen für einen beliebigen Punct N der Längenaxe

die Abscisse . . . . $AN' = x$,
die dazu gehörige Ordinate . . . . . . $NN' = y$,
die horizontale Länge . . . . $AB' = l$,
die Grösse der Biegung . . . . $BB' = \delta$
und den Winkel, welchen die Tangente in B
mit dem Horizonte bildet, ... $= \alpha$.

Man erhält nunmehr nach der Gleichung (47)

$$mt \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Q\,(l - x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58),$$

da in diesem Falle das statische Kraftmoment Rx offenbar $Q \,.\, \overline{B'N'} = Q\,(l - x)$ ist. Hieraus folgt durch Integration

$$\text{zuerst } mt \,.\, \frac{dy}{dx} = Q\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \; . \; . \; . \quad (59)$$

und weiters $mt \cdot y = Q\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$ . . . (60),

wenn man beachtet, dass mit x auch die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden.

Endlich hat man für den Endpunct B **die fragliche Grösse der Biegung**

$$\delta = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q l^3}{mt} \quad \text{. . . . . (61)}$$

$$\text{und } tg\,\alpha = \frac{Q l}{2 mt} = \frac{3\delta}{2 l} \quad \text{. . . . . . (62).}$$

Führt man jetzt den für δ gegebenen Werth in die Gleichung (60) ein, so bekommt man

$$\frac{y}{\delta} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left[3 - \frac{x}{l}\right] \quad \text{. . . . . (63)}$$

als Gleichung der Biegungscurve.

Der Ausdruck (61) lehrt, dass die Biegung im einfachen Verhältniss mit der Belastung Q, hingegen im cubischen Verhältnisse mit der Länge l steht, wobei es bei der vorausgesetzten Kleinheit der Biegung erlaubt ist, die horizontale Projection der Längenaxe mit der Curvenlänge selbst zu verwechseln.

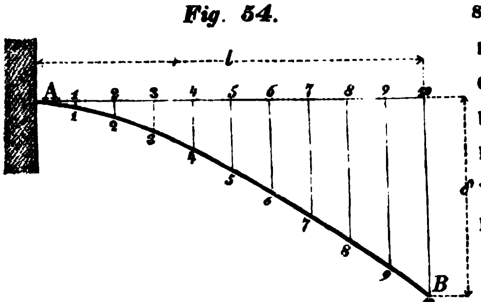
§. 60.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den I. Fall. Die Gleichung (63) für die Biegungscurve kann mittelst Abscissen und Ordinaten construirt, und hierzu folgende Tabelle benützt werden:

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0145	0·6	0·4320
0·2	0·0560	0·7	0·5635
0·3	0·1215	0·8	0·7040
0·4	0·2080	0·9	0·8505
0·5	0·3125	1·0	1·0000

In Figur 54 ist die Construction dieser Curve ausgeführt, wobei zur bessern Anschaulichkeit die Ordinaten in vergrössertem Massstabe erscheinen. Man bemerkt, dass die Curve in der Gegend von A beinahe mit einer gemeinen Parabel, und in der Gegend von B beinahe mit einer geraden Linie zusammenfällt.

Fig. 54.

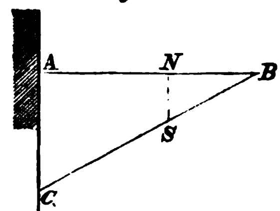


Eine **andere** graphische Versinnlichung kann aus der Gleichung (58) abgeleitet werden. Es ist nämlich $mt \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Q\,(l - x)$, und da nach §. 52 sehr nahe $\frac{d^2y}{dx} = \frac{1}{\varrho'}$ gefunden wurde, auch

$$\frac{mt}{\varrho'} = Q\,(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64),$$

wenn ϱ' den Krümmungshalbmesser der Curve für die zu x, y gehörige Stelle bedeutet. Diese Gleichung ist in Bezug auf x vom ersten Grade, und repräsentirt daher in so ferne eine **gerade Linie** als man die Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ als Ordinaten dieser Geraden betrachtet. In Fig. 55 ist BC die erwähnte Gerade, und man kann jetzt behaupten, dass für irgend einen Punct N der Längenaxe die Ordinate NS mit $\frac{1}{\varrho'}$ im Verhältnisse stehe, also dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers proportionirt sei. Die **grösste** Ordinate $AC = \frac{Ql}{mt}$ entsteht in A für $x = o$ und entspricht dem **kleinsten** Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{mt}{Ql}$, während die Ordinate an dem Endpuncte B verschwindet, und mit einem unendlich grossen Krümmungshalbmesser correspondirt. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (61) für den erwähnten **Minimal-Krümmungsradius** $\varrho' = \frac{l^2}{3\delta}$.

Fig. 55.



§. 61.

II. Fall. Es werde (Fig. 56) ein Prisma an einem Ende A horizontal festgehalten, und der ganzen Länge nach gleichförmig belastet. Es sollen die Bezeichnungen im §. 59 dieselben bleiben, nur mit dem Unterschiede, dass Q gegenwärtig die auf der Länge AB ruhende Totalbelastung anzeigt, welche Länge bei kleinen Biegungen wieder mit der Abscisse AB' verwechselt werden darf. In diesem Falle ruht mit Rücksicht auf die beliebig gewählte Stelle N auf dem Stücke BN die der Resultirenden R gleich kommende Last

Fig. 56.

$R = Q \cdot \frac{\overline{B'N'}}{\overline{AB'}} = Q\left(\frac{l-x}{l}\right)$, und der dazu gehörige Hebelsarm ist $z = \frac{1}{2}\,\overline{B'N'} = \frac{1}{2}(l-x)$. Es wird daher das statische Kraftmoment $Rz = \frac{Q}{2l}(l-x)^2$, und mit Benützung desselben in den Gleichungen (47), (48) und (49) sofort

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{2l}(l-x)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = \frac{Qx}{6l}(3l^2 - 3lx + x^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (66)$$

$$\text{und } mt\,y = \frac{Qx^2}{24l}(6l^2 - 4lx + x^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (67),$$

wenn man beachtet, dass für $x = o$ gleichzeitig die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $y = o$ werden. Da $x = l$, $y = \delta$ und $\frac{dy}{dx} = tg.\,\alpha$ gleichzeitige Werthe sind, so folgt aus den Gleichungen (66) und (67) die **Grösse der Biegung**

$$\delta = \frac{1}{8} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

$$\text{und } tg.\,\alpha = \frac{1}{6} \cdot \frac{Ql^3}{mt} = \frac{4\delta}{3l} \quad . \; . \; . \; . \quad (69).$$

Mittelst dieses Werthes von δ nimmt die Gleichung der Biegungscurve die Form an

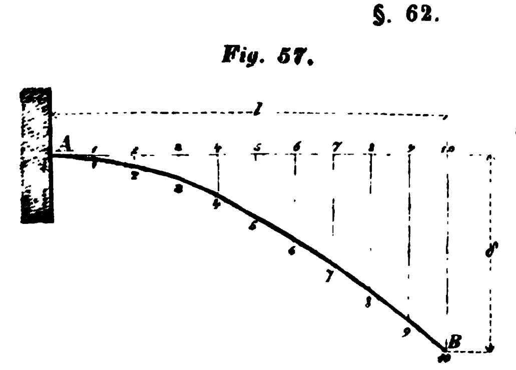
$$\frac{y}{\delta} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[6 - 4\left(\frac{x}{l}\right) + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \quad . \; . \quad (70),$$

welche also in Beziehung auf x vom 4. Grade ist.

Der Gleichung (68) zu Folge beträgt die Grösse der Biegung bei dem Stattfinden einer nach der ganzen Länge gleichmässig vertheilten Belastung nur $\frac{3}{8}$ vor derjenigen, welche nach der Gleichung (61) resultirt hätte, wenn dieselbe Last unter sonst gleichen Umständen an dem freien Ende concentrirt worden wäre.

§. 62.

Fig. 57.



Graphische Darstellung der Biegungscurve für den II. Fall. Die Gleichung (70) kann graphisch dargestellt werden. Nach derselben wurde die nachfolgende Tabelle zwischen $\frac{x}{l}$ und $\frac{y}{\delta}$ berechnet, und die entsprechende Curve (Fig 57.) anschaulich gemacht, wobei die Ordinaten, gleichfalls wie in der Fig. 54, in vergrössertem Massstabe gezeichnet sind.

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0187	0·6	0·4752
0·2	0·0699	0·7	0·6027
0·3	0·1467	0·8	0·7339
0·4	0·2432	0·9	0·8667
0·5	0·3542	1·0	1·0000

Auch führt, wie im §. 60, die Gleichung (65)

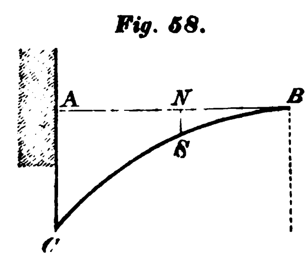
$$mt \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q}{2l} (l - x)^2$$

zu einer weiteren graphischen Versinnlichung, indem wegen $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$ sofort

$$\frac{mt}{\varrho'} = \frac{Q}{2l}(l-x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

gesetzt, und daher gesagt werden kann, dass diese Gleichung eine gemeine Parabel in so ferne repräsentire, als die Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ als die Ordinaten derselben angesehen werden. Die Lage dieser Parabel ist in der Fig. 58 ersichtlich. Ihr Scheitel befindet sich in B und ihre Axe geht vertical. Man erkennt jetzt, dass für irgend einen Punct N der Längenaxe der dazu gehörige Krümmungshalbmesser mit der dortigen Ordinate der Parabel $\overline{NS}$ in umgekehrter Proportion steht. Die grösste Ordinate $\overline{AC} = \frac{Ql}{2mt}$ ist in A für $x = o$, und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{2mt}{Ql}$, während die Ordinate an dem Endpuncte B verschwindet, und mit einem unendlich grossen Krümmungsradius correspondirt. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (68) für den erwähnten Minimal-Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{l^2}{4\delta}$.

Fig. 58.



§. 63.

III. Fall. Wird (Fig. 59) ein Prisma BC an beiden Enden B und C unterstützt, und in der Mitte A mit dem Gewichte Q belastet, so lässt sich dieser Fall dadurch anschaulich machen, dass man (Fig. 60) die Stützen in B und C weggenommen, und an deren Statt die Kräfte $\frac{1}{2}Q$ und $\frac{1}{2}Q$ sich angebracht denkt, welche gleich und ent-

Fig. 59.

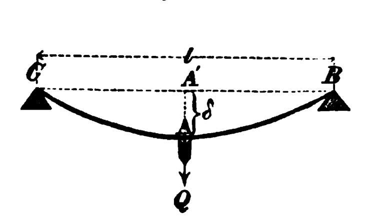
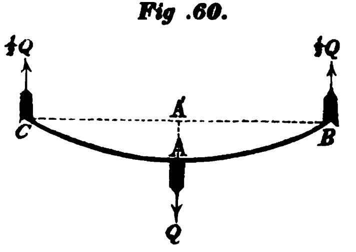


Fig. 60.



gegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Jede Hälfte AB und AC befindet sich jetzt unter der Voraussetzung, dass von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird, in einem Zustande, welcher mit dem in der Fig. 61. dargestellten und im §. 59 behandelten Falle I. analog ist, daher die daselbst gegebenen Formeln geeignete Anwendung finden, wenn nur statt den dortigen Grössen l und Q gegenwärtig $\frac{1}{2}l$ und $\frac{1}{2}Q$ gesetzt, und überdiess die Kraft $\frac{1}{2}Q$ vermöge ihrer Richtung nach aufwärts negativ genommen wird. In dieser Erkenntniss findet man für die Grösse der Biegung

Fig 61.

$$\delta = \frac{1}{3} \cdot - \frac{(\frac{1}{2}Q)(\frac{1}{2}l)^3}{mt} = - \frac{1}{48} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad . \quad . \quad (72)$$

und

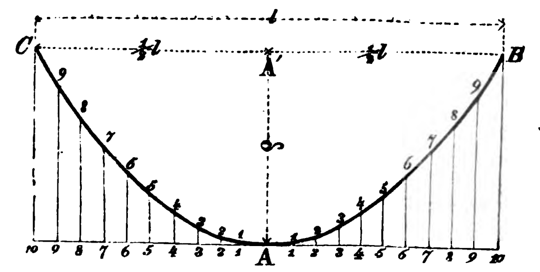
$$tg\, \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta}{\frac{1}{2}l} = \frac{3\delta}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Bei der Vergleichung der Fälle I und III bemerkt man, dass sich die beiderseitigen Grössen der Biegungen dem numerischen Werthe nach unter sonst gleichen Umständen wie 16 : 1 verhalten. Das negative Zeichen in der Formel (72) bezieht sich bloss auf die Richtung der Biegung, welche im Vergleiche zu der ad I entgegengesetzt ist.

§. 64.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den III. Fall. Zu diesem Behufe hat man nur nöthig, die Curve

Fig. 62.



(Fig. 62) aus 2 Theilen AB und AC zusammenzusetzen, welche je nach Art der Curve (Fig. 54) construirt sind. Die Tabelle in §. 60

kann daher auch hier für jeden der beiden Curventheile benützt werden, nur hat man statt der dortigen Grösse l diesfalls $\frac{1}{2}l$ zu setzen. Die zweite graphische Anschauungsweise enthält die Fig. 63. Es sind die geraden Linien BD und CD symmetrisch gelegen, und dieselben analog mit der Geraden BC in der Fig. 55.

Fig. 63.

Die Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{\varrho'}$ repräsentirt sodann wieder den reciproken Werth des Krümmungshalbmessers ϱ', der an der Stelle N der Längenaxe BC in Folge der Biegung vorhanden ist. Uebrigens sind die beiden Linien BD und CD übereinstimmend mit der Lage der Krümmungshalbmesser oberhalb der Längenaxe gezeichnet, wodurch auch die Richtung der Biegung erkannt werden kann. Die grösste Ordinate $\overline{AD} = \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)}{mt} = \frac{Ql}{4mt}$ ist in A vorhanden und entspricht dem kleinsten Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{4mt}{Ql}$, während die Ordinaten der bezeichneten Geraden für die Endpuncte B und C verschwinden, und mit unendlich grossen Krümmungshalbmessern correspondiren. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (72) für den numerischen Werth des erwähnten Minimal-Krümmungshalbmessers $\varrho' = \frac{l^2}{12\delta}$.

§. 65.

IV. Fall. Es werde ein Prisma BC (Fig. 64) auf 2 Stützen horizontal gelegt, und über seine ganze Länge gleichmässig belastet;

Fig. 64.

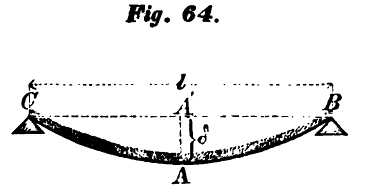
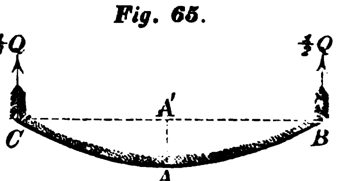


Fig. 65.



es sei die Totalbelastung Q, und die Bezeichnung der übrigen Grössen die früher gewählte. Nach einem analogen Raisonnement, wie im §. 63 gelangt man zur Ueberzeugung, dass die Darstellung in den

Figuren 65 und 66 geeignet sei, den Zustand des Prismas gegen Biegung zu beurtheilen. Es erscheint nämlich der zu untersuchende Fall schliesslich auf einen andern Fall (Fig. 66) zurückgeführt, wo das halbe Prisma AB an der Stelle A festgehalten, und an der Stelle B mit der Kraft $\frac{1}{2}Q$ nach aufwärts gezogen, überdiess aber der ganzen Länge nach von der gleichförmig vertheilten Last $\frac{1}{2}Q$ in Anspruch genommen wird. Für einen beliebig gewählten Punct N, dessen Coordinaten $AN' = x$ und $NN' = y$ sind, hat man daher bezüglich des Theiles BN das statische Kraftmoment

Fig. 66.

$$Rz = -\tfrac{1}{2}Q \cdot \overline{B'N'} + \tfrac{1}{2}Q \cdot \frac{\overline{B'N'}}{AB'} \cdot \tfrac{1}{2}\,\overline{B'N'} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}Q(\tfrac{1}{2}l - x) + \frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{2}l - x)^2.$$

Dasselbe ist nämlich die Summe zweier statischen Kraftmomente, welche von den beiden Anspruchsnahmen herrühren, und mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen sind. Dieser Ausdruck reducirt, gibt

$$Rz = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2).$$

Es wird daher im Sinne der gegebenen Theorie

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad (74),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{4}l^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

$$\text{und}\quad mty = -\frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{8}l^2 x^2 - \tfrac{1}{12}x^4) \quad \ldots \ldots \quad (76).$$

Da nun für $x = \frac{1}{2}l$ einerseits $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha$ und anderseits $y = \delta$ zu setzen ist, so erhält man als Grösse der Biegung

$$\delta = -\tfrac{5}{384} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77)$$

$$\text{und}\quad tg\,\alpha = -\tfrac{1}{24} \cdot \frac{Ql^2}{mt} = \frac{16\delta}{5l} \quad \ldots \ldots \quad (78).$$

Das negative Zeichen von δ zeigt an, dass die Biegungscurve oberhalb der Abscissenaxe liegt, wie diess auch schon bei dem III. Falle ad §. 63 wahrgenommen wurde.

Die Vergleichung der Werthe (72) und (77) lässt erkennen, dass die Biegung im IV. Falle nur $\frac{5}{8}$ von der im III. Falle beträgt, wenn hiebei die beiderseitigen Daten dieselben sind. Auch nimmt mit Benützung der Relation (77) die Gleichung der Biegungscurve (76) die Form an

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\delta} &= \frac{8}{5}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \\ \text{oder } \frac{y}{\delta} &= \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\left[6 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (79).$$

§. 66.

Graphische Darstellung der Biegungscurve für den IV. Fall. Zur Verzeichnung der Biegungscurve in dem besprochenen Falle ist es am zweckmässigsten, die letzte der beiden Gleichungen (79), nämlich

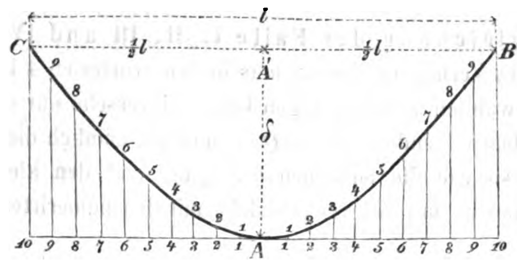
$$\frac{y}{\delta} = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\left[6 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)^2\right]$$

zu benützen. Diese Gleichung gilt für die beiden symmetrisch gelegenen Curvenhälften AB und AC (Fig. 64), und lässt in der That auch positive und negative Werthe von x zu, ohne dass das Zeichen dieser Grösse x einen Einfluss auf den Werth von y hat. Aus der nachfolgenden Tabelle können mehrere zusammengehörige Werthe von x und y entnommen werden.

$\pm\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)$	$\frac{y}{\delta}$	$\pm\left(\frac{x}{\frac{1}{2}l}\right)$	$\frac{y}{\delta}$
0·1	0·0120	0·6	0·4061
0·2	0·0477	0·7	0·5400
0·3	0·1064	0·8	0·6861
0·4	0·1869	0·9	0·8408
0·5	0·2875	1·0	1·0000

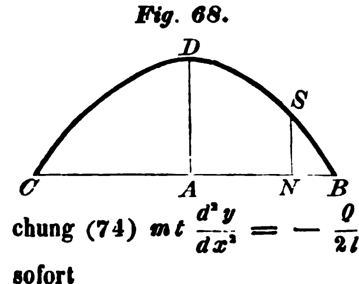
Hienach hat man die Biegungscurve (Fig. 67) construirt.

Fig. 67.



Als **zweite** graphische Versinnlichung kann die Fig. 68 dienen. In derselben ist für eine Abscisse $\overline{AN} = x$ die dazu gehörige Ordinate $\overline{NS} = \frac{1}{\varrho'}$, nämlich dem reciproken Werthe des Halbmessers der Krümmung gleich, welche an der Stelle N der Längenaxe in Folge der Biegung eintritt. Da nun vermöge der Gleichung (74) $mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{2l}\left(\frac{1}{4}l^2 - x^2\right)$ und wegen $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho'}$ sofort

Fig. 68.



$$\frac{mt}{\varrho'} = -\frac{Q}{2l}\left(\frac{1}{4}l^2 - x^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

wird, so sieht man leicht, dass die Coordinaten x und $\frac{1}{\varrho'}$ einer **Parabel** BDC angehören, welche in D ihren Scheitel und in der Richtung AD ihre Axe hat. Aus Anlass der negativen Werthe von $\frac{1}{\varrho'}$ hat man die Zeichnung oberhalb der Längenaxe, nämlich übereinstimmend mit der Lage der Krümmungsradien ausgeführt. Die **grösste** Ordinate AD ist in A für $x = o$ vorhanden, hat den numerischen Werth $\frac{Ql}{8\,mt}$ und entspricht dem **kleinsten** Krümmungshalbmesser $\varrho' = \frac{8\,mt}{Ql}$, während die Ordinaten an den Endpuncten B und C verschwinden, und mit unendlich grossen Krümmunghalbmessern correspondiren. Auch hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (77) für den numerischen Werth des erwähnten **Minimal-Krümmungshalbmessers** $\varrho' = \frac{5}{48} \cdot \frac{l^2}{\delta}$.

§. 67.

Vergleichung der Fälle I, II, III und IV. Zur Vergleichung des Verhaltens des Prismas in den erörterten 4 Fällen behalte man die gewählten Bezeichnungen bei, und versehe nur die als veränderlich zu betrachtenden Grössen Q, δ und ϱ', nämlich die zu tragende Belastung, so wie die entstehende Biegung und den kleinsten Krümmungshalbmesser mit Zeigern, welche mit den numerirten Fällen correspondiren.

Dieser Bemerkung gemäss hat man

$$\text{im I. Falle} \ldots \delta_1 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q_1 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_1 = \frac{mt}{Q_1 l},$$

$$\text{im II. Falle} \ldots \delta_2 = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_2 = \frac{2mt}{Q_2 l},$$

$$\text{im III. Falle} \ldots \delta_3 = \tfrac{1}{48} \cdot \frac{Q_3 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_3 = \frac{4mt}{Q_3 l}$$

$$\text{und im IV. Falle} \ldots \delta_4 = \tfrac{5}{384} \cdot \frac{Q_4 l^3}{mt} \text{ und } \varrho'_4 = \frac{8mt}{Q_4 l},$$

also auch

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 = \tfrac{1}{3} Q_1 : \tfrac{1}{8} Q_2 : \tfrac{1}{48} Q_3 : \tfrac{5}{384} Q_4 \quad \ldots \quad (81)$$

$$\text{und } \varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 = \frac{1}{Q_1} : \frac{2}{Q_2} : \frac{4}{Q_3} : \frac{8}{Q_4} \quad \ldots \quad (82).$$

Sind zuerst die 4 Belastungen einander gleich, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{48} : \tfrac{5}{384} \\ &= 128 : 48 : 8 : 5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (83)$$

und

$$\varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 = 1 : 2 : 4 : 8 \quad \ldots \quad (84).$$

Sollen hingegen die Belastungen so gewählt werden, dass die Biegungen in allen 4 Fällen gleich werden, so wäre wegen

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$$

sofort

$$\left.\begin{aligned} Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 &= 3 : 8 : 48 : \tfrac{384}{5} \\ &= 15 : 40 : 240 : 384 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (85)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varrho'_1 : \varrho'_2 : \varrho'_3 : \varrho'_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{12} : \tfrac{5}{48} \\ &= 16 : 12 : 4 : 5 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (86).$$

Sollen endlich die kleinsten Krümmungshalbmesser in allen 4 Fällen dieselben sein, so hätte man wegen $\varrho'_1 = \varrho'_2 = \varrho'_3 = \varrho'_4$

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 = 1 : 2 : 4 : 8 \quad \ldots \ldots \quad (87),$$

weiters aber

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{5}{48} \\ \qquad\qquad\quad = 16 : 12 : \ 4 : \ 5 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (88).$$

§. 68.

Bemerkung für die Anwendung. Um die gegebenen Formeln anwenden zu können, ist es nöthig, statt m und t die entsprechenden Werthe für den Modul der Materie und das Trägheitsmoment des Querschnittes zu setzen. Sei z. B. für einen Balken aus Tannenholz der Querschnitt ein Rechteck von der Breite $b = 6''$ und der Höhe $h = 8''$, der Modul $m = 16000$, die Länge $l = 80''$ und die Belastung $Q = 12$ Zentner, so hätte man unter Beibehaltung der Querschnittslage, wie in der Fig. 41, und unter Vernachlässigung des eigenen Gewichtes des Balkens, wegen $f = b\,h = 48\,\square''$, zunächst nach Formel (51) $t = \frac{1}{12} f h^2 = 256$; sofort aber

im I. Falle .. $\delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} = \frac{1}{2}''$ u. $tg\,\alpha = \frac{3\,\delta}{2\,l} = \frac{3}{320}$ daher $\alpha = 0^0\,32'$,

„ II „ .. $\delta = \frac{1}{8} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} = \frac{3}{16}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{4\,\delta}{3\,l} = \frac{1}{320}$ „ $\alpha = 0^0\,11'$,

„ III „ .. $\delta = \frac{1}{48} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} = \frac{1}{32}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{3\,\delta}{l} = \frac{3}{2560}$ „ $\alpha = 0^0\ 4'$,

und

„ IV. „ .. $\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t} = \frac{5}{256}''$ „ $tg\,\alpha = \frac{16\,\delta}{5\,l} = \frac{1}{1280}$ „ $\alpha = 0^0\ 2\frac{2}{3}'$.

§. 69.

Combinirung der Fälle I und II, dann III und IV. Ist das materielle Prisma an einem Ende festgehalten, und sowohl von einer Belastung Q_1 am andern Ende, als auch von einer nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung zwischen den Fällen I und II. Es leuchtet ein, dass bei der vorausgesetzten Kleinheit der Formveränderung, die entstehende totale Biegung δ sodann aus den beiden Biegungen δ_1 und δ_2, welche durch die Belastungen Q_1 und Q_2 einzeln hervorgebracht würden, bestehen werde, weil in der Fundamentalgleichung (47) das statische Kraftmomen $'R\,x$ aus der algebraischen Summe der statischen

Momente der einzelnen Kräfte zusammengesetzt ist, und die Summirung dieser Wirkungen sich auch auf die folgenden Gleichungen (48) und (49) erstreckt. In dieser Erkenntniss hat man

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{Q_1 l^3}{mt} + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{mt} = \tfrac{1}{3} (Q_1 + \tfrac{3}{8} Q_2) \frac{l^3}{mt},$$

woraus folgt, dass auf die Grösse der Biegung die gleichförmig vertheilte Last Q_2 denselben Einfluss hat, wie wenn $\frac{3}{8}$ dieser Last am freien Ende concentrirt und mit der Belastung Q_1 vereinigt würden.

Auf ähnliche Weise ist die Totalbiegung δ zu berechnen, wenn das Prisma auf beiden Enden aufruht, und mit den Belastungen Q_3 und Q_4 in Anspruch genommen würde, von welchen erstere in der Mitte concentrirt, letztere aber der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilt wäre. Man hat nämlich unter diesen Umständen die ad III und IV erörterten Fälle zu combiniren, und demgemäss zu setzen

$$\delta = \delta_3 + \delta_4 = \tfrac{1}{48} \cdot \frac{Q_3 l^3}{mt} + \tfrac{5}{384} \cdot \frac{Q_4 l^3}{mt} = \tfrac{1}{48} (Q_3 + \tfrac{5}{8} Q_4) \frac{l^3}{mt}.$$

In diesem Falle hat also auf die Biegungsgrösse die gleichförmig vertheilte Belastuug Q_4 denselben Einfluss, als wenn $\frac{5}{8}$ dieser Belastung in der Mitte des Prismas mit der Last Q_3 vereinigt würden.

§. 70.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes des Prismas. Das eigene Gewicht des Prismas ist als eine gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach zu betrachten, und der Einfluss desselben auf die Biegung kann daher im Sinne des vorigen §. beurtheilt werden. Auch hat man mit Rücksicht auf den II. und IV. Fall wegen $Q_2 = Q_4 = fl\gamma$, wo γ das Gewicht der cubischen Einheit des Materials bedeutet, die durch das eigene Körpergewicht entstehenden Biegungen

$$\text{ad II} \ldots \delta_2 = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{Q_2 l^3}{mt} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{fl\gamma l^3}{mfd^2} = \frac{l^4 \gamma}{8 m d^2}$$

$$\text{und ad IV} \ldots \delta_4 = \tfrac{5}{384} \cdot \frac{l^4 \gamma}{m d^2},$$

welche daher hinsichtlich des Querschnittes nur von der Grösse d^2 abhängen, und mit der 4. Potenz der Länge l zunehmen. Sei z. B. für eine schmiedeeiserne Schiene vom rechteckigen Querschnitte (Fig. 41)

$l = 100''$, $h = 3''$, $\gamma = \frac{1}{400}$ Zentner und $m = 250000$, also wegen der Formel (51) $d^2 = \frac{1}{12} h^2 = \frac{3}{4}$, so würde sofort

$$\delta_2 = \tfrac{1}{6}'' \text{ und } \delta_4 = \tfrac{5}{288}''.$$

§. 71.

Bestimmung der neutralen Schichte in den Fällen I, II, III und IV. Zu diesem Behufe hat man nur die Gleichung (44) $e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z}$ als eine Function von x auszudrücken. Wird dabei wegen der kleinen Biegungen näherungsweise $\sin\varphi = \frac{dy}{dx}$ gesetzt, so erhält man Folgendes:

Ad I). Nach §. 59 ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{mt}(lx - \frac{1}{2}x^2)$ und $z = l - x$, also auch

$$e = \frac{d^2 Q (lx - \frac{1}{2}x^2)}{mt(l-x)} = \frac{3d^2\delta}{l^3}\left(\frac{lx - \frac{1}{2}x^2}{l-x}\right),$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = \frac{3d^2}{l^2}\left(\frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1 - \left(\frac{x}{l}\right)}\right].$$

Für ein Rechteck (Fig. 41) ist $d^2 = \frac{1}{12}h^2$ und

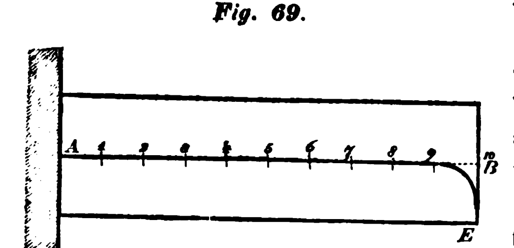
$$\frac{e}{\delta} = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)\left[1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1 - \left(\frac{x}{l}\right)}\right].$$

Hätte man z. B. $h = 10''$, $l = 100''$ und $\delta = \frac{1}{2}''$, so könnte man die Werthe von e aus folgender Tabelle entnehmen:

$\frac{x}{l}$	$\frac{e}{\delta}$	x	e	$\frac{x}{l}$	$\frac{e}{\delta}$	x	e
0·1	0·0003	10″	0·0001″	0·6	0·0026	60″	0·0013″
0·2	0·0006	20″	0·0003″	0·7	0·0039	70″	0·0020″
0·3	0·0009	30″	0·0005″	0·8	0·0060	80″	0·0030″
0·4	0·0013	40″	0·0007″	0·9	0·0124	90″	0·0064″
0·5	0·0019	50″	0·0010″	1·0	∞	100″	∞

Nach dieser Tabelle ist in der Fig. 69 die Curve AE gezeichnet, welche die neutrale Schichte im Längendurchschnitte bildet. Man entnimmt, dass die Gleichung zwischen e und x vom 2. Grade ist, und die Curve AE insbesondere eine Hyperbel vorstellt, für welche die durch B gezogene Verticale eine Assymtote ist, wenn die Längenaxe AB geradlinig gezeichnet wird. Zugleich bemerkt man, dass die neutrale Schichte durch den grössten Theil der Länge so nahe mit der Längenaxe zusammenfällt, dass man die Differenz mittelst Zeichnung gar nicht darzustellen im Stande ist.

Fig. 69.



Ad II). Nach §. 61 ist $\frac{dy}{dx} = \frac{Qx}{6mtl}(3l^2 - 3lx + x^2)$ und $z = \frac{1}{2}(l - x)$, also auch

$$e = \frac{Qd^2x}{3mtl}\left(\frac{3l^2 - 3lx + x^2}{l - x}\right) = \frac{8d^2\delta x}{l^4}\left(\frac{l^2 - lx + \frac{1}{3}x^2}{l - x}\right),$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = 8\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)\left[\frac{1 - \left(\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{l}\right)}\right].$$

Construirt man hienach die neutrale Schichte im Längendurchschnitte, so wird man sich gleichfalls überzeugen, dass der grösste Theil der Längenaxe mit der erwähnten Schichte bis auf unwesentliche Differenzen zusammenfällt.

Ad III). In diesem Falle besteht die Curve, welche die neutrale Schichte im Längendurchschnitte vorstellt, aus 2 symmetrischen Theilen, von welchen jeder Theil nach der Gleichung ad I zu construiren ist, wenn man daselbst $\frac{1}{2}l$ statt l setzt. Es leuchtet ein, dass auch in diesem Falle die neutrale Schichte ohne merklichen Fehler grösstentheils durch die Schwerpuncte der Querschnitte gehend angenommen werden kann.

Ad IV). Nach §. 65 ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2mtl}(\frac{1}{4}l^2x - \frac{1}{3}x^3)$ und

$$z = \frac{Rz}{R} = \frac{-\frac{1}{2}Q(\frac{1}{2}l - x) + \frac{Q}{2l}(\frac{1}{2}l - x)^2}{-\frac{1}{2}Q + \frac{Q}{l}(\frac{1}{2}l - x)} = \frac{\frac{1}{4}l^2 - x^2}{2x},$$

also auch

$$e = -\frac{d^2 Q}{mt\,l} \cdot \frac{x^2(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{\frac{1}{4}l^2 - x^2} = \frac{384}{5} \cdot \frac{d^2\delta}{l^4} \cdot \frac{x^2(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{\frac{1}{4}l^2 - x^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{e}{\delta} = \frac{384}{5}\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)^2\left\{1 + \frac{\frac{8}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2}{1 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2}\right\}.$$

Wird hienach die Form der neutralen Schichte construirt, so bemerkt man abermals, dass die Entfernung e derselben von der Längenaxe für solche Abscissen von x, welche sich dem Werthe $\pm\frac{1}{2}l$ nicht allzusehr nähern, als verschwindend klein angesehen werden kann. Es ist übrigens merkwürdig, dass die fragliche Grösse e in allen 4 Fällen sogar gegen die kleine Biegung δ zumeist verschwindet *).

---

*) Anmerkung. Es ist übrigens nicht nöthig, die zur Bestimmung der Function zwischen e und x eingeführten Näherungen wirklich anzuwenden. Man kann diese Function auch ohne irgend welche Vernachlässigung finden. Es wird genügen, die fragliche Methode nur für einen, z. B. den I. Fall, anzugeben. Ist nämlich $d\sigma$ das Bogenelement der Biegungscurve und behält man die übrigen Bezeichnungen bei, so ist $\varrho' = \frac{d\sigma}{d\varphi}$, $d\sigma = \frac{dx}{\cos\varphi}$ und $\varrho' = \frac{dx}{d\varphi\cos\varphi} = \frac{dx}{d\sin\varphi}$, daher wegen $z = l - x$ und $R = Q$ nach der Gleichung (45)

$$\frac{dx}{d\sin\varphi} = \frac{d^2}{l - x} \cdot \left(\frac{mf}{Q} + \sin\varphi\right).$$

Hieraus folgt

$$(l - x)\ dx = d^2\left[\frac{mf}{Q}\,d\sin\varphi + \sin\varphi\ d\sin\varphi\right]$$

und durch Integration

$$lx - \frac{1}{2}x^2 = d^2\left[\frac{mf}{Q}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi^2\right],$$

sofort aber

$$\sin\varphi = -\frac{mf}{Q} + \sqrt{\frac{m^2f^2}{Q^2} + \frac{2lx - x^2}{d^2}},$$

endlich

§. 72.

Bestimmung des Moduls m aus der Grösse der Biegung. So wie die Grösse der Biegung aus dem Modul m und den übrigen Grössen t, Q und l berechnet werden kann, so lässt sich auch umgekehrt die Grösse m bestimmen, wenn die Biegung δ aus einer wirklichen Messung bekannt ist. Die Berücksichtigung der Fälle III und IV erscheint zu derartigen Versuchen als die geeignetste. Wird nämlich ein Prisma auf beiden Enden aufgelegt, und in der Mitte mit der Belastung Q_3 in Anspruch genommen, das eigene Körpergewicht aber mit Q_4 bezeichnet, so hat man offenbar nach dem §. 69

$$\delta = \tfrac{1}{48}\,(Q_3 + \tfrac{5}{8}Q_4)\,\frac{l^3}{mt},\ \text{daher auch}$$

$$m = \tfrac{1}{48}\,(Q_3 + \tfrac{5}{8}Q_4)\,\frac{l^3}{\delta t}.$$

Man kann übrigens das Resultat für den Modul auch unabhängig von dem eigenen Körpergewichte machen. Zu diesem Behufe lasse man die Belastung Q_3 um ΔQ_3, und die Biegung δ um $\Delta\delta$ zunehmen, und beachte, dass sodann

$$\Delta\delta = \frac{\Delta Q_3 l^3}{48\,m t},\ \text{also auch}$$

$$m = \frac{\Delta Q_3 l^3}{48\,t\,\Delta\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$e = \frac{d^2 \sin\varphi}{s} = \frac{d^2}{l-x}\left[-\frac{mf}{Q} + \sqrt{\frac{m^2f^2}{Q^2} + \frac{2lx-x^2}{d^2}}\right]$$

oder

$$\frac{e}{\delta} = \frac{l^2}{3\delta^2}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{x}{l}}\right)\left[-1+\sqrt{1+\frac{9\delta^2 d^2}{l^4}\left(\frac{2x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right)}\right],$$

welche Formel nicht nur für sehr kleine Biegungen, sondern allgemein gilt, wenn nur die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, und l die horizontale Projection der Biegungscurve bedeutet Für sehr kleine Biegungen folgt wieder die genäherte Formel ad I

$$\frac{e}{\delta} = \frac{3d^2}{l^2}\cdot\left\{\frac{\frac{x}{l}-\frac{x^2}{2l^2}}{1-\frac{x}{l}}\right\} = \frac{3d^2}{l^2}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)\left\{1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)}{1-\left(\frac{x}{l}\right)}\right\}.$$

wird, wonach der Modul aus der betreffenden Belastungs- und beobachteten Biegungszunahme berechnet werden kann.

Die Werthe des Moduls für die verschiedenen Materialien, welche nach dieser gleichsam indirecten Methode gefunden werden, stimmen für die Praxis genau genug mit jenen Resultaten überein, welche auf die im §. 25 erwähnte directe Art erhalten werden. Nur sind die ersteren in der Regel etwas grösser, als die letzteren. Zur Erkläruug dieser bemerkenswerthen Thatsache können 3 Gründe angegeben werden:

1. In Folge der genäherten Gleichung (46) $\varrho = \varrho'$ wird der Krümmungshalbmesser der Biegungscurve etwas zu klein, daher die berechnete Biegung δ etwas grösser, als die wirklich vorhandene. Indem nun das Mass dieser letzteren aus Versuchen gefunden, und in die betreffenden Formeln für m substituirt wird, so entsteht in denselben ein etwas kleinerer Nenner, als die Theorie angibt, daher ein etwas grösseres Resultat für m, als die directen Versuche ergeben.

2. In der Fundamentalgleichung (47) ist eine zweite Näherung dadurch eingeführt worden, dass man wegen der vorausgesetzten geringen Biegungen den Werth des Krümmungshalbmessers

$$\varrho' = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \text{ mit } \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

verwechselt, und daher abermals etwas zu klein angenommen hat. Diese Näherung übt daher auf den Werth des Moduls, wenn solcher aus Versuchen über die Biegung bestimmt wird, einen analogen Einfluss aus, wie ad 1 angegeben wurde.

3. Nach den §§. 12 und 13 ist der Modul innerhalb der Gränzen der Elasticität streng genommen keine constante Grösse, sondern vielmehr nur als ein Durchschnittswerth anzusehen. Die Erörterungen über die speciellen Materialien in den §§. 18 bis 23 lassen erkennen, dass dieser Durchschnittswerth desto grösser ausfällt, je geringer die hervorgerufenen Spannungen oder Pressungen sind. Da nun bei der Methode zur directen Bestimmung des Moduls die Anspruchsnahme des Materials sich gleichmässig über den ganzen Querschnitt vertheilt, während bei der indirecten Methode diese Vertheilung eine ungleichförmige ist, indem die Spannungen und Pressungen in den Fasern je nach ihrer

Entfernung von der neutralen Schichte von Null an bis zu einem gewissen Grade wachsen, so erkennt man leicht, dass der Modul nach der indirecten Methode abermals etwas grösser, als nach der directen ausfallen werde, wenn man beiderseits, wie sich diess von selbst versteht, ein systemmässiges Verfahren beobachtet.

Die fraglichen Differenzen sind übrigens, wie bemerkt, geringfügig genug, um dieselben ausser Acht lassen zu dürfen und sonach die Gleichheit des Moduls für die Ausdehnung, Zusammendrückung und Biegung um so mehr anzunehmen, als aus Anlass der Verschiedenheit in der Materialsqualität weit grössere Unregelmässigkeiten hervorgerufen werden können.

§. 73.

Aus einem runden Baumstamm einen vierkantigen Balken von der grössten Steifigkeit zu zimmern. Es sei (Fig. 70) der Querschnitt des Baumstammes ein Kreis, dessen Mittelpunct in O sich befindet, das Rechteck $ABCD$ aber der Querschnitt für den zu zimmernden Balken. Man betrachte diesen rechteckigen Querschnitt in der Stellung der Fig. 41 und setze

Fig. 70.

die Breite AC . . . . $= b$,
„ Höhe BC . . . . $= h$,
den Durchmesser des Kreises AB $= c$,
die Abscisse AE . . . . $= x$,
„ Ordinate CE . . . . $= y$,
„ Fläche $ABCD$ . . . . $= f$,
und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung auf die durch den Schwerpunct O mit der Breite AC parallel gehende Axe . . . . $= t$.

Dieser Bezeichnung gemäss hat man $y = \sqrt{cx - x^2}$, $b = \sqrt{cx}$, $h = \sqrt{c(c-x)}$, $f = bh = c\sqrt{cx - x^2}$, und nach der Formel (51) $t = \frac{1}{12} f h^2 = \frac{c^2}{12}\sqrt{x(c-x)^3}$. Die Steifigkeit des gezimmerten Balkens wird am grössten, wenn die Biegung am kleinsten, daher t ein Maximum wird. Indem nun t mit $x(c-x)^3$ variirt, hat man behufs der Bestimmung des fraglichen Maximums

$$\frac{d[x(c-x)^3]}{dx} = (c-x)^3 - 3(c-x)^2 x = (c-x)^2 (c-4x) = 0,$$

hieraus aber $x = \frac{1}{4}c$, für welchen Werth $\frac{d^2[x(c-x)^3]}{dx^2}$ negativ wird.

Es wird also der beabsichtigte Zweck erreicht wenn man $AE = EO = OF = BF = \frac{1}{4}AB$ macht, nämlich den Durchmesser in 4 gleiche Theile theilt, und sodann zur Bestimmung der Puncte C und D die Perpendikel CE und DF auf AB construirt. Nach dieser Anordnung erhält man $b = \frac{1}{2}c$ und $h = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, d. h. die Breite $AC =$ dem Halbmesser AO, so wie $\sphericalangle CAB = 60^0$ und $\sphericalangle CBA = 30^0$. Auch ist $b:h = 1:\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}:1 = 1:1\cdot7321 = 0\cdot5774:1$, ferner

$$f = bh = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 0\cdot4330\,c^2 = 0\cdot5514\,F \text{ und}$$

$$t = \frac{1}{12}fh^2 = \frac{c^4\sqrt{3}}{64} = 0\cdot0271\,c^4 = 0\cdot5514\,T,$$

wobei $F = \frac{c^2\pi}{4}$ die Kreisfläche, und $T = \frac{c^4\pi}{64}$ der Formel (53) gemäss das Trägheitsmoment derselben bezeichnet. Die Biegung dieses steifsten vierkantigen Balkens wäre daher $\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0\cdot5514} = 1\cdot8138$ mal grösser, als die des runden unbezimmerten Stammes, wenn die übrigen Umstände als gleich, und überdiess die allgemeinen Voraussetzungen als verhanden angenommen werden.

Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragmoment und Tragvermögen.

§. 74.

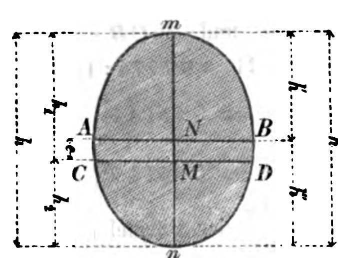
Anspruchsnahme des Materials. Diese Anspruchsnahme besteht in Spannungen und Pressungen, welche zu Folge der Biegung in den Fasern eintreten. Die grösste Spannung s und die grösste Pressung p in einem beliebigen Querschnitte findet man nach dem §. 46 aus den Gleichungen (37) $\frac{sT}{h_1} = RZ$ und $\frac{pT}{h_2} = RZ$, oder da nach dem §. 52 $\frac{T}{Z} = \frac{t}{z}$ ist, auch aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} \frac{st}{h_1} = Rz \\ \text{und } \frac{pt}{h_2} = Rz \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90).$$

Das erste Glied in jeder dieser beiden Gleichungen stammt von von dem statischen Momente der hervorgerufenen Widerstände in den betreffenden Querschnitten her, und ist somit auf eine doppelte Weise ausgedrückt; das zweite Glied hingegen stellt das statische Moment der einwirkenden Kräfte mit Rücksicht auf den Hebelsarm z vor. Aus den Gleichungen (90) findet man

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h_1 R z}{t} \\ \text{und } p &= \frac{h_2 R z}{t} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (91).$$

Fig. 71.



Es ist aber mit Rücksicht auf die Fig. 71 unter Beibehaltung der Bezeichnungen in den §§. 44, 45 und 54 offenbar

$$h_1 = h' + e$$
$$\text{und } h_2 = h'' - e$$

daher auch

$$s = \frac{h' R z}{t} + \frac{e R z}{t}$$
$$\text{und } p = \frac{h'' R z}{t} - \frac{e R z}{t},$$

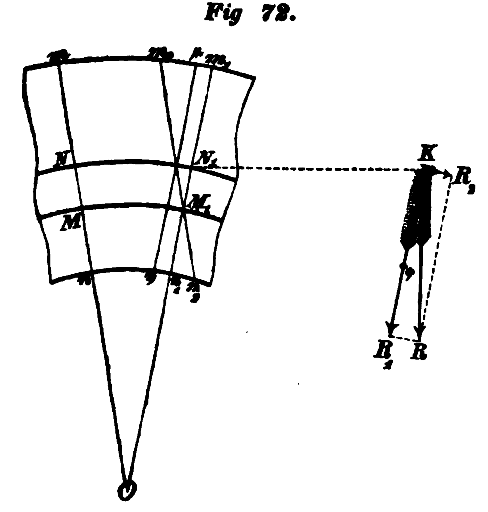
und endlich, da man nach der Gleichung (44) $e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z}$, weiters aber $t = f d^2$ setzen kann,

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h' R z}{t} + \frac{R \sin\varphi}{f} \\ \text{und } p &= \frac{h'' R z}{t} - \frac{R \sin\varphi}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (92).$$

Diese Gleichungen sind eben so wichtig, wie merkwürdig. Sie lehren zunächst, dass die grösste Spannung s aus der Summe zweier Spannungen $s_1 = \frac{h' R z}{t}$ und $s_2 = \frac{R \sin\varphi}{f}$, hingegen die grösste Pressung p aus der Differenz zwischen der Pressung $p_1 = \frac{h'' R z}{t}$ und der vorhin mit s_2 bezeichneten Spannung bestehe, wobei, wie zu ersehen ist, s_1 und p_1 diejenigen Anspruchsnahmen vorstellen, welche eintreten würden, wenn die neutrale Axe genau durch

den Schwerpunct des Querschnittes ginge, während die Spannung s_2 von der Seitenkraft $R_2 = R \sin \varphi$ (Fig. 21) herrührt, und gewissermassen als die Correction der Grössen s_1 und p_1 für den Fall anzusehen ist, wenn die neutrale Axe in dem betreffenden Querschnitte eine andere Lage hätte. Dieser Analysirung gemäss lässt sich die Anspruchsnahme der Fasern mittelst der Fig. 72 anschaulich machen, in welcher $m n$ und $m_1 n_1$ die Lagen zweier unendlich nahen Querschnitte nach der Biegung vorstellen, die ursprünglich zu einander parallel, also wie $m n$ und $m_2 n_2$ gelegen sind. Hiebei ist $M M_1$ die neutrale Schichte im Längendurchschnitte, $N N_1$ aber die durch die Schwerpuncte der Querschnitte N und N_1 gehende Längenaxe des Prismas. Würde nun die letztere mit der neutralen

Fig 72.



Schichte zusammenfallen, oder $M N = e = o$ sein, so wäre $\mu \eta$ anstatt $m_1 n_1$ die Lage des Querschnittes $m_2 n_2$ nach der Biegung, und sodann $m_2 \mu$ die durch die Spannung s_1 hervorgerufene Ausdehnung, hingegen $n_2 \eta$ die durch die Pressung p_1 hervorgerufene Zusammendrückung. Liegt aber, wie im Allgemeinen die neutrale Schichte anders, so sind μm_1 und ηn_1 die der Spannung s_2 entsprechenden Correcturen, um welche die eben erwähnte Ausdehnung $m_2 \mu$ vermehrt und die Zusammendrückung $n_2 \eta$ vermindert werden müssen, um die eigentlichen Längenveränderungen zu erhalten. Es ist nämlich

$$m_1 m_2 = \mu m_2 + \mu m_1 \text{ und}$$
$$n_1 n_2 = \eta n_2 - \eta n_1.$$

Man bemerkt zugleich, dass die Kraft

$$s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f} = \frac{R_2}{f}$$

einen Werth hat, welcher gleichfalls vorhanden wäre, wenn das Prisma mit der Kraft R_2 genau nach der Länge gezogen würde.

Zur Bestimmung der Werthe (92) muss man die Form der Biegungscurve kennen. Nach §. 52 hat die Vernachlässigung von e auf diese Form einen unwesentlichen Einfluss, daher auch dieselbe als zulässig erkannt wurde.

Aus diesem Grunde ist es erlaubt, die ersten Glieder $\frac{h' R z}{t}$ und $\frac{h'' R z}{t}$ in den Gleichungen (92) so zu berechnen, als wenn die neutrale Axe durch den Schwerpunct des Querschnittes ginge, gleichzeitig aber unter dieser Bedingung die Biegungscurve aufzusuchen, und hiernach das 2. Glied $\frac{R \sin\varphi}{f}$ in den genannten Gleichungen zu bestimmen.

Wegen der vorausgesetzten kleinen Biegung kann man überdiess näherungsweise $\sin\varphi = \frac{dy}{dx}$ setzen*). Z. B. Wäre das Prisma, wie in der Fig. 58, an einem Ende A festgehalten und am andern Ende B mit der Last Q in Anspruch genommen, und werden die dortigen Bezeichnungen beibehalten, so hätte man $R = Q$, sodann aber nach der Gleichung (58) $R z = Q(l - x)$ und nach der Gleichung (59) $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{mt}(lx - \frac{1}{2}x^2)$, daher auch nach den Gleichungen (92)

$$s = s_1 + s_2 = \frac{h' Q}{t}(l - x) + \frac{Q^2}{mtf}(lx - \tfrac{1}{2}x^2)$$

und $p = p_1 - s_2 = \frac{h'' Q}{t}(l - x) - \frac{Q^2}{mtf}(lx - \frac{1}{2}x^2)$.

Zur näheren Specialisirung sei (wie im §. 68) der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten $b = 6''$ und $h = 8''$, daher $h' = h'' = \frac{1}{2}h = 4''$ und $t = \frac{1}{12}fh^2 = 256$; es sei ferner das Prisma aus Tannenholz, und für selbes $m = 16000$, endlich $Q = 12$ Zentner anzunehmen. Hiernach wird

$$s_1 = p_1 = \tfrac{3}{16}(l - x),\quad s_2 = \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2),$$

$$s = \tfrac{3}{16}(l - x) + \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \text{ und}$$

$$p = \tfrac{3}{16}(l - x) - \tfrac{3}{4096000}(lx - \tfrac{1}{2}x^2).$$

Aus folgender Tabelle kann man die grössten Spannungen und Pressungen per □'' in Zentnern in verschieden gelegenen Querschnitten entnehmen, wobei $l = 80''$ gesetzt wurde.

---

*) Man könnte selbstverständlich auch des genauen Werthes für $\sin\varphi$ nach der Anmerkung ad §. 71 sich bedienen, welcher auch für grössere Biegungen giltig wäre.

x	s_1	s_2	$s = s_1 + s_2$	p_1	p_2	$p = p_1 - s_2$
0″	15·000	0	15·000	15·000	0	15·060
10″	13·135	0·001	13·126	13·125	0·001	13.124
20″	11·250	0·001	11·251	11·250	0·001	11·249
30″	9·375	0·001	9·376	9·375	0·001	9·374
40″	7·500	0·002	7 502	7·500	0·002	7·498
50″	5·625	0·002	5·627	5·625	0·002	5·623
60″	3·750	0·002	3 752	3·750	0·002	3·748
70″	1·875	0·002	1·877	1·875	0·002	1·873
80″	0	0·002	0·002	0	0·002	— 0·002

Diese Tabelle lehrt insbesondere:

1. Dass die grösste Anspruchsnahme der Fasern für $x = 0$, also in dem festgehaltenen Querschnitte in A statt finde;

2. dass die Werthe von s_1 und p_1 von 15 Zentnern bis 0 abnehmen, hingegen gleichzeitig die von s_2 von 0 bis 0·002 Zentner wachsen, wenn x von 0 bis l zunimmt;

3. dass für $x = l$, also in dem Endquerschnitte nur die alleinige Anspruchsnahme s_2 vorhanden sei, demzufolge $s = 0·002$ und $p = -0·002$ werden, und daher beiderseits gleiche Spannungen entstehen, indem offenbar der negative Werth von p gleichfalls eine Spannung bedeutet;

4. dass die Werthe von s_2 gegen s_1 und p_1 wegen ihrer Kleinheit grösstentheils, nämlich in so lange ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden dürfen, als x der Länge l sich nicht allzusehr nähert, dass aber diese Vernachlässigung in dem Falle, als x von l nicht viel verschieden ist, nicht mehr statt finden dürfe;

5. endlich, dass bei dem Umstande, als die ad 4 erwähnte Vernachlässigung mit der Hypothese $e = 0$ gleichzuhalten ist, auch ge-

sagt werden könne, es sei bezüglich der Beurtheilung der Anspruchsnahme hinreichend genau, die neutrale Schichte durch die Schwerpuncte der Querschnitte gehen zu lassen, wenn diese letzteren nicht zu nahe an jene Stelle gewählt werden, wo der Krümmungshalbmesser unendlich gross ist.

Die vorigen Schlussfolgerungen beziehen sich zwar insbesondere auf das gewählte Beispiel, sie werden jedoch der Hauptsache nach beinahe immer auf dieselbe Weise sich darstellen, und es wird in den meisten Fällen, wenn es sich nur um sehr kleine Biegungen handelt, und hiebei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden, zulässig erscheinen, die neutrale Schichte durch die Längenaxe gehen zu lassen, wenn man nur denjenigen Stellen dieser letzteren sich nicht allzu sehr nähert, an welchen unendlich grosse Krümmungshalbmesser vorhanden sind. Man wird gegen die auf diese Weise sich ergebende Abkürzung um so weniger etwas einzuwenden haben, als in der That der zu vernachlässigen beabsichtigte Werth von e in den betreffenden Querschnitten nach Inhalt des §. 71 so klein gefunden wurde, dass er nicht wahrnehmbar, oder doch als unwesentlich zu betrachten ist.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkung kann man sich erlauben, in vorkommenden Fällen statt den Formeln (92) die genäherten

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h' R z}{t} \\ \text{und } p &= \frac{h'' R z}{t} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (93)$$

zu gebrauchen, wenn nur hierin z nicht zu klein wird, weil $z = 0$ mit $\varrho' = \infty$ correspondirt.

§. 75.

Gefährlicher Querschnitt. So wie im §. 26 nenne man auch hier von allen Querschnitten des materiellen Prismas denjenigen den gefährlichen Querschnitt, in welchem vergleichsweise bei hinreichender Grösse der einwirkenden Kräfte zuerst die Gränze der Elasticität bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung erreicht, daher die geringste Sicherheit für den Zusammenhang der Materie vorhanden ist. Auf diesen besonderen Querschnitt, welcher die schwächste Stelle des Prismas bezeichnet, ist das vorzüglichste Augenmerk zu richten, weil die nöthige Sicherheit, wenn sie an dieser Stelle vorhanden ist, um so mehr an allen übri-

gen Stellen vorhanden sein wird. Die Formeln (98) zeigen, dass die Spannung s und die Pressung p desto grösser werden, je grösser das statische Kraftmoment Rz ist, und dass daher für den gefährlichen Querschnitt dieses Moment Rz ein Maximum werden muss. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass es sich nicht um ein analytisches, sondern vielmehr um ein numerisches Maximum handelt, obgleich in manchen Fällen beide Maxima identisch werden können. Uebrigens beschränkt man vorläufig sich nur auf solche Fälle, wo keine Wendepuncte in der Biegungscurve vorkommen*). Da nach dem §. 52 für sehr kleine Biegungen $\varrho' = \frac{m\,t}{Rz}$ gesetzt werden kann, daher der grösste Werth von Rz den kleinsten Werth von ϱ' bedingt, so folgt, dass sodann der gefährliche Querschnitt dort sich befindet, wo der Krümmungshalbmesser ϱ' der Biegungscurve ein numerisches Minimum wird.

Indem man nun auf die im §. 58 bezeichneten 4 Fälle übergeht, erkennt man sogleich, dass der gefährliche Querschnitt

im I. und II. Falle laut der §§. 60 und 62 in A, wo das Prisma festgehalten wird,

im III. und IV. Falle aber laut der §§ 64 und 66 in der Mitte der Länge des Prismas liegt, weil an diesen Stellen stets der Krümmungshalbmesser am kleinsten wird**).

§. 76.

Bemerkungen über das Gleichgewicht. Tragmoment. Ist das Gleichgewicht zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt vor-

*) Anmerkung. Bezüglich derjenigen Fälle, wo die Biegungscurve Wendepuncte hat, enthält das 2. Kapitel des 1. Abschnittes im 2. Hauptstücke das Nöthige.

**) Wollte man annehmen, dass die entwickelten Formeln auch dann giltig wären, wenn die Elasticitätsgränzen überschritten werden, so könnte man die Stelle für den gefährlichen Querschnitt auch die Bruchstelle nennen, weil sodann daselbst bei hinreichender Anspruchsnahme der Bruch des Prismas eintreten müsste. Da jedoch die angestellten Untersuchungen nicht so weit ausgedehnt werden dürfen, so ist es um so mehr angezeigt, die Benennung Bruchstelle zu umgehen, als man in der Praxis die Körper keineswegs zu brechen, sondern nur ohne Gefahr ihres Bestandes in Anspruch zu nehmen hat

handen, so herrscht offenbar auch Gleichgewicht in Beziehung auf alle übrigen Querschnitte. Zur Beurtheilung des Gleichgewichtes bei dem der Biegung ausgesetzten Prisma ist es daher genügend, die betreffenden Bedingungen hinsichtlich des gefährlichen Querschnittes aufzustellen. Man hat nun nach den Gleichungen (93) unter der dort angeführten Beschränkung allgemein die Relation

$$\frac{st}{h'} = \frac{pt}{h''} = Rz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94),$$

und in Gemässheit derselben Folgendes zu beachten:

1. Das statische Widerstandsmoment ist entweder $\frac{st}{h'}$ oder $\frac{pt}{h''}$, wonach man entweder die Spannung s der gespanntesten oder aber die Pressung p der am meisten gepressten Fasern mit dem Trägheitsmomente des Querschnittes in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct anzunehmende neutrale Axe multiplicirt, und durch den Abstand h' der gespanntesten oder beziehungsweise h'' der gepresstesten Fasern von jener Axe dividirt.

2. Da zu Folge des §. 41 $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$ die Anspruchsnahme (Spannung, Pressung) der Fasern in der Entfernung 1. von der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe bezeichnet, so kann auch das Widerstandsmoment, wie bereits im §. 46 selbst ohne Vernachlässigung des Werthes von e gezeigt wurde, gefunden werden, wenn man die vorerwähnte Anspruchsnahme in der Entfernung 1 von der neutralen Axe mit dem Trägheitsmomente t multiplicirt.

3. Wenn im gefährlichen Querschnitte die Elasticitätsgränze entweder bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung in den von der neutralen Axe beiderseits am entferntest gelegenen Fasern erreicht wird, so ist das grösste zulässige Widerstandsmoment vorhanden, welches ohne Gefahr für den Bestand des Prismas keine Steigerung mehr erfahren kann. Dieses Widerstandsmoment soll im Nachfolgenden Tragmoment heissen, und dessen Werth mit M bezeichnet werden *).

---

*) Wollte man annehmen, dass die entwickelten Formeln auch für den Bruch giltig wären, so würde man auf ähnliche Weise auch zur Kenntniss des Bruchmomentes gelangen können. Allein abgesehen davon, dass die

Dieser Werth von M wird sodann zur Kenntniss führen, wie weit das statische Moment Rx der einwirkenden Kräfte in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt mit Sicherheit gesteigert werden, und wie gross die diessfalls zu tragende Belastung sein könne.

§. 77.

Berechnung des Tragmomentes. Es leuchtet ein, dass das Tragmoment gefunden wird, wenn entweder die Spannung s oder die Pressung p die Elasticitätsgränze erreicht, also in der Gleichung (94) im Sinne des §. 12 entweder $s = a$ oder $p = r$ gesetzt wird.

Hiernach ist das Tragmoment

$$M = \left\{ \begin{array}{c} \text{entweder } \frac{a\,t}{h'} \\ \text{oder } \frac{r\,t}{h''} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (95),$$

und es ist von diesen alternativen Werthen selbstverständlich der kleinere anzunehmen, da das Widerstandsmoment keinen der beiden Werthe überschreiten, sondern höchstens den kleineren erreichen darf.

Man hat also abweichend von den bisherigen Theorien im Allgemeinen 2 Formeln zur Bestimmung des Tragmomentes, von welchen jedoch nur die Eine Mass und Ziel zu geben hat. Ob diese die erste oder zweite ist, lässt sich ohne Kenntniss der Querschnittsform und der Materialgattung nicht angeben. Es kann indess geschehen, dass die Quotienten $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ einander gleich werden, und sofort die Wahl des einen oder andern Werthes gleichgiltig wäre. Nach §. 54 hat der Werth des Trägheitsmomentes für einen Querschnitt stets die Form $t = cfh^2$, und da die Grössen h' und h'' je nach der Lage des Schwerpunctes im Querschnitte gewisse Theile von der Höhe h bilden, so erkennt man, dass jeder der Quo-

Schlussfolgerungen nicht so weit ausgedehnt werden dürfen, hätte auch die Kenntniss des Bruchmomentes für die Praxis keinen erheblichen Werth, da man die Körper keineswegs zu brechen, sondern nur ohne Gefahr ihres Bestandes in Anspruch zu nehmen hat.

tienten $\frac{t}{h'}$ und $\frac{t}{h'}$ und mit ihnen auch das Tragmoment unter sonst gleichen Umständen dem Producte fh oder bh^2 proportionirt sein, daher mit der Breite b im einfachen und mit der Höhe h im quadratischen Verhältnisse stehen muss. **Hieraus folgt, dass die Tragmomente bei prismatischen Körpern mit ähnlichen Querschnitten, alles Uebrige gleich gesetzt, mit den dritten Potenzen der homologen Querschnitts-Seiten im Verhältnisse stehen.**

§. 78.

Tragmoment einfacher Figuren. Geht man sogleich auf die einfachen Figuren über, welche im §. 55 erörtert wurden, so enthält man folgende Werthe des Tragmomentes M:

1. Für ein **Rechteck** in der Stellung Fig. 41 ist wegen

$$h' = h'' = \tfrac{1}{2} h \text{ und } t = \tfrac{1}{12} b h^3 = \tfrac{1}{12} f h^2,$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{6} a b h^2 = \frac{1}{6} a f h \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b h^2 = \frac{1}{6} r f h \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (96).$$

Für das Quadrat ist $b = h$ zu setzen.

2. Für ein **Rhombus** (Fig. 42) ist wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ und $t = \frac{1}{48} b h^3 = \frac{1}{24} f h^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{24} a b h^2 = \frac{1}{12} a f h \\ \text{oder } \frac{1}{24} r b h^2 = \frac{1}{12} r f h \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (97).$$

Dieselben Formeln gelten auch für die **Figuren** 43 und 44, wenn hiebei gleichfalls $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ ist.

3. Für eine **Ellipse** (Figur 45) hat man wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ und $t = \frac{\pi}{64} b h^3 = \frac{1}{16} f h^2$,

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{\pi}{32} a b h^2 = \frac{1}{8} a f h \\ \text{oder } \frac{\pi}{32} r b h^2 = \frac{1}{8} r f h \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (98).$$

Dieselben Formeln gelten auch für den **Kreis** und für eine **anders gestellte Ellipse** (Fig. 46), wenn nur statt f und h die geeigneten Werthe gesetzt werden.

4. Für eine **halbe Ellipse** (Fig. 47) hat man im Falle, wenn die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, wegen $h' = 0{\cdot}576\, h$, $h'' = 0{\cdot}424\, h$ und $t = 0{\cdot}070 f h^2$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 0{\cdot}122\,a f h \\ \text{oder } \quad 0{\cdot}165\,r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99);$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, wegen $h' = 0{\cdot}424\,h$ und $h'' = 0{\cdot}576\,h$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 0{\cdot}165\,a f h \\ \text{oder } \quad 0{\cdot}122\,r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100),$$

Die Formeln (99) und (100) gelten auch für den **Halbkreis**.

5. Für ein **Dreieck** (Fig. 48) hat man im Falle, wenn die Fasern an der Spitze ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden, wegen $h' = \frac{2}{3} h$, $h'' = \frac{1}{3} h$ und $t = \frac{1}{36} b h^3 = \frac{1}{18} f h^2$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{24} a b h^2 = \frac{1}{12} a f h \\ \text{oder } \quad \frac{1}{12} r b h^2 = \frac{1}{6} r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (101);$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die Fasern an der Basis ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{12} a b h^2 = \frac{1}{6} a f h \\ \text{oder } \quad \frac{1}{24} r b h^2 = \frac{1}{12} r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (102).$$

6. Für ein Parabelsegment (Fig. 49) erhält man wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} h$ und $t = \frac{1}{30} b h^3 = \frac{1}{20} f h^2$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{15} a b h^2 = \frac{1}{10} a f h \\ \text{oder } \quad \frac{1}{15} r b h^2 = \frac{1}{10} r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (103).$$

7. Für ein Parabelsegment in der Stellung der Fig. 50, ist im Falle, wenn die Fasern oben ausgedehnt und unten zusammengedrückt werden, wegen $h' = \frac{3}{5} h$, $h'' = \frac{2}{5} h$ und $t = \frac{8}{175} b h^3 = \frac{12}{175} f h^2$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{8}{105} a b h^2 = \frac{4}{35} a f h \\ \text{oder } \quad \frac{12}{105} r b h^2 = \frac{6}{35} r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (104);$$

im Falle aber, wenn die Fasern unten ausgedehnt und oben zusammengesetzt werden, wegen $h' = \frac{2}{5} h$ und $h'' = \frac{3}{5} h$,

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{12}{105} a b h^2 = \frac{6}{35} a f h \\ \text{oder } \quad \frac{8}{105} r b h^2 = \frac{4}{35} r f h \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (105).$$

§. 79.

Hauptsätze für das Tragmoment. Obwohl es keine Schwierigkeit hat, von den für das Tragmoment aufgestellten 2 (Alternativ-) Formeln jedesmal die **richtige**, nämlich die den **kleineren** Werth gebende zu wählen, so ist es doch nothwendig, zur klaren Auffassung der Sache und bei der Neuheit derselben noch folgende allgemeine Hauptsätze der besonderen Aufmerksamkeit zu empfehlen:

1. Für $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, für $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$ gibt stets die erste der Formeln (95) den kleineren Werth, und man hat in diesem Falle

$$M = \frac{a\,t}{h'},$$

d. h. es wird sodann die Gränze der Elasticität nur in den gespanntesten, nicht aber auch zugleich in den gepresstesten Fasern erreicht. In der That hat man, wenn die grösste vorkommende Spannung und Pressung s und p heissen, im Sinne der allgemeinen Gleichung (31) $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$, also auch für $s = a$ sofort

$$p = \frac{h''}{h'}\,a < r.$$

So z. B. wäre für ein gusseisernes Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) zuerst $\frac{h'}{h''} = 1$, und wenn nach dem § 21 etwa $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ angenommen würde, $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach der Gleichung (96)

$$M = \tfrac{1}{6}\,a\,b\,h^2 = \tfrac{1}{6}\,a\,f\,h,$$

was man übrigens auf den ersten Blick ersieht, indem wegen $r > a$ offenbar von den beiden gegebenen Alternativ-Formeln (96) $\frac{1}{6}\,a\,f\,h$ einen kleineren Werth hat, als $\frac{1}{6}\,r\,f\,h$.

Um noch ein zweites Beispiel anzuführen, sei ein Prisma aus Schmiedeeisen mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48) derart in Anspruch genommen, dass die Fasern an der Spitze des Dreiecks ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden. In diesem Falle hätte man $\frac{h'}{h''} = 2$, und wenn etwa nach §. 18 $\frac{a}{r} = 1$ gesetzt würde, $\frac{a}{r} < \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (101)

$$M = \tfrac{1}{24}\,a\,b\,h^2 = \tfrac{1}{12}\,a\,f\,h.$$

Redtenbacher und Burg nehmen diesen besonderen Fall ad 1 als den allgemeinen an, indem diese Schriftsteller den Bruch stets in Folge des Zerreissens der gespanntesten Fasern eintreten lassen, und auf Grundlage dieser Vorstellung hin sodann auf das sichere Widerstandsmoment (Tragmoment) schliessen. Die von ihnen gegebenen Formeln werden daher nur dann richtig sein, wenn es in der That zulässig ist, die grösste Spannung bis zur Elasticitätsgränze zu treiben, ohne gleichzeitig diese Gränze in den gepresstesten Fasern zu überschreiten.

2. Für $\frac{a}{h'} > \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, für $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$ gibt stets die zweite der Formeln (95) den kleineren Werth, und man hat in diesem Falle

$$M = \frac{r\,t}{h''},$$

d. h. es wird sodann die Gränze der Elasticität nur in den gepresstesten, nicht aber auch zugleich in den gespanntesten Fasern erreicht. In der That hat man, wenn wieder die grösste vorkommende Spannung s und p heissen, wegen $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$ für $p = r$ sofort

$$s = \frac{h'}{h''}\,r < a.$$

So z. B. wäre für ein Prisma aus Holz mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) $\frac{h'}{h''} = 1$, und da nach §. 22 $a > r$ anzunehmen ist, $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach den Gleichungen (96)

$$M = \tfrac{1}{6}\,r\,b\,h^2 = \tfrac{1}{6}\,r\,f\,h,$$

was man gleichfalls *a priori* entnimmt, indem wegen $a > r$ in den alternativen Formeln (96) offenbar $\frac{1}{6}\,r\,f\,h$ einen kleineren Werth gibt, als $\frac{1}{6}\,a\,f\,h$.

Wird als zweites Beispiel ein Prisma aus Schmiedeeisen mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48) doch so gewählt, dass die Fasern an der Basis des Dreieckes ausgedehnt, und an der Spitze zusammengedrückt werden, so hat man sodann $\frac{h'}{h''} = \frac{1}{2}$ und, wenn man wie früher $\frac{a}{r} = 1$ annimmt, $\frac{a}{r} > \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (102)

$$M = \tfrac{1}{24}\,r\,b\,h^2 = \tfrac{1}{12}\,r\,f\,h.$$

Der vorhergehenden Anmerkung zufolge leuchtet ein, dass für diesen Fall ad 2 die Formeln von Burg und Redtenbacher desto unrichtigere Resultate geben werden, je mehr die Werthe von $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ unter einander verschieden sind. So z. B. wäre nach diesen Schriftstellern für das oben betrachtete dreiseitige Prisma aus Schmiedeeisen der Werth $M = \frac{1}{12}\,a\,b\,h^2$ anzunehmen, welcher wegen $a = r$ gerade doppelt so gross würde, als der oben gefundene Werth $\frac{1}{24}\,r\,b\,h^2$.

3. Ist $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ oder, was dasselbe ist, $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, so geben beide Formeln (95) dasselbe Resultat und man hat

$$M = \frac{at}{h'} = \frac{rt}{h''},$$

d. h. es werden in diesem Falle die Gränzen der Elasticität in den gespanntesten und gepresstesten Fasern gleichzeitig erreicht. In der That hat man, wenn die grösste vorkommende Spannung und Pressung s und p heissen, wegen $\frac{s}{h'} = \frac{p}{h''}$, für $s = a$ sofort

$$p = \frac{h''}{h'} a = r^{*}).$$

So z. B. wäre für ein schmiedeeisernes Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) zuerst $\frac{h'}{h''} = 1$ und, wenn wieder $\frac{a}{r} = 1$ angenommen würde, $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, demzufolge aber nach den Formeln (96)

$$M = \tfrac{1}{6} a b h^2 = \tfrac{1}{6} r b h^2 = \tfrac{1}{3} a f h = \tfrac{1}{3} r f h,$$

also alle Werthe einander gleich.

Eben so wäre für ein gusseisernes Prisma mit einem dreieckigen Querschnitte (Fig. 48), wenn die Fasern an der Basis des Dreieckes ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden, $\frac{h'}{h''} = \frac{1}{2}$, und wenn man ferners das Durchschnittsverhältniss $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ zulässt, sofort $\frac{a}{r} = \frac{h'}{h''}$, daher nach den Gleichungen (102)

$$M = \tfrac{1}{12} a b h^2 = \tfrac{1}{24} r b h^2 = \tfrac{1}{6} a f h = \tfrac{1}{12} r f h.$$

4. Liegt der Schwerpunct in der halben Höhe, so ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, und es wird von den Alternativformeln (95) diejenige den kleineren Werth geben, in welcher die kleinere von den beiden Grössen a und r sich befindet. In diesem Falle würde daher

für Holzmaterialien . . . $M = \frac{rt}{h''}$, und

für Gusseisen . . . . . . $M = \frac{at}{h'}$ zu setzen sein,

*) In diesem Falle geben die Formeln von Burg und Redtenbacher richtige Resultate.

während für Schmiedeeisen, wenn man die durchschnittliche Annahme $a = r$ gelten lässt, beide Werthe $\frac{at}{h'}$ und $\frac{rt}{h''}$ gleich wären.

5. Für solche Materialien, deren Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung gleich sind, hat wegen $a = r$ offenbar von den beiden Alternativformeln (95) $\frac{at}{h'}$ und $\frac{rt}{h''}$ diejenige den kleineren Werth, in welcher der grössere Nenner vorhanden ist. Diese Regel kann im Allgemeinen für Schmiedeeisen gelten, weil man für dasselbe laut §. 18 im Durchschnitte $a = r$ setzen kann *).

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass die Wahl der zur Berechnung des Tragmomentes geeigneten Formel nicht nur von dem Querschnitte, sondern auch von dem Materiale abhänget, aus welchem das Prisma besteht. Es gibt nämlich nicht, wie nach den bisherigen Theorien angenommen wurde, für jeden Querschnitt eine allgemeine Formel, welche für feste elastische Körper angewendet werden kann, sondern man hat aus Ursache der Verschiedenheit der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung eigentlich zwei Formeln, von welchen je nach Umständen bald die eine, bald die andere anzuwenden ist, ohne dass hiedurch eine Absonderung in den Querschnitten oder Materialien veranlasst wird. Nur darf nicht übersehen werden, dass die für Holz, Schmiede- und Gusseisen angegebenen und in den angeführten Beispielen benützten Werthe des Quotienten $\frac{a}{r}$ im Sinne des §. 17 bloss abgerundete Durchschnitte seien, und daher in besonderen Fällen auch anders anzunehmen sein werden, wenn diess die Resultate aus Versuchen oder besondere Erfahrungen nothwendig machen.

---

*) Navier und nach ihm die meisten Schriftsteller lehren, dass in der Formel für das Widerstandsmoment als Nenner der Abstand der entferntesten Fasern von der durch den Schwerpunct gezogenen neutralen Schichte, also der grössere von den beiden Werthen h' und h'' zu setzen sei. Diese Annahme entspricht aber, wie oben bemerkt, nur dem besonderen Falle $a = r$, und hat ihren Grund darin, weil man früherer Zeit auf die Verschiedenheit der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung keine Rücksicht genommen hat. Navier's Lehre erscheint daher als keine allgemeine, und kann besonders bei Holz und Gusseisen zu unrichtigen Resultaten führen.

§. 80.

Folgerungen. Die für die Tragmomente gegebenen Formeln können mannigfaltige Resultate anschaulich machen. Es werden hievon einige angegeben:

1. Will man die Tragmomente vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten I und II (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen entwickeln können, und nennt man diese Tragmomente M_I und M_{II}, so hat man unter Beibehaltung der diesfälligen Bezeichnungen nach den Formeln (96) und (98)

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \alpha \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \alpha \end{cases} \text{ und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{8} a f \beta \\ \text{oder } \frac{1}{8} r f \beta, \end{cases}$$

und da von den Alternativwerthen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren als die kleineren Mass und Ziel zu geben haben, so ist ohne Ausnahme

$$M_I : M_{II} = \tfrac{1}{6}\alpha : \tfrac{1}{8}\beta = 4\alpha : 3\beta,$$

daher auch wegen $\alpha = \frac{\beta}{2}\sqrt{\pi}$

$$M_I : M_{II} = 2\sqrt{\pi} : 3 = 1{\cdot}182 : 1 = 1 : 0{\cdot}846.$$

Es ist also das Tragmoment des Prismas mit dem quadratischen Querschnitte im Verhältnisse wie 1 : 1·182 grösser, als mit dem kreisförmigen.

2. Zu einer weiteren Vergleichung untersuche man die Tragmomente eines Prismas mit einem rechteckigen Querschnitte in den Stellungen I, II und III (Fig. 52). Bezeichnet man die betreffenden Tragmomente gleichfalls mit Zeigern, welche mit den numerirten Stellungen correspondiren, so erhält man mit Rücksicht auf die Bemerkungen im §. 56 ad 2

nach den Formeln (96)... $M_I = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \alpha \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \alpha, \end{cases}$

„ „ „ (96)... $M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \beta \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \end{cases}$

und

„ „ „ (97)... $M_{III} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a f \cdot \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \text{oder } \frac{1}{6} r f \cdot \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \end{cases}$

und da in diesen 3 Partien gleichzeitig die ersten oder zweiten Formeln die kleineren Werthe geben werden, sofort

$$M_I : M_{II} : M_{III} = \alpha : \beta : \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Die Tragmomente in den betrachteten 3 Stellungen verhalten sich daher verkehrt, wie die Längen der jedesmal entstehenden neutralen Axe. Auch ist M_{III} immer das geringste aus allen 3 Tragmomenten. Diess letztere ist in so ferne merkwürdig, als die Biegungen in den betrachteten 3 Fällen ein anderes Verhalten beobachten. Nach dem §. 56 ist nämlich die Biegung δ_{III}, welche mit dem geringsten Tragmomente correspondirt, keineswegs die grösste, indem dieselbe stets zwischen δ_I und δ_{II} fällt. Für den rechteckigen Querschnitt tritt sonach das Besondere ein, dass mit Rücksicht auf die erwähnten 3 Stellungen vergleichungsweise mit einer kleineren Biegung auch ein kleineres Tragmoment, und mit einer grösseren Biegung ein grösseres Tragmoment resultiren kann, während sonst das Umgekehrte statt zu finden pflegt, indem in der Regel von einer kleineren Biegung auf ein grösseres Tragmoment, und von einer grösseren Biegung auf ein kleineres Tragmoment zu schliessen ist. Für das Quadrat ist insbesondere $\alpha = \beta$, daher $M_I = M_{II}$ und

$$M_I : M_{II} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 0{\cdot}707 = \sqrt{2} : 1 = 1{\cdot}414 : 1.$$

Hieraus folgt, dass bei einem quadratischen Querschnitte das Tragmoment, wenn die neutrale Axe in die Diagonale fällt, im Verhältnisse wie $\sqrt{2} : 1$ kleiner ist, als wenn diese Axe parallel zur Quadratseite geht.

3. Wird ein dreikantiges Prisma in 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes α, β und γ parallel zur neutralen Axe gehen, also gleichsam abwechselnd als Grundlinien fungiren, und wird nun eine Vergleichung der respectiven Tragmomente M_I, M_{II} und M_{III} unter sonst gleichen Umständen vorgenommen, so hat man

im I. Falle . . . . $h = \frac{2f}{\alpha}$,

im II. Falle . . . . $h = \frac{2f}{\beta}$,

und im III. Falle . . . . $h = \frac{2f}{\gamma}$,

daher, wenn die Fasern an der jeweiligen Spitze des Dreieckes ausgedehnt und an der gegenüberliegenden Basis zusammengedrückt werden, nach den Gleichungen (101)

$$M_I = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{6}\frac{af^2}{\alpha} \\ \text{oder}\ \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\alpha}, \end{cases} \quad M_{II} = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{6}\frac{af^2}{\beta} \\ \text{oder}\ \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\beta} \end{cases} \text{u.}\ M_{III} = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{6}\frac{af^2}{\gamma} \\ \text{oder}\ \frac{1}{3}\frac{rf^2}{\gamma}; \end{cases}$$

hingegen, wenn die Fasern stets an der jeweiligen Basis des Dreieckes ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden, nach den Gleichungen (102)

$$M_I = \begin{cases} \text{entw}\ \frac{1}{3}\frac{af^2}{\alpha} \\ \text{oder}\ \frac{1}{6}\frac{rf^2}{\alpha}, \end{cases} \quad M_{II} = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{3}\frac{af^2}{\beta} \\ \text{oder}\ \frac{1}{6}\frac{rf^2}{\beta} \end{cases} \text{u.}\ M_{III} = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{3}\frac{af^2}{\gamma} \\ \text{oder}\ \frac{1}{6}\frac{af^2}{\gamma}. \end{cases}$$

Wird jetzt beachtet, dass von den Alternativformeln für das Tragmoment in den zu vergleichenden Stellungen entweder immer die ersten, oder die zweiten als die kleineren anzuwenden sein werden, so hat man allgemein

$$M_I : M_{II} : M_{III} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma},$$

wonach die Tragmomente in den gewählten 3 Stellungen sich verhalten, wie umgekehrt die respectiven Grundlinien, nämlich die Dreieckseiten, welche mit der neutralen Axe parallel laufen.

4. Ueberhaupt steht das Tragmoment mit dem Trägheitsmomente t im geraden, und mit dem Abstande (h' oder h'') der bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommenen Fasern von der neutralen Axe im verkehrten Verhältnisse. Sind also in zwei zu vergleichenden Fällen die betreffenden Trägheitsmomente (daher unter übrigens gleichen Umständen auch die Biegungen) einander gleich, so bleiben die beziehungsweisen Tragmomente lediglich den reciproken Werthen jener Abstände (h' oder h'') proportionirt. Diess ist z. B. eingetreten bei der ad 2 vorgenommenen Vergleichung der Tragmomente des Quadrates in den 2 Stellungen, wo die neutrale Axe einmal mit der

Quadratseite α parallel gelegen, das andere Mal aber in die Diagonale gefallen ist. In diesen 2 besonderen Stellungen sind nämlich nach dem §. 56 ad 2 die bezüglichen Trägheitsmomente t_I und t_{III} einander gleich, und da überdiess

in der einen Stellung $h' = h'' = \frac{1}{2}\alpha$,

in der andern aber $h' = h'' = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}$

wird, so erhält man zu Folge der obigen Bemerkung übereinstimmend mit dem Resultate ad 2 dieses §.

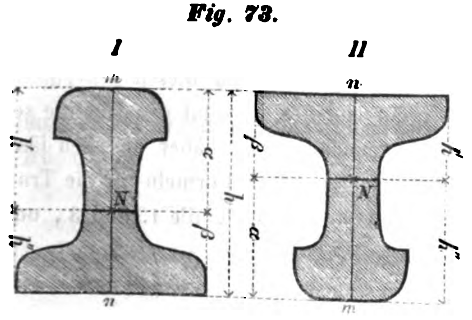
$$M_I : M_{III} = \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha} : \frac{1}{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1.$$

§. 81.

Umkehrung des Querschnittes. Wird das materielle Prisma um seine Längenaxe gedreht, bis sein Querschnitt genau in die entgegengesetzte oder umgekehrte Lage kommt, so ist die Beantwortung der Frage von Wesenheit, ob und in wie ferne unter sonst gleichen Umständen das Tragmoment geändert werde. Es leuchtet ein, dass das besagte Umkehren des Querschnittes dieselbe Wirkung äussert, wie wenn man den Querschnitt unverändert in seiner Lage gelassen, dafür aber die sämmtlichen einwirkenden Kräfte entgegengesetzt genommen, und dadurch in dem Querschnitte die Spannungen in Pressungen und die Pressungen in Spannungen verwandelt hätte.

Stellen I und II in der Fig. 73 die beiden entgegengesetzten Lagen des Querschnittes vor, und sei in demselben die neutrale Axe durch seinen Schwerpunct N gezogen, finden ferner die grössten Spannungen in m (ad I) und in n (ad II), hingegen die grössten Pressungen in n (ad I) und in m (ad II) statt, und werden die respectiven Abstände der gespanntesten und gepresstesten Fasern von der neutralen Axe ad I $h' = \alpha$ und $h'' = \beta$,

Fig. 73.



ad II aber umgekehrt $h' = \beta$ und $h'' = \alpha$ gesetzt, so erhält man für die Werthe der bezüglichen Tragmomente

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{\alpha} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{\beta} \end{cases} \text{ und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{\beta} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{\alpha}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nachstehende Regeln:

1. Ist $\alpha = \beta$, d. h. liegt der Schwerpunct der Querschnittsfigur in der halben Höhe, so wird jedenfalls

$$M_I = M_{II},$$

wonach die umgekehrte Lage des Querschnittes das Tragmoment nicht verändert. Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Materialsgattung. Es ist übrigens nicht nothwendig, dass zur Erreichung dieser Bedingung die Querschnitts-Figur in Bezug auf die neutrale Axe symmetrisch gebildet sein müsse, es genügt, wenn diese Axe überhaupt die ganze Höhe halbirt.

2. Ist $a = r$, d. h. sind die Spannungen und Pressungen in gleicher Intension zulässig, so ist gleichfalls $M_I = M_{II}$.

Diese Eigenschaft ist unabhängig von der Querschnittsform, und kann sehr häufig für Schmiedeeisen zugelassen werden *).

3) Aus der Vergleichung der für M_I und M_{II} gegebenen Werthe ergibt sich im Allgemeinen

$$M_I : M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{1}{\alpha} : \dfrac{1}{\beta} \\ \text{oder } \dfrac{1}{\beta} : \dfrac{1}{\alpha} \\ \text{oder } a : r \\ \text{oder } r : a. \end{cases}$$

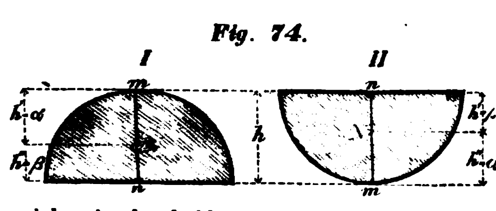
Es versteht sich übrigens von selbst, dass von diesen 4 Resultaten in jedem besonderen Falle nur ein einziges Resultat das richtige sein wird, welches sich jedoch im Allgemeinen nicht näher angeben lässt, indem möglicher Weise von den 4 angegebenen Formeln für die Tragmomente je nach dem Querschnitte und Materiale die 1. und 3., oder

---

*) Da die Theorie Navier's die Bedingung $a = r$ allgemein voraussetzt, so erklärt es sich, dass nach dieser Theorie $M_I = M_{II}$ für alle festen elastischen Materialien resultirt.

die 2. und 4., oder die 1. und 4., oder endlich die 2. und 3. (nämlich stets die kleineren Werthe) in Vergleich kommen können. Die Veränderung in dem Tragmomente geht daher durch das Umkehren des Querschnittes entweder in dem Verhältnisse wie $\alpha : \beta$ oder in dem wie $a : r$ vor sich, und kann überdiess je nach Umständen in einer Vermehrung oder Verminderung bestehen. Um diess durch ein Beispiel zu erläutern, sei der Querschnitt des Prismas ein Halbkreis (Fig. 74),

Fig. 74.



welcher in den beiden entgegengesetzten Lagen *I* und *II* und zwar so betrachtet werden soll, dass ad I die grösste Spannung in *m* und die grösste Pressung in *n*, ad II aber die Anspruchsnahme in umgekehrter Weise erfolgt. Für diesen Fall hat man wegen

$$\alpha = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) h = 0{\cdot}576\, h \text{ und } \beta = \frac{4}{3\pi} h = 0{\cdot}424\, h,$$

$$M_I = \begin{cases} \text{entweder } 1{\cdot}737\, \dfrac{at}{h} \\ \text{oder } 2{\cdot}356\, \dfrac{rt}{h} \end{cases} \text{und } M_{II} = \begin{cases} \text{entweder } 2{\cdot}356\, \dfrac{at}{h} \\ \text{oder } 1{\cdot}737\, \dfrac{rt}{h}, \end{cases}$$

aus welchen Doppelwerthen vorschriftsmässig stets die kleineren zu wählen sind.

Nimmt man jetzt für Holzmaterialien durchschnittlich $r = \frac{3}{4} a$, so erhält man

$$M_I = 1{\cdot}737\, \frac{at}{h} \text{ und } M_{II} = 1{\cdot}737\, \frac{rt}{h},$$

daher auch $M_I : M_{II} = a : r = 4 : 3$.

Nimmt man hingegen für Gusseisen durchschnittlich $r = 3a$, so wird

$$M_I = 1{\cdot}737\, \frac{at}{h} \text{ und } M_{II} = 2{\cdot}356\, \frac{at}{h},$$

sofort aber $M_I : M_{II} = 1{\cdot}737 : 2{\cdot}356 = \beta : \alpha$.

Es wird also in dem betrachteten Falle durch das Umkehren des halbkreisförmigen Querschnittes das Tragmoment bei Holzmaterialien im Verhältnisse wie $a : r$ (beispielsweise wie 4 : 3) verkleinert, bei Guss-

eisen aber im Verhältnisse wie $\beta : \alpha = 1{\cdot}737 : 2{\cdot}356$ gesteigert, bei Schmiedeeisen endlich gar nicht verändert, wenn man bei diesem die Gleichheit der die Elasticitätsgränzen bestimmenden Grössen a und r zulässt.

4. Bei einer aufmerksamen Betrachtung findet man, dass von den beiden eventuellen Verhältnissen $\alpha : \beta$ und $a : r$, nach welchen die in Rede stehende Veränderung des Tragmomentes zu beurtheilen ist, stets dasjenige massgebend zu sein hat, welches sich weniger von der Einheit entfernt. Ist daher eines dieser Verhältnisse die Einheit selbst, so hat man sodann $M_I = M_{II}$. Diess tritt offenbar entweder für $\alpha = \beta$ oder für $a = r$ ein, und steht in Uebereinstimmung mit den Bemerkungen ad 1 und 2 dieses §. Eben so begreift man, dass die Veränderung im Tragmomente überhaupt in keinem grelleren Verhältnisse, als wie $a : r$ (also durchschnittlich bei Holz wie $4 : 3$ und bei Gusseisen wie $1 : 3$) stattfinden kann. Da ferner diese Veränderung, wie man gesehen hat, je nach Umständen in einer Vermehrung oder Verminderung besteht, so sind die Gränzen, zwischen welchen der Werth von $\frac{M_I}{M_{II}}$ im Allgemeinen liegen muss, oder welche höchstens erreicht werden können, $\frac{a}{r}$ und $\frac{r}{a}$. Diese Gränzen können daher in runden Zahlen bei Holz mit $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{4}$, bei Gusseisen aber mit $\frac{1}{3}$ und 3 angenommen werden *).

*) Nach der Theorie von Burg und Redtenbacher würde stets

$$M_I : M_{II} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} = \beta : \alpha,$$

und daher für dieses Verhältniss keine derartige Gränze vorhanden sein, indem dasselbe streng genommen, wenn auch nicht in practischer Hinsicht, jeden möglichen Werth erreichen könnte. Auch wäre nach dem Vorgange jener Schriftsteller dieses Verhältniss für einen gewissen Querschnitt ohne Rücksicht auf das Materiale immer dasselbe, und würde in manchen Fällen zu Resultaten führen, welche schon der einfachen Anschauungsweise geradezu widersprächen. Man wird bereits bemerkt haben, dass in der vorliegenden Theorie für $r = \infty$ die Resultate jener beiden Schriftsteller jederzeit zum Vorschein kommen, während die Annahme $a = r$ der Navier'schen Theorie entspricht. Die Erfahrungen stimmen übrigens mit der obigen Theorie überein.

§. 82.

Besondere Versinnlichung des Tragmomentes. Nach dem §. 77 kann das Tragmoment stets auf die Form

$$M = \begin{cases} \text{entweder } C.afh \\ \text{oder } C'.rfh \end{cases}$$

gebracht werden, wo C und C' in so ferne constante Grössen sind, als dieselben nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Drückt man daher das statische Moment der einwirkenden Kräfte, welches allgemein mit Rx bezeichnet wurde, in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt speciell mit $R'x'$ aus, so hat man für den Gränzzustand des Gleichgewichtes wegen $M = R'x'$ sofort

$$R'x' = \begin{cases} \text{entweder } af.Ch \\ \text{oder } rf.C'h, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder andere Werth kleiner ausfällt. Wird jetzt beachtet, dass af die grösste zulässige Spannung und eben so rf die grösste zulässige Pressung vorstellt, welche das ganze Prisma auszuhalten hätte, wenn dasselbe lediglich nach der Länge gezogen oder gepresst würde, so kann man offenbar das Tragmoment sich auch so entstanden denken, als wenn die grösste zulässige Spannung af an dem Hebelsarme Ch, oder die grösste zulässige Pressung rf an dem Hebelsarme $C'h$ wirken würde, von welchen beiden Wirkungen aber im Einklange mit der gegebenen Theorie nur die kleinere zu wählen ist.

Fig. 75.

Die Figur 75 entspricht dieser Vorstellung. In derselben ist die gleichsam als Widerstand fungirende Kraft Π nach Umständen $= \begin{cases} \text{entweder } af \\ \text{oder } rf \end{cases}$, der bezügliche Hebelsarm aber

$$N\lambda = \begin{cases} \text{entweder } Ch \\ \text{oder } C'h \end{cases}$$

zu setzen. Mit Benützung der betreffenden Formeln im §. 78 findet man z. B. diesen Hebelsarm

1. für die Figur 41 . . . . . . $N\lambda =$ stets $\frac{1}{6}h$,
2. für die Figuren 42, 43 und 44 $N\lambda =$ stets $\frac{1}{12}h$,
3. für die Figuren 45 und 46 . . $N\lambda =$ stets $\frac{1}{8}h$,

4. für die Figur 47 . . . $N\lambda = \begin{cases} \text{entweder } 0{\cdot}122\,h \\ \text{oder } 0{\cdot}165\,h, \end{cases}$

5. für die Figur 48 . . . $N\lambda = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{12}\,h \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,h, \end{cases}$

6. für die Figur 49 . . . $N\lambda =$ stets . . $\frac{1}{10}\,h$

und 7. für die Figur 50 . . . $N\lambda = \begin{cases} \text{entweder } \frac{4}{25}\,h \\ \text{oder } \frac{6}{25}\,h, \end{cases}$

also jedenfalls verhältnissmässig sehr klein. Eine nähere Betrachtung dieser Resultate ist geeignet, mehrseitiges Interesse zu gewähren.

§. 83.

Tragvermögen. Nach §. 76 hat zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt Gleichgewicht zu herrschen. Sollen bei der Anspruchsnahme des Prismas die Elasticitätsgränzen für das betreffende Materiale nicht überschritten werden, so ist kein grösseres Widerstandsmoment, als das Tragmoment zulässig, und da das statische Kraftmoment auch nur so weit gesteigert werden darf, so ergibt sich aus der betreffenden Gleichung für diesen Gränzzustand des Gleichgewichtes mit Rücksicht auf die speciellen Fälle die grösste Belastung, welche noch mit Sicherheit getragen werden kann. Diese so ermittelte grösste zulässige Belastung soll das Tragvermögen oder die Tragfähigkeit heissen.

Man begreift, dass das Tragmoment und das Tragvermögen von einander abhängen, in so ferne aber wesentlich verschieden sind, als das Tragvermögen eigentlich eine Kraft bezeichnet, während das Tragmoment dem statischen Momente dieser Kraft in Bezug auf die neutrale Axe des gefährlichen Querschnittes gleich zu setzen ist. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die allgemeine Gleichung (47) $mt\frac{d^2y}{dx^2} = Rz$ auch das Gleichgewicht zwischen dem statischen Kraft- und Widerstandsmomente in Bezug auf dem gefährlichen Querschnitt enthält *).

*) Würde man annehmen, dass die gegebenen Gleichungen bis zu dem Bruche giltig seien, so könnte man auf solche Weise die grösstmöglichste Belastung bis zu dem Bruche, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, die

Im Nachfolgenden werden die einfachsten Fälle erörtert, auf welche im §. 58 ad I, II, III und IV aufmerksam gemacht worden ist.

§. 84.

I. Fall. Festhaltung des Prismas an einem Ende, und Belastung desselben am andern Ende. Mit Rücksicht auf die Fig. 53 und die §§. 59 und 60 hat man für das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach §. 75 in A sich befindet, den Werth Ql. Dieser resultirt nämlich aus der Gleichung (58) für $x = o$. Wird nun das Tragvermögen mit $Max. Q$ bezeichnet, so kann höchstens $Q = Max. Q$ und das Kraftmoment $Ql = l\,Max. Q$ werden. Indem aber dieses letztere dem Tragmomente M gleich zu setzen ist, erhält man für den in Rede stehenden Fall I.... $Max. Q = \frac{M}{l}$ . . . . (106),
also das Tragvermögen gleich dem Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas. Hiebei hat man statt M den Werth nach Massgabe der Relation (95) zu setzen. Wäre z. B. der Querschnitt des Prismas ein Rechteck (Fig. 41), so hätte man den Gleichungen (96) zufolge

$$Max. Q = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\frac{a b h^2}{l} = \frac{1}{6}\frac{a f h}{l} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r b h^2}{l} = \frac{1}{6}\frac{r f h}{l}, \end{cases}$$

und von diesen Doppelwerthen in Gemässheit des §. 77 den kleineren anzunehmen.

In diesem Falle I ist übrigens bei der Bestimmung des Tragmomentes M zu beachten, dass im gefährlichen Querschnitte die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden.

---

relative Festigkeit des Prismas kennen lernen. Da aber die Biegungstheorie auf solche Hypothesen gegründet ist, welche nur innerhalb der Elasticitätsgränzen zugelassen werden können, so darf es nicht befremden, wenn eine derartig ausgemittelte Bruchbelastung in der Erfahrung sich als unrichtig erweisen sollte. Die Kenntniss der Bruchbelastung hätte übrigens auch keinen besonderen Werth, da man in der Praxis die Körper keineswegs zu brechen beabsichtigt.

§. 85.

II. Fall. Festhaltung des Prismas an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach. Mit Rücksicht auf die Fig. 56 und die §§. 61 und 62 hat man für das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in A sich befindet, den Werth $\frac{1}{2} Q l$. Dieser resultirt nämlich aus der Gleichung (65) für $x = o$. Wird das betreffende Tragvermögen wieder mit $Max . Q$ bezeichnet, so ist offenbar $\frac{1}{2} l . Max . Q = M$ und hieraus

$$Max . Q = \frac{2M}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107),$$

also das Tragvermögen gleich dem doppelten Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas.

Wäre z. B. der Querschnitt des Prismas ein Rechteck (Fig. 41), so hätte man den Gleichungen (96) zufolge

$$Max . Q = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{3} \frac{a b h^2}{l} = \frac{1}{3} \frac{a f h}{l} \\ \text{oder } \frac{1}{3} \frac{r b h^2}{l} = \frac{1}{3} \frac{r f h}{l}, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

In diesem Falle werden in dem gefährlichen Querschnitte, wie ad I, die oberen Fasern ausgedehnt, und die unteren zusammengepresst.

§. 86.

III. Fall. Unterstützung beider Enden des Prismas und Belastung desselben in der Mitte. Mit Rücksicht auf die Figuren 59, 60 und 61 und die §§. 63 und 64 ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in der Mitte A sich befindet, $\frac{1}{2} Q . \frac{1}{2} l = \frac{1}{4} Q l$. Wird nun das Tragvermögen $Max . Q$ aus der betreffenden Gleichung $\frac{1}{4} l . Max . Q = M$ gefolgert, so erhält man

$$Max . Q = \frac{4M}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (108),$$

also gleich dem vierfachen Tragmomente, dividirt durch die freie Länge des Prismas.

In diesem Falle ist übrigens bei der Berechnung des Tragmomentes M darauf Acht zu geben, dass in dem gefährlichen Querschnitte die unteren Fasern ausgedehnt, und die oberen zusammengedrückt werden.

§. 87.

IV. Fall. Unterstützung beider Enden des Prismas und gleichförmig vertheilte Belastung auf demselben der ganzen Länge nach. Mit Rücksicht auf die Figuren 64, 65 und 66 und die §§. 65 und 66 ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, welcher nach dem §. 75 in der Mitte A sich befindet, $-\frac{1}{8} Q l$, indem dieser Werth aus der Gleichung (74) für $x = o$ folgt. Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass in dem gefährlichen Querschnitte die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, und diess ist daher bei der Bestimmung des Tragmomentes M zu berücksichtigen. Das Tragvermögen $Max.Q$ ist sodann aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{8} l . Max . Q = M$$

abzuleiten, wodurch

$$Max . Q = \frac{8M}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109),$$

also das Tragvermögen gefunden wird, wenn man das achtfache Tragmoment durch die freie Länge des Prismas dividirt.

§. 88.

Vergleichung der Fälle I, II, III und IV. Werden die Tragfähigkeiten in den besprochenen 4 Fällen behufs ihrer Vergleichung mit $Max.Q$ und den entsprechenden Zeigern bezeichnet, die dazu gehörigen Tragmomente aber M_1, M_2, M_3 und M_4 genannt, so erhält man für eine und dieselbe Länge l

$$Max . Q_1 : Max . Q_2 : Max . Q_3 : Max . Q_4 =$$
$$= M_1 : 2M_2 : 4M_3 : 8M_4 \quad . \quad . \quad . \quad (110),$$

und wenn überdiess das Tragmoment in allen 4 Fällen unverändert bleibt,

$$Max . Q_1 : Max . Q_2 : Max . Q_3 : Max . Q_4 =$$
$$= 1 : 2 : 4 : 8 \quad . \quad . \quad . \quad (111).$$

Wenn daher ein und dasselbe Prisma auf die bezeichneten 4 Arten belastet wird, so ist die Tragfähigkeit im II. Falle zweimal, im III Falle viermal und im IV. Falle achtmal so gross, als im I. Falle *). Nur muss man bezüglich der jedesmaligen Lage des Querschnittes mit Rücksicht auf den §. 81 zu der Annahme berechtiget sein, dass das Tragmoment in der That ungeändert bleibt. Die Proportion (111) ist übereinstimmend mit der Relation (87). Man sieht den Grund davon sogleich ein, wenn man beachtet, dass die Gleichheit der Tragmomente auch die der statischen Kraftmomente in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt bedingt, daher in allen 4 Fällen die kleinsten Krümmungshalbmesser ebenfalls gleich werden müssen.

§. 89.

Combinirung der Fälle I und II dann III und IV. Ist das materielle Prisma an einem Ende festgehalten, und sowohl von einer Belastung Q_1 am andern Ende, als auch von einer der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung der Fälle I und II. Da in jedem dieser beiden Fälle, abgesondert betrachtet, der gefährliche Querschnitt an dem Wurzelende sich befände, so wird derselbe auch bei dem gleichzeitigen Eintreten beider Fälle an dieser Stelle vorhanden, und die Summe der statischen Momente beider Belastungen gleich dem Tragmomente zu setzen sein, um den Gränzzustand des Gleichgewichtes zu erhalten.

Dieser Bemerkung gemäss hat man

$$(Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2)\, l = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112),$$

also dieselbe Bedingungsgleichung, wie wenn die Hälfte der gleichförmig vertheilten Last an dem freien Ende concentrirt und mit der Belastung Q_1 vereinigt wäre.

Auf dieselbe Weise erhält man durch die Combinirung der Fälle III und IV, wenn nämlich das Prisma an beiden Enden unterstützt, und sowohl in der Mitte mit Q_3, als auch gleichförmig der ganzen Länge nach mit Q_4 belastet wäre, für den Gränzzustand des Gleichgewichts $\frac{1}{4}\,(Q_3 + \frac{1}{2} Q_4) = M$ . . . . . . (113)

*) Abgesehen von dem eigenen Gewichte des Prisma.

also dasselbe Resultat, wie wenn die Hälfte der gleichförmig vertheilten Last Q_4 in der Mitte concentrirt und mit der Belastung Q_3 vereinigt sein würde.

§. 90.

Berücksichtigung des eigenen Gewichtes. Das eigene Gewicht des Prismas ist als eine gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach zu betrachten, daher der Einfluss desselben auf die Anspruchsnahme im Sinne des vorigen §. zu beurtheilen. Auch hat man mit Rücksicht auf den II. und IV. Fall wegen $Q_2 = Q_4 = fl\gamma$, wo γ das Gewicht der cubischen Einheit des das Prisma bildenden Materiales bezeichnet, unter der Bedingung, dass das Tragvermögen schon durch das eigene Körpergewicht erschöpft werden soll,

$$\text{ad II} \ldots Q_2 = fl\gamma = \frac{2M}{l}, \text{ woraus wegen}$$

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{h'} = \dfrac{afd^2}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{h''} = \dfrac{rfd^2}{h''} \end{cases}$$

sofort

$$l^2 = \frac{2M}{f\gamma} = \begin{Bmatrix} \text{entweder } \dfrac{2ad^2}{h'\gamma} \\ \text{oder } \dfrac{2rd^2}{h''\gamma} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (114)$$

folgt; und eben so

$$\text{ad IV} \ldots l^2 = \frac{8M}{f\gamma} = \begin{Bmatrix} \text{entweder } \dfrac{8ad^2}{h'\gamma} \\ \text{oder } \dfrac{8rd^2}{h''\gamma} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (115),$$

aus welchen Doppelwerthen jedesmal die kleineren zu wählen sind. Für einen Balken aus Holz mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41) hätte man z. B. $a > r$, $h' = h'' = \frac{1}{2}h$ und $d^2 = \frac{1}{12}h^2$, also auch ad II ... $l^2 = \frac{1}{3}\frac{rh}{\gamma}$ und ad IV ... $l^2 = \frac{4}{3}\frac{rh}{\gamma}$. Wäre überdiess $r = 16$ Zentner, $h = 3''$ und $\gamma = \frac{1}{5184}$ Zentner, so würden ad II ... $l = 288'' = 4^0$ und ad IV .. $l = 576'' = 8^0$ als diejenigen Längen anzusehen sein, bis auf welche sich das Prisma selbst tragen

könnte, wenn die grösste Pressung der Fasern nur 16 Zentner per □″ erreichen dürfte.

§. 91.

Bestimmung der Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und für die Zusammendrückung des Materiales aus Versuchen über die Biegung. So wie das Tragvermögen aus den Elasticitätsgränzwerthen a und r und den übrigen Grössen t, h', h'' und l berechnet werden kann, so lassen sich auch umgekehrt diese Gränzwerthe a und r bestimmen, wenn man das Tragvermögen aus Versuchen mit genügender Verlässlichkeit auszumitteln in der Lage ist. Die Berücksichtigung der combinirten Fälle III und IV erscheint zu derartigen Versuchen am geeignetsten. Wird nämlich ein Prisma an beiden Enden aufgelegt, und in der Mitte mit der Belastung Q_3 in Anspruch genommen, das eigene Körpergewicht aber mit Q_4 bezeichnet, so hat man offenbar nach der Gleichung (113)

$$\tfrac{1}{4}(Q_3 + \tfrac{1}{2}Q_4) = M,$$

wenn die Belastung Q_3 nach und nach bis zur Erreichung der Elasticitätsgränze entweder für die Ausdehnung oder für die Zusammendrückung gesteigert worden ist. Zu diesem Behufe hat man im Sinne des §. 3 mit der Belastung Q_3 so weit zu gehen, als die dadurch hervorgebrachte Biegung nach der Entlastung verschwindet. Man kann sich zwar nicht verhehlen, dass solche Versuche mit grosser Präcision ausgeführt werden müssen, um nach dieser gleichsam indirecten Methode zur Bestimmung der Elasticitätsgränzen nur einigermassen brauchbare Resultate zu erhalten; allein man wird auch nicht übersehen dürfen, dass die Bestimmung der gedachten Gränzen selbst nach der directen Methode nicht minderen Schwierigkeiten unterliegt, wenn man sich diessfalls die Bemerkungen im §. 17 in das Gedächtniss zurückruft. Der Gebrauch der vorigen Formel ist übrigens klar. Da nämlich

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{at}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rt}{h''} \end{cases}$$

ist, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \text{entweder } a &= \frac{h'}{4t}\left(Q_3 + \tfrac{1}{2}\, Q_4\right) \\ \text{oder } r &= \frac{h''}{4t}\left(Q_3 + \tfrac{1}{2}\, Q_4\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (116),$$

je nachdem in Folge der Anspruchsnahme des Prismas die Elasticitätsgränze bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung zuerst erreicht worden ist.

Man hat bisher dieser Methode nicht die wünschenswerthe Aufmerksamkeit geschenkt, obwohl sie eben so natürlich erscheint, als die indirecte Methode zur Bestimmung des Moduls m (§. 72). Die Ursache hievon liegt indess nicht in den Schwierigkeiten, welche mit der Durchführung der besprochenen Methode verbunden sind, sondern vielmehr in dem Umstande, dass man beinahe durchgehends bei derartigen Versuchen nur die relative Festigkeit, nämlich die Bruchbelastung auszumitteln bemüht war, in der Meinung, dass dieselbe das Wesentlichste von dem zu wissen Nothwendigen bilde. Diess ist aber keineswegs der Fall. Denn es kann die Bruchbelastung nicht zum directen Anhaltspuncte für die Praxis dienen, da diese nicht den Bruch der Körper, sondern vielmehr deren sicheren Bestand beabsichtigt, und indem das herkömmliche Auskunftsmittel, nach welchem man zur Erreichung dieser Absicht nur einen gewissen Theil der Bruchbelastung als Tragvermögen annimmt, gewöhnlich an sehr schwankende Anhaltspuncte geknüpft wird, so ist wahrlich nicht einzusehen, warum man nicht geraden Weges auf das gewünschte Ziel losgehen, und demgemäss das Tragvermögen ohne Zwischenacte aus der Beobachtung ableiten sollte. Zudem dürfen die der Theorie entnommenen Formeln nicht auf den Bruch angewendet werden, da dieselben auf Hypothesen gestützt sind, die nur innerhalb der Elasticitätsgränzen als giltig angesehen werden können, daher man auch nicht darüber Befremden äussern muss, wenn zuweilen die auf den Bruch bezüglichen Versuchsresultate mit den theoretischen Formeln nicht vereinigt werden können.

§. 92.

Grösste zulässige Biegung. Nach dem §. 53 ist die Biegung eine Function von der Belastung, und nimmt mit derselben zufolge der Gleichungen (61), (68), (72) und (77) im einfachen Verhältnisse zu. Hat daher die Belastung das Tragvermögen erreicht, so

findet ohne Zweifel die grösste zulässige Biegung statt. Die Kenntniss derselben ist für die Praxis wichtig. Bezeichnet man ihren Werth mit $Max.\delta$ und den entsprechenden Zeigern, indem man nämlich wieder auf die im §. 58 angegebenen Fälle ad I, II, III und IV übergeht, so erhält man:

Im I. Falle aus der Gleichung (61) $\delta = \frac{Q l^3}{3 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (106) $Q = \frac{M}{l}$ und $\delta = Max.\delta_1$ setzt,

$$Max.\delta_1 = \frac{M l^2}{3 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{3 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{3 m h''} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (117);$$

Im II. Falle aus der Gleichung (68) $\delta = \frac{Q l^3}{8 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (107) $Q = \frac{2M}{l}$ und $\delta = Max.\delta_2$ setzt,

$$Max.\delta_2 = \frac{M l^2}{4 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{4 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{4 m h''} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (118);$$

Im III. Falle aus der Gleichung (72) $\delta = \frac{Q l^3}{48 m t}$, wenn man in derselben nach der Relation (108) $Q = \frac{4M}{l}$ und $\delta = Max.\delta_3$ setzt,

$$Max.\delta_3 = \frac{M l^2}{12 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{a l^2}{12 m h'} \\ \text{oder } \frac{r l^2}{12 m h''} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (119);$$

Endlich im IV. Falle aus der Gleichung (77) $\delta = \frac{5}{384} \frac{Q l^3}{m t}$ (numerisch genommen), wenn man in derselben nach der Relation (109) $Q = \frac{8M}{l}$ und $\delta = Max.\delta_4$ setzt,

$$Max.\delta_4 = \frac{5 M l^2}{48 m t} = \left\{ \begin{array}{r} \text{entweder } \frac{5 a l^2}{48 m h'} \\ \text{oder } \frac{5 r l^2}{48 m h''} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (120),$$

von welchen Doppelwerthen stets die kleineren auszuwählen sind.

Macht man einen Vergleich zwischen den gefundenen 4 Werthen $Max.\delta_1$, $Max.\delta_2$, $Max.\delta_3$ und $Max.\delta_4$ unter sonst gleichen Umständen, so gelangt man zu der Proportion

$$\left.\begin{aligned} Max.\delta_1 : Max.\delta_2 : Max.\delta_3 : Max.\delta_4 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{12} : \tfrac{5}{48} \\ &= 16 : 12 : 4 : 5 \end{aligned}\right\} \quad (121).$$

Diese Proportion steht mit der Relation (88) in Uebereinstimmung, wie diess auch nicht anders sein kann, da, wie schon im §. 88 bemerkt worden ist, die Gleichheit der Tragfähigkeiten in den 4 betrachteten Fällen auch die Gleichheit der betreffenden kleinsten Krümmungshalbmesser bedingt. Aus den Resultaten dieses §. sieht man, dass die grössten zulässigen Biegungen von dem Querschnitte des Prismas nur in so ferne abhängen, als die Höhentheile h' und h'' in Betracht kommen, so wie, dass das Verhältniss $\frac{Max.\delta}{l}$ zwischen der grössten zulässigen Biegung und der Länge l nicht constant ist, sondern mit dieser Länge im einfachen Verhältnisse wächst. Auch bemerkt man nicht ohne Interesse, dass

$$Max.\delta_1 > Max.\delta_2 > Max.\delta_3,$$

hingegen $Max.\delta_3 < Max.\delta_4$ ist.

§. 93.

Aus einem runden Baustamme einen vierkantigen Balken von der grössten Stärke zu zimmern. Diese Aufgabe ist analog mit der im §. 73 aufgelösten. Nur handelt es sich nicht, wie dort, um die grösste Steifigkeit, sondern um das grösste Tragvermögen. Man behalte die dortigen Bezeichnungen und die bezügliche Figur 70 bei, und beachte, dass die Beantwortung der angeregten Frage dermalen darin besteht, das Tragmoment

$$M = \tfrac{1}{6} r b h^2$$

oder, was dasselbe ist, den Ausdruck $b h^2$ zu einem Maximum zu machen. Es ist aber $b = \sqrt{cx}$ und $h = \sqrt{c(c-x)}$, daher

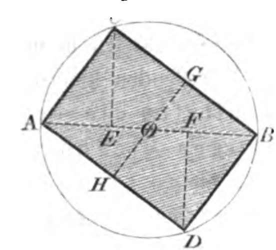
$$b h^2 = c(c-x)\sqrt{cx} = c\sqrt{c}\,\sqrt{x\,(c-x)^2}.$$

Nun wird $x(c-x)^2$ am grössten, wenn

$$\frac{d[x(c-x)^2]}{dx} = (c-x)^2 - 2x(c-x) = o,$$

d. h. $x = \frac{c}{3}$ wird, da für diesen Werth $\frac{d^2[x(c-x)^2]}{dx^2}$ negativ ausfällt.

Fig. 75a.



Es wird also der beabsichtigte Zweck erreicht, wenn man (Fig. 75a) $AE = EF = BF = \frac{1}{3} AB$ macht, nämlich den Durchmesser in 3 gleiche Theile theilt, und sodann zur Bestimmung der Puncte C und D die Perpendikel CE und DF auf AB construirt. Nach dieser Anordnung erhält man $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$ und $h = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, daher

$$b : h = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{\cdot}4142 = 0{\cdot}7071 : 1,$$

ferner $f = bh = \frac{c^2}{3}\sqrt{2} = 0{\cdot}4714\ c^2 = 0\ 6002\ F.$

Endlich ist das Tragmoment für das gefundene Rechteck

$$M = \frac{\sqrt{3}}{27} rc^3 = 0\ 0642\ rc^3,$$

daher, wenn das Tragmoment für den vollen Kreisquerschnitt M' heisst, wegen $M' = \frac{\pi}{32} rc^3 = 0{\cdot}0982\ rc^3$ auch

$$M : M' = \frac{\sqrt{3}}{27} : \frac{\pi}{32} = 0{\cdot}6534 : 1 = 1 : 1{\cdot}5304,$$

wonach die Fläche des Rechteckes nur 0·6002 von der Kreisfläche, und das Tragvermögen des vierkantig behauenen Balkens nur 0·6534 von dem des runden Baumstammes betragen würde. Man bemerkt bei dieser Gelegenheit in Hinblick auf den §. 73, dass zwischen dem steifsten und stärksten Balken ein Unterschied sei, und dass der erstere eine verhältnissmässig grössere Höhe besitze, als der letztere.

Zweites Kapitel.

Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung.

§. 94.

Erklärung. Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung sind derart geformte, bei welchen unter hinreichender Grösse der Anspruchsnahme in Folge der Biegung die Elasticitätsgränze entweder bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung in allen Querschnitten zugleich erreicht wird. Bei solchen Körpern bleibt daher die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt.

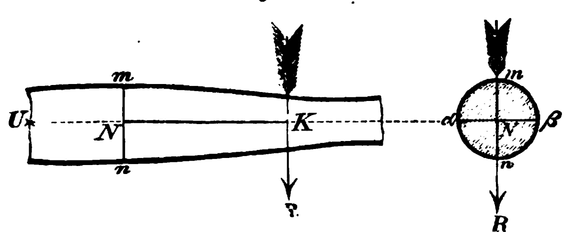
§. 95.

Form solcher Körper. Man begreift, dass solche Körper nicht die bisher betrachtete prismatische Form haben können, sondern die Dimensionen des Querschnittes mit der örtlichen Lage desselben variiren müssen. Es unterliegt indess keinem Anstande, hiebei die durch die Schwerpuncte der Querschnitte gezogene Längenaxe, wie bei einem Prisma, geradlinig anzunehmen. Der gestellten Bedingung gemäss kann der gefährliche Querschnitt an jeder beliebigen Stelle N (Fig. 76) angenommen, und hienach stets die Gleichung

$$Rz = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

aufgestellt werden, wenn in derselben M das Tragmoment des betreffenden Querschnittes, R die Resultirende der normal auf die

Fig. 76

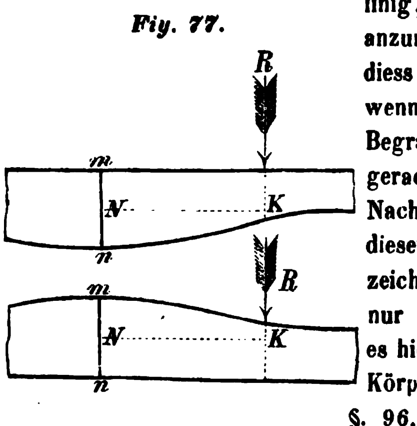


Längenaxe wirkenden Kräfte und $z = KN$ ihren Hebelsarm in Bezug auf die neutrale Axe des erwähnten Querschnittes bezeichnet.

Zur sofortigen Untersuchung lasse man den Querschnitt f mit seiner örtlichen Lage variiren, und beziehe die veränderlichen Grössen auf ein Coordinatensystem, in welchem die Abscissen in die Längenaxe fallen, und der Ursprung nach irgend einem Puncte U in dieser verlegt wird. Man setze hiebei die Abscisse UN . . . . . $= x$,
die variable Höhe des Querschnittes mn . . . . $= v$
und die ebenfalls variable Breite desselben $\alpha\beta$ . . . . . $= u$.
Zuweilen kann v oder u auch constant sein.

Diesen Bezeichnungen gemäss wird man für jede gegebene Querschnittsform im Stande sein, das Tragmoment als eine Function von v und u auszudrücken, das Kraftmoment aber von x abhängig darzustellen, und auf diese Weise mittelst der Gleichung (122) eine Relation zwischen x, v und u zu bilden, welche sodann zur Anschauung führen wird, wie für einen Körper von gleichem Widerstande die Querschnitte mit der örtlichen Lage derselben zu variiren haben. Man kann sich übrigens auch erlauben, die Längenaxe, nämlich die Verbindung der Schwerpuncte der Querschnitte, krummlinig, anstatt wie zuvor geradlinig anzunehmen. In manchen Fällen ist diess sogar zweckmässig, z. B. dann, wenn man die obere oder untere Begränzung des Längendurchschnittes geradlinig wünscht. (Fig. 77.) Das Nachstehende zeigt die Anwendung dieser Lehre auf die im §. 58 bezeichneten Fälle I, II, III und IV, nur mit dem Unterschiede, dass man es hier mit anderen, als prismatischen Körpern zu thun hat.

Fig. 77.



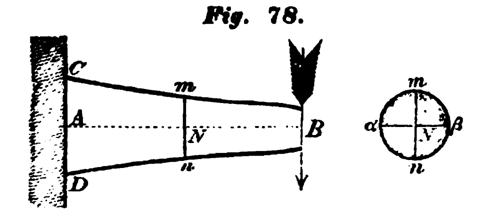
§. 96.

I. Fall. Festhaltung des Körpers an einem Ende und Belastung desselben am anderen Ende. (Fig. 78.) Sei in B der Coordinatenursprung, so ist für einen beliebigen Querschnitt mn

$$BN = x, \quad mn = v, \quad \alpha\beta = u$$

und das betreffende Kraftmoment $Rx = Qx$, wenn von dem eigenen Gewichte des Körpers abstrahirt wird. Um auch das Tragmoment M

Fig. 78.



von Seite des Querschnittes darstellen zu können, ist zunächst nothwendig, sich über die Form desselben zu einigen. Soll etwa der Querschnitt ein Rechteck von der Breite u und der Höhe v sein, so wäre nach den Gleichungen (96)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2, \end{cases}$$

daher wegen der Gleichung (122) sofort

$$Q x = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2. \end{cases}$$

Ist ferner für den Wurzelquerschnitt in A die Abscisse $x = AB = l$, die Breite $u = b$ und die Höhe $v = h$, so hat man analog

$$Q l = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a b h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b h^2, \end{cases}$$

daher jedenfalls $l : x = b h^2 : u v^2$ und hieraus

$$\frac{v^2}{h^2} \cdot \frac{u}{b} = \frac{x}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (123).$$

Es leuchtet ein, dass für eine der beiden Grössen u und v das Gesetz noch immer willkürlich angenommen werden könne. Wollte man z. B. sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Breite geben, also $u = b$ setzen, so erhielte man

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (124),$$

Fig. 79.

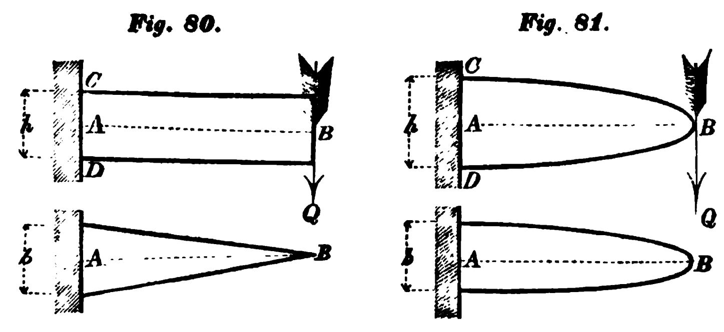
daher als Begränzungscurve bezüglich der Höhendimensionen für den Körper von gleichem Widerstande eine gemeine Parabel. (Fig. 79.)

Wollte man hingegen sämmtlichen Querschnitten eine gleiche Höhe geben, so hätte man wegen $v = h$ sofort

$$\frac{u}{b} = \frac{x}{l} \quad . \; . \; . \quad (125),$$

wonach die Begränzung der Breitendimensionen für den Körper von gleichem Widerstande geradlinig würde. (Fig. 80.)

10*



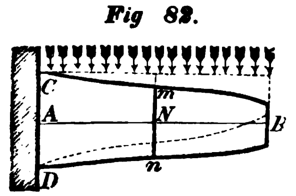
Sollten endlich die sämmtlichen Rechtecke ähnlich sein, so hätte man wegen $u : v = b : h$ oder $u = \frac{b}{h} v$ nach der Gleichung (123)

$$\left.\begin{array}{r} \frac{v^3}{h^3} = \frac{x}{l} \\ \text{und } \frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (126).$$

Es wäre sodann die Begränzungscurve für die Oberfläche im Längendurchschnitte sowohl hinsichtlich der Höhen als auch der Breiten eine cubische Parabel. (Fig. 81.)

§. 97.

II. Fall. Festhaltung des Körpers an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach. (Fig 82.) Die Bezeichnungen seien dieselben, wie im vorigen §., nur bedeute jetzt Q die der ganzen Länge nach gleichförmig vertheilte Belastung. In diesem Falle ist das Kraftmoment



$$Rx = \frac{Qx^2}{2l},$$

daher allgemein $M = \frac{Qx^2}{2l}$.

Hätte man wieder als Querschnittsform die rechteckige, so wäre

$$\frac{Qx^2}{2l} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2, \end{cases}$$

und insbesondere

$$\frac{Ol}{2} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a b h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b h^2, \end{cases}$$

also auch $x^2 : l^2 = u v^2 : b h^2$, und sofort

$$\frac{v^2}{h^2} \cdot \frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127).$$

Sollten die Rechtecke stets eine gleiche Breite haben, so wäre $u = b$ und

$$\frac{v}{h} = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (128),$$

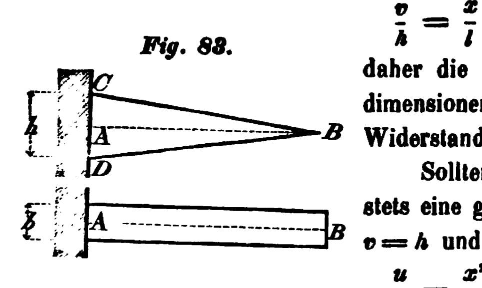


Fig. 83.

daher die Begränzung für die Höhendimensionen des Körpers von gleichem Widerstande geradlinig. (Fig. 83.)

Sollten hingegen die Rechtecke stets eine gleiche Höhe haben, so wäre $v = h$ und

$$\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129),$$

daher die Begränzungscurve für die Breitendimensionen des Körpers von gleichem Widerstande eine gemeine Parabel, deren Axe in B senkrecht auf AB steht. (Fig. 84.)

Fig. 84.

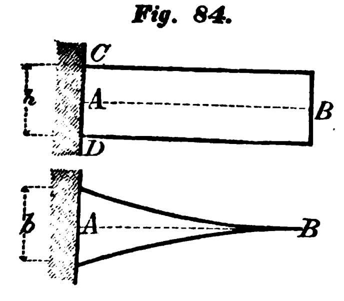
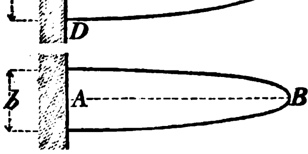


Fig. 85.



Sollten endlich die Rechtecke stets ähnlich sein, so müsste $u : v = b : h$, daher $u = \frac{b v}{h}$, sofort aber

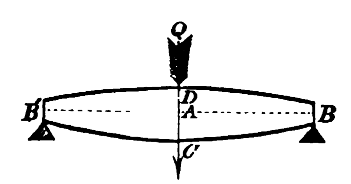
$$\left.\begin{array}{l} \frac{v^3}{h^3} = \frac{x^2}{l^2} \\ \text{und } \frac{u^3}{b^3} = \frac{x^2}{l^2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

sein. Die betreffende Begränzungscurve gehörte sonach ebenfalls in die Familie der Parabeln. (Fig. 85.)

§. 98.

III. Fall. Unterstützung beider Enden des Körpers und Belastung in der Mitte desselben. (Fig. 86.)

Fig 86.

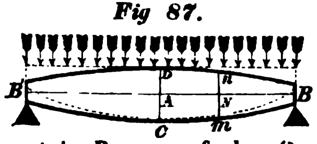


In Uebereinstimmung mit dem §. 63 befindet sich dieser Körper in demselben Zustande, wie wenn er in der Mitte CD festgehalten, und an den beiden Enden B und B' mit der Belastung $\frac{Q}{2}$ in Anspruch genommen würde. Die Form der Körper von gleichem Widerstande in diesem Falle ist also für jede Hälfte AB und AB' dieselbe, wie die im §. 96 besprochene, wenn auch gegenwärtig, wie dort, von dem eigenen Körpergewichte abstrahirt wird.

§. 99.

IV. Fall. Unterstützung beider Enden des Körpers, und gleichförmig vertheilte Belastung der ganzen Länge nach. (Fig. 87.)

Fig 87.



Setzt man in diesem Falle $AN = x$, $BB' = l$ und die ganze der Länge nach gleichförmig vertheilte Balastung $= Q$, so ist das statische Kraftmoment in Bezug auf den Querschnitt in N nach der Gleichung (74) im §. 65, abgesehen von dem algebraischen Werthszeichen,

$$\frac{Q}{2l}\left(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2\right).$$

Soll nun wieder die Querschnittsform die rechteckige sein, so hätte man allgemein

$$\frac{Q}{2l}\left(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2\right) = \begin{cases} \text{entweder } \tfrac{1}{6}auv^2 \\ \text{oder } \tfrac{1}{6}ruv^2 \end{cases}$$

und insbesondere

$$\frac{Ql}{8} = \begin{cases} \text{entweder } \tfrac{1}{6}abh^2 \\ \text{oder } \tfrac{1}{6}rbh^2, \end{cases}$$

sofort aber

$$\tfrac{1}{4}l^2 - x^2 : \tfrac{1}{4}l^2 = uv^2 : bh^2,$$

und daraus

$$\frac{v^2}{h^2} \cdot \frac{u}{b} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131).$$

Zur weiteren Versinnlichung mögen nun gleichfalls einige specielle Bedingungen eingeführt werden. Wollte man z. B. sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Breite geben, so würde wegen $u = b$

$$\frac{v^2}{h^2} = 1 - \frac{x^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132),$$

Fig. 88.

daher die Curve, welche die Oberfläche des Körpers von gleichem Widerstande im Längendurchschnitte begränzte, eine **Ellipse** sein. (Fig. 88.)

Wollte man aber den sämmtlichen Rechtecken eine gleiche Höhe geben, so hätte man wegen $v = h$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{u}{b} = 1 - \frac{x^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133),$$

welche eine **gemeine Parabel** repräsentiren würde. (Fig. 89.)

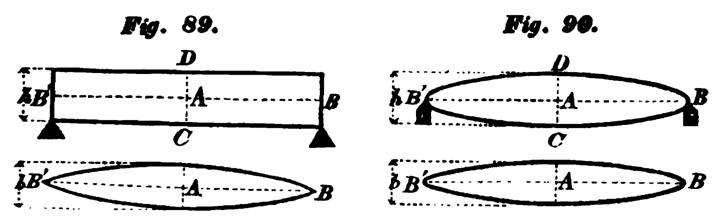


Fig. 89. *Fig. 90.*

Sollten endlich sämmtliche Rechtecke ähnlich sein, so erhielte man wegen $u = \frac{bv}{h}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{h^2} &= 1 - \frac{x^2}{l} \\ \text{und} \quad \frac{u^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134),$$

also eine **Curve vom 3. Grade** und für den Körper von gleichem Widerstande die Form, wie in der Fig. 90.

§. 100.

Combinirung der Fälle I und II, dann III und IV. Wird der Körper an einem Ende festgehalten, und am anderen Ende mit der Belastung Q_1, so wie der ganzen Länge nach mit der gleichförmig vertheilten Last Q_2 in Anspruch genommen, so entsteht die Combinirung der Fälle I und II. Behält man die betreffenden Be-

zeichnungen in den §§. 96 und 97 bei, so ist die Bedingungsgleichung für die Körper von gleichem Widerstande

$$M = Q_1\ x + \frac{Q_2 x^2}{2l},$$

also beispielsweise für einen rechteckigen Querschnitt

$$\text{allgemein } Q_1\ x + \frac{Q_2 x^2}{2l} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a u v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r u v^2, \end{cases}$$

und insbesondere wegen $x = l$, $u = b$ und $v = h$

$$(Q_1 + \tfrac{1}{2} Q_2)\ l = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} a b h^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6} r b h^2, \end{cases}$$

sofort aber jedenfalls

$$\frac{x}{l} \left\{ \frac{\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{1}{2}\frac{x}{l}}{\frac{Q_1}{Q_2} + \frac{1}{2}} \right\} = \frac{u}{b} \cdot \frac{v^2}{h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135).$$

Diese Gleichung kann wieder auf mannigfaltige Weise benützt werden. Sie geht für $Q_2 = o$ in die Gleichung (123), für $Q_1 = o$ hingegen in die Gleichung (127) über.

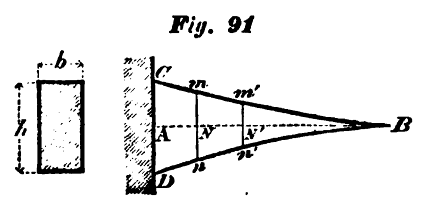
Wird ein an beiden Enden unterstützter Körper sowohl in der Mitte mit einem Gewichte Q_3, als auch gleichförmig über seine ganze Länge mit Q_4 belastet, so entsteht die Combinirung der Fälle III und IV. Man erhält sodann für die Körper von gleichem Widerstande als Bedingungsgleichung

$$M = \tfrac{1}{2} Q_3\ (\tfrac{1}{2} l - x) + \frac{Q_4}{2l}\ (\tfrac{1}{4} l^2 - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (136),$$

wenn x und l, wie in der Figur (87) gewählt, und bloss der numerische Werth des statischen Kraftmomentes angenommen wird. Die sofortige Benützung dieser Gleichung unterliegt mit Rücksicht auf den Vorgang in den früheren §§. keinem Anstande. Auch erscheinen für $Q_4 = o$ und $Q_3 = o$ die in den §§. 98 und 99 behandelten Fälle III und IV für sich.

§. 101.

Fig. 91



Berücksichtigung des eigenen Körpergewichtes. Ein specielles Beispiel wird das einzuschlagende Verfahren deutlich machen. Es sei der Körper (Fig. 91) an einem Ende

festgehalten, und werde nur durch das eigene Gewicht beansprucht. Die Querschnitte sollen Rechtecke von gleicher Breite sein.

Man setze

die ganze Länge AB . . . . $= l$,
die Höhe CD . . . . $= h$,
die constante Breite . . . . $= b$,
für einen beliebigen Querschnitt mn die Abscisse BN . . $= x$,
die Höhe mn . . . . $= v$,
für einen zwischen B und N gelegenen Querschnitt $m'n'$
aber BN' . . . . $= x'$
und $m'n'$ . . . . $= v'$,
endlich das Gewicht der cubischen Einheit des Materiales . . $= \gamma$.

Das statische Moment des Gewichtes in Bezug auf die neutrale Axe im Querschnitte mn ist $Rz = b\gamma\int_0^x v'\,dx'(x-x')$ und das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\, a b v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6}\, r b v^2, \end{cases}$$

daher wegen der Gleichung (122)

$$\gamma\int_0^x v'\,dx'(x-x') = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\, a v^2 \\ \text{oder } \frac{1}{6}\, r v^2. \end{cases}$$

Differentirt man diese Gleichung zweimal nach x, so erhält man zuerst

$$\gamma\, dx \int_0^x v'\,dx' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\, a\, d(v^2) \\ \text{oder } \frac{1}{6}\, r\, d(v^2) \end{cases}$$

und weiters

$$\gamma v\, dx^2 = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\, a\, d^2(v^2) \\ \text{oder } \frac{1}{6}\, r\, d^2(v^2), \end{cases}$$

wenn man beachtet, dass

$$\int_0^x v'\,dx' = \int_0^x v\,dx \text{ ist.}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{d^2(v^2)}{dx^2} = \begin{cases} \text{entweder } \frac{6\gamma}{a}\, v \\ \text{oder } \frac{6\gamma}{r}\, v, \end{cases}$$

und diesem Ausdrucke entspricht das Integrale

$$v = \begin{cases} \text{entweder } \frac{\gamma}{2a} x^2 \\ \text{oder } \frac{\gamma}{2r} x^2, \end{cases}$$

von welchen Doppelwerthen offenbar der grössere zu nehmen ist. Da nun $v = h$ und $x = l$ zusammengehörige Grössen sind, so hat man auch

$$h = \begin{cases} \text{entweder } \frac{\gamma}{2a} l^2 \\ \text{oder } \frac{\gamma}{2r} l^2 \end{cases}$$

und durch Vergleichung $y : h = x^2 : l^2$, sofort aber

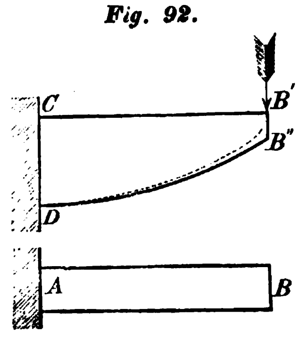
$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137).$$

In dem untersuchten Falle sind daher für den Körper von gleichem Widerstande die Curven BC und BD gemeine Parabeln, für welche die Axe in B normal auf AB steht. Auf ähnliche Weise kann man auch in anderen Fällen verfahren.

§. 102.

Besondere Bemerkung. Man hat gesehen, dass bei Körpern von gleichem Widerstande die Querschnitte mit den statischen Kraftmomenten Rz kleiner werden, und dort, wo $z = o$ ist, gänzlich verschwinden. Das letzte Resultat ist eigentlich nicht mehr hinreichend genau. Die Gleichung (94) zwischen den statischen Kraft- und Widerstandsmomenten, welche bei der diessfälligen Untersuchung massgebend war, ist nämlich nur in so lange eine hinreichend genäherte, als z der Nulle sich nicht allzusehr nähert. Dieser Bedingung gemäss erkennt man, dass die entwickelten Formen für die Körper von gleichem Widerstande, von der Wahrheit in so ferne etwas abweichen werden, als die Querschnitte nicht mit z verschwinden dürfen, zumal auch die mittelst der Fig. 22 versinnlichte Tendenz des Uebereinanderverschiebens der Querschnitte zu berück-

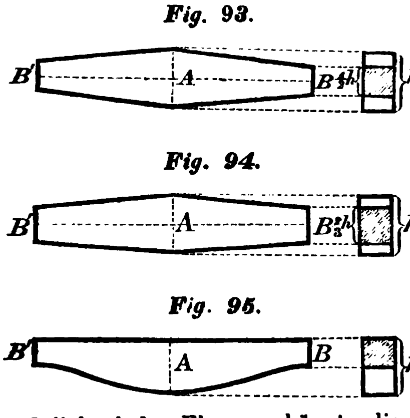
Fig. 92.

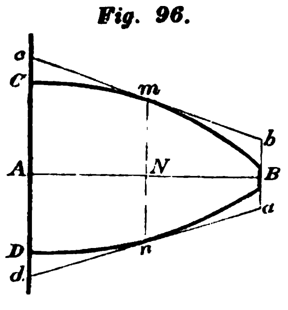


sichtigen ist. So z. B. würde statt der Fig. 79 richtiger die Fig. 92 zu substituiren sein, wenn man hiebei mit Rücksicht auf die Fig. 77 die obere Begränzung geradlinig annähme.

§. 103.

Genäherte Formen für Körper von gleichem Widerstande. In manchen Fällen kann es zweckmässig sein, sich den Formen für Körper von gleichem Widerstande zu nähern. Als genäherte Formen kann man solche wählen, welche die vorhin durch Rechnung gefundenen umschliessen. Hiebei werden tangirende Ebenen an die betreffenden krummen Oberflächen nützliche Dienste leisten. So z. B. könnte man für den im §. 96 bezeichneten Fall statt den Figuren 79 und 81 genäherte Formen wählen, wie solche in den Figuren 93 und 94 ersichtlich sind. Eben so könnte die Fig. 95 anstatt der Fig. 88 genommen werden, wenn man zugleich die obere Begränzung des Längendurchschnittes geradlinig wünscht.





Bei der Wahl einer derartigen genäherten Körperform kann es geschehen, dass man die Absicht hat, anstatt der betreffenden Begränzungscurven BC und BD (Fig. 96) die Tangenten bc und ad so anzunehmen, dass die Fläche $abcd$ möglichst klein wird. Dieser Bedingung wird dadurch entsprochen, dass man $AN = BN$ macht *). Wäre z. B. die Curve', wie in

---

*) Sei nämlich zuerst bezüglich der Curve BC, $BN = x$, $AB = l$ und $mN = y$, so hat man $Bb = y - x\frac{dy}{dx}$ und $Ac = y + (l - x)\frac{dy}{dx}$, daher

der Fig. 79 eine Parabel, so würde durch die benannte Construction $B\,b = \frac{1}{3} A\,c$ werden.

Uebrigens leuchtet ein, dass bei solchen genäherten Körperformen die Lage des gefährlichen Querschnittes nicht mehr unbestimmt bleibt, sondern dort anzunehmen ist, wo die genäherte Form mit der der Rechnung entsprechenden zusammentrifft.

§. 104.

Biegung der Körper von gleichem Widerstande. Ist die Form für einen Körper von gleichem Widerstande bekannt, so kann man auch die Biegung finden, welche er unter den vorhandenen Umständen erleidet. Zu diesem Zwecke hat man ebenfalls wie bei prismatischen Körpern die Gleichung (47) im §. 52 in geeigneter Weise anzuwenden, nur mit dem Unterschiede, dass der Werth für das Trägheitsmoment t nicht, wie dort constant, sondern nach Massgabe des veränderlichen Querschnittes variabel ist, und dieser Umstand bei der zweimal nach einander vorzunehmenden Integration zu berücksichtigen kommt. Um diess durch ein Beispiel zu zeigen, betrachte man den im §. 96 besprochenen I. Fall. Mit Beziehung auf die Figur 78 hat man zunächst

$$m\,t\,.\,\frac{d^2 y}{d x^2} = -\,Q\,x\,,$$

indem man nämlich in der bezüglichen Gleichung (58) x statt $l - x$, daher $-\,d\,x$ statt $d\,x$ setzt, und y, eben so wie in der Fig. 53, die Ordinate für den Punct N der Biegungscurve bezeichnen lässt. Wäre der Querschnitt ein Rechteck von der Höhe v und Breite u, so hätte man überdiess nach der Gleichung (51) $t = \frac{1}{12} u\,v^3$, und legte man

---

Area $A\,B\,b\,c = Y = \left(\frac{B\,b + A\,c}{2}\right) l$ oder $Y = \left[y + (\frac{1}{2} l - x)\,\frac{d\,y}{d\,x}\right] l$, sofort aber für den zu untersuchenden Fall des Minimums

$$\frac{d\,Y}{d\,x} = l\,[\tfrac{1}{2} l - x]\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = o,$$

und hieraus $x = \frac{1}{2}\,l$. Für diesen Werth wird $\frac{d^2 Y}{dx^2} = -\,l\,\frac{d^2 y}{dx^2}$ positiv, wenn, wie vorausgesetzt wurde, die Curve $B\,C$ gegen die Axe $A\,B$ concav gelegen, also $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ ist. Das Gleiche gilt für die untere Curve $B\,D$.

noch zur vollkommenen Bestimmung die der Figur 79 und der Gleichung (124) entsprechende Bedingung zu Grunde, so würde wegen $u = b$ und $v = h\sqrt{\frac{x}{l}}$ sofort

$$t = \frac{1}{12}\, b\, h^3 \,.\, \frac{x^{\frac{3}{2}}}{l^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad (138),$$

und auf diese Weise

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{12\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3} \,.\, x^{-\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139).$$

Diesem Ausdrucke entsprechen die Integralien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3}\,(\sqrt{l} - \sqrt{x}) \quad \ldots\ldots \quad (140)$$

und

$$y = \frac{24\, Q l^{\frac{3}{2}}}{m\, b\, h^3}\,(x\sqrt{l} - \tfrac{2}{3}\, x\sqrt{x}) \quad \ldots \quad (141),$$

wenn man beachtet, dass $\frac{dy}{dx}$ für $x = l$ verschwinden, und für $x = o$ auch $y = o$ werden muss. Die grösste Ordinate y resultirt für $x = l$, und gibt die zu suchende Biegung. Heisst diese letztere δ, so erhält man aus der Gleichung (141)

$$\delta = \frac{8\, Q l^3}{m\, b\, h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (142).$$

Wäre der Körper prismatisch und der Querschnitt überall ein Rechteck von der Breite b und Höhe h gewesen, so würde zufolge der Gleichung (61) die Biegung $\delta' = \frac{1}{3}\frac{Q l^3}{m t}$, daher wegen $t = \frac{1}{12} b h^3$, auch

$$\delta' = \frac{4\, Q l^3}{m\, b\, h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143).$$

Vergleicht man die Relationen (142) und (143), so erhält man

$$\delta = 2\,\delta' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (144).$$

Die Biegung bei dem betrachteten Körper von gleichem Widerstande wäre daher doppelt so gross, als wie bei dem prismatischen Körper unter sonst gleichen Umständen.

Auf ähnliche Weise hat man in anderen Fällen zu verfahren, selbst dann, wenn man es bloss mit genäherten Formen für Körper von gleichem Widerstande zu thun hat. Es ist nämlich nur immer

das Hauptaugenmerk darauf zu richten, dass das betreffende Trägheitsmoment t als eine Function von x ausgedrückt werde, um hiedurch die nothwendige doppelte Integration der Gleichung (47) zu ermöglichen.

Drittes Kapitel.

Mechanisches Moment des Widerstandes gegen Biegung *). Beurtheilung einer Stosswirkung in der Richtung normal auf die Längenaxe.

§. 105.

Erklärung. Die Biegung eines materiellen Prismas erfolgt nicht plötzlich, sondern geht succesive vor sich, indem die Puncte der Längenaxe eine verzögerte Bewegung annehmen, welche bei Beginn der Wirkung am grössten ist, und endlich nach Verlauf einer gewissen Zeit aufhört. Während dieser Zeit wird der Widerstand mit der Zunahme der Biegung nach und nach bis zu dem Grade gesteigert, welcher der am Schlusse der Bewegung hervorgebrachten totalen Biegung entspricht. Nachdem der jeweilige Widerstand als Gegenkraft auftritt, welche in der Längenaxe ihren Angriffspunct hat, so leuchtet ein, dass dieser Widerstand einen Weg zurücklegt, der aus der Grösse der Biegung zu beurtheilen ist.

Aus dieser Ursache wird bei jeder Biegung ein mechanisches Moment des Widerstandes in's Leben gerufen, welches von der jeweiligen Grösse des Widerstandes und der correspondirenden Biegung abhängt. Die Kenntniss dieses Momentes ist in manchen Fällen benützbar, wie z. B. bei der Beurtheilung der Wirkung eines Stosses, wenn derselbe normal auf die Längenaxe gerichtet ist.

§. 106.

Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes. Zu diesem Behufe sei AB (Fig. 97) die Längenaxe eines

*) Nach Poncelet auch lebhafter Widerstand genannt.

materiellen Prismas, welches durch eine normal auf dieselbe gerichtete Kraftwirkung gebogen wird. Sei nach Verlauf einer gewissen

Fig. 97.

Zeit . . . . t
die gedachte Längenaxe AB in die Lage $A'B'$ gekommen, und die dadurch eingetretene Biegung NN' . . . . $= \delta$,
der in diesem Augenblicke sich einstellende Widerstand in N' . . . . $= Q$,
das in's Leben gerufene mechanische Widerstandsmoment aber . . . . $= W$,
sei ferner für einen unendlich kleinen Zeitzuwachs . . . dt
die Biegungsvermehrung $N'N''$ . . . . $= d\delta$,
so wie die Vergrösserung des Widerstandes . . . . $= dQ$,
endlich die Vermehrung des mechanischen Widerstandsmomentes . . . . $= dW$.

Diess vorausgesetzt, hat man analog, wie im §. 32,

$$dW = Q\,d\delta.$$

Um jetzt die Abhängigkeit zwischen Q und δ einzuführen, bemerke man, dass nach den Erörterungen im 1. Kapitel dieses Abschnittes die Biegung δ innerhalb der Elasticitätsgränzen der den Widerstand repräsentirenden Kraft proportional anzunehmen und sofort $\delta = cQ$ zu setzen ist, wo c in Bezug auf Q und δ als constant zu gelten hat, und bloss von den anderweitigen Umständen abhängt. Dieser Bemerkung zufolge erhält man wegen $d\delta = c\,dQ$ offenbar

$$dW = cQ\,dQ,$$

und sofort durch Integration

$$W = \frac{cQ^2}{2} = \frac{\delta^2}{2c} = \frac{Q\delta}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (145).$$

Das mechanische Widerstandsmoment steht daher im geraden Verhältnisse mit dem Quadrate des Widerstandes, oder auch mit dem Quadrate der Biegung, oder endlich auch mit dem Producte aus dem Widerstande und der Biegung, je nachdem man die eine oder andere von den Formeln betrachtet.

Wäre z. B. das Prisma an einem Ende festgehalten und am anderen Ende einer Kraftwirkung von 12 Zentnern ausgesetzt, welche eine Biegung von $\frac{1}{2}$ Zoll hervorbrächte, so hätte man für das durch diese Biegung entwickelte mechanische Widerstandsmoment, wegen $Q = 12$ und $\delta = \frac{1}{2}$, sofort $W = 3$ Zoll-Zentner. Es würde daher eine eben so grosse Stosswirkung, z. B. wenn das Gewicht von 1 Zentner 3 Zoll hoch gefallen wäre, und von dem freien Ende des Prismas plötzlich aufgehalten werden müsste, im Stande sein, das erwähnte mechanische Widerstandsmoment, also auch die Biegung von $\frac{1}{2}$ Zoll hervorzurufen. Bei dieser Schlussfolgerung ist jedoch von dem eigenen Gewichte des Prismas abgesehen.

§. 107.

Grösstes zulässiges mechanisches Widerstandsmoment. Das grösste mechanische Widerstandsmoment, auf welches ohne Gefahr für den Körperbestand gerechnet werden kann, wird erhalten, wenn man in der Relation (145) statt Q und δ die unter dieser Bedingung grössten zulässigen Werthe substituirt, also

$$Max . W = \tfrac{1}{2} (Max . Q) (Max . \delta) \quad . \quad . \quad (146)$$

setzt.

Wird zuerst das Prisma an einem Ende festgehalten, und mittelst einer Kraftwirkung am anderen Ende gebogen, so ist unter Beibehaltung der im 1. Kapitel dieses Abschnittes gewählten Bezeichnungen der grösste Werth für den Widerstand Q offenbar dem betreffenden Tragvermögen nach der Relation (106) gleich, während die grösste zulässige Biegung aus der Gleichung (117) zu entnehmen ist. In diesem Falle ist sonach

$$Max . Q = \frac{M}{l} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \; \frac{a\,t}{h'\,l} \\ \text{oder} \; \frac{r\,t}{h''\,l}, \end{array} \right. \text{ u. } Max . \delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \frac{1}{3} \frac{a}{m} \frac{l^2}{h'} \\ \text{oder} \; \frac{1}{3} \frac{r}{m} \frac{l^2}{h''}, \end{array} \right.$$

also auch

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \; \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{t\,l}{h'^2} \\ \text{oder} \; \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{t\,l}{h''^2} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147).$$

Wird hingegen das Prisma an beiden Enden unterstützt, und concentrirt sich die Kraftwirkung in der halben Länge, so hat man nach den Gleichungen (108) und (119)

$$Max.\,Q = \frac{4M}{l} = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{4at}{h'l} \\ \text{oder}\ \frac{4rt}{h''l}, \end{cases} \text{u.}\ Max.\,\delta = \begin{cases} \text{entw.}\ \frac{1}{12}\,\frac{a}{m}\,\frac{l}{h'} \\ \text{oder}\ \frac{1}{12}\,\frac{r}{m}\,\frac{l^2}{h''}, \end{cases}$$

also auch

$$Max.\,W = \begin{Bmatrix} \text{entw.}\ \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\,\frac{lt}{h'} \\ \text{oder}\ \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{lt}{h''^2} \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (148).$$

Es versteht sich übrigens von selbst, dass von den jeweiligen Doppelwerthen stets die kleineren zu gebrauchen sind.

Die Gleichungen (147) und (148) sind merkwürdiger Weise identisch, wenn anders die gleichnamigen Buchstaben gleiche Werthe haben.

Unter dieser Bedingung folgt, dass das Prisma in den betrachteten 2 Fällen dasselbe mechanische Widerstandsmoment zu leisten fähig ist, und daher in dieser Beziehung die beiderseitige Verschiedenheit in der Art der Ansprucbsnahme vergleichsweise keinen Vortheil darbietet.

§. 108.

Anwendung auf besondere Querschnitte. Um die Anwendung des in dem vorigen §. Gesagten auf besondere Querschnitte des Prismas durchzuführen, ist es nur nöthig, in der aufgestellten Formel für *Max . W* statt dem Trägheitsmomente t und den Höhendimensionen h' und h'' die entsprechenden Werthe zu setzen. Berücksichtiget man die im §. 55 angegebenen einfachen Querschnitte, so erhält man:

1. für ein Rechteck (Fig. 41)

$$Max.\,W = \begin{Bmatrix} \text{entw.}\ \frac{1}{18}\,\frac{a^2}{m}\,fl \\ \text{oder}\ \frac{1}{18}\,\frac{r^2}{m}\,fl \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (149);$$

2. für ein Rhombus (Fig. 42), und für die Figuren (43) und (44)

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{36} \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{36} \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (150)$$

3. für eine Ellipse (Fig. 45) oder (Fig. 46)

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{24} \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (151);$$

4. für eine halbe Ellipse (Fig. 47), wenn die oberen Fasern ausgedehnt, und die unteren zusammengedrückt werden

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } 0{\cdot}035 \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } 0{\cdot}065 \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (152),$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden,

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } 0{\cdot}065 \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } 0{\cdot}035 \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (153);$$

5. für ein Dreieck (Fig. 48), wenn die Fasern an der Basis ausgedehnt und an der Spitze zusammengedrückt werden,

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12} \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{48} \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (154),$$

im entgegengesetzten Falle aber, wenn die Fasern an der Spitze ausgedehnt und an der Basis zusammengedrückt werden,

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{48} \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{12} \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (155);$$

6. für ein Parabelsegment in der Stellung (Fig. 49)

$$Max . W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{30} \frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{30} \frac{r^2}{m} fl \end{array} \right\} \quad . \; . \; (156);$$

7. für ein Parabelsegment in der Stellung (Fig. 50), wenn die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c} \text{entweder } \frac{2}{63}\frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{1}{14}\frac{r^2}{m} fl \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (157),$$

und im entgegengesetzten Falle, wenn die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden,

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c} \text{entweder } \frac{1}{14}\frac{a^2}{m} fl \\ \text{oder } \frac{2}{63}\frac{r^2}{m} fl \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (158).$$

Ex. Sei für einen hölzernen Balken mit rechteckigem Querschnitte $f = 100\square''$, $l = 288''$, $r = 10$ Zentner und $m = 16000$, so wäre nach der zweiten der Formeln (149), welche für Holz wegen $r < a$ den kleineren Werth gibt, $Max\,.\,W = 10$ Zoll-Zentner. Der Stoss eines Gewichtes von 1 Zentner würde daher von dem Balken noch ohne Gefahr aufgehalten werden können, wenn im Augenblicke des Stosses die Geschwindigkeit des Gewichtes nicht grösser wäre, als die zur Geschwindigkeitshöhe 10″ gehörige.

§. 109.

Hauptsätze für das mechanische Widerstandsmoment.

1. Bezüglich der Wahl der richtigen Formel aus den betreffenden Doppelwerthen gelten offenbar dieselben Bemerkungen, welche im §. 79 bezüglich der Tragmomente angeführt worden sind.

2. Man erkennt aus den im vorigen §. gegebenen Formeln, dass allgemein

$$Max\,.\,W = \left\{\begin{array}{c} \text{entweder } C\,.\,\frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } C'\,.\,\frac{r^2}{m} K \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (159)$$

gesetzt werden kann, wenn C und beziehungsweise C' gewisse dem Querschnitte entsprechende Coefficienten sind, und $K = fl$ den Körperraum des Prismas bezeichnet.

Das mechanische Widerstandsmoment, welches das Prisma ohne Gefahr entwickeln kann, ist sonach un-

ter übrigens gleichen Umständen seinem Körperinhalte proportionirt.

Diese Eigenschaft ist übereinstimmend mit derjenigen, welche für das mechanische Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung und gegen Zusammendrückung angegeben wurde. (§. 33 ad 2.) Die dort beigefügte besondere Bemerkung wegen der nicht unbedingten Zulässigkeit dieses Raisonnements und wegen allfälliger Beschränkung desselben ist hier gleichfalls zu beachten.

4. Die im §. 33 ad 4 gemachte Bemerkung, in Betreff des Einflusses der mehr oder minder günstigen Umstände auf das mechanische Widerstandsmoment hat auch gegenwärtig volle Giltigkeit, indem die zu betrachtenden Werthe von $Max.W$, eben so wie dort die analogen Werthe von W_a und W_r, unter sonst gleichen Umständen von $\frac{a^2}{m}$ und beziehungsweise $\frac{r^2}{m}$ abhängen.

5. Für ein und dasselbe Prisma ist das mechanische Moment des Widerstandes gegen Ausdehnung nach §. 33 ad 2

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{m} K,$$

und das gegen Zusammendrückung

$$W_2 = \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{m} K,$$

das gegen Biegung aber nach der Relation (159)

$$W_3 = \begin{cases} \text{entw. } C \cdot \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } C' \cdot \frac{r^2}{m} K. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{array}{r} \text{entweder } W_1 : W_3 = 1 : 2C \\ \text{oder } W_2 : W_3 = 1 : 2C' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (160).$$

Von diesen beiden Proportionen entspricht jedoch nur diejenige den thatsächlichen Verhältnissen, welche nach dem kleineren Werthe von W_3 resultirt. So z. B. hätte man für ein Prisma mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 41), wenn bei dem verwendeten Materiale $a \gtreqless r$ wäre, nach der ersten der Formeln (149) $C = \frac{1}{18}$, also auch $W_1 : W_3 = 1 : 2C = 9 : 1$. Diess besagt, dass das betreffende Prisma in der Richtung der Längenaxe ohne Gefahr eine neunmal grössere Stosswirkung im Sinne der Ausdehnung aus-

halten kann, als normal auf die Axe, wenn man in letzterer Hinsicht die zu den Formeln (147) und (148) gehörigen Fälle beachtet, und dabei von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt.

6. Wird das mechanische Widerstandsmoment in den 2 Fällen verglichen, in welchen der Querschnitt, wie in der Fig. 73, in einander entgegengesetzte Lagen gebracht ist, so findet man der Hauptsache nach dieselben Eigenschaften, wie im §. 81 für das Tragmoment, nur mit dem Unterschiede, dass statt den dortigen Verhältnissen $\alpha:\beta$ und $a:r$ gegenwärtig die Quadrate derselben, nämlich $\alpha^2:\beta^2$ und $a^2:r^2$ zu substituiren sind. Durch das Umkehren des Querschnittes wird daher das mechanische Widerstandsmoment unter übrigens gleichen Umständen im Verhältnisse entweder wie $\alpha^2:\beta^2$, oder wie $a^2:r^2$ verändert, und diese Veränderung kann je nach dem betreffenden Falle in einer Vermehrung oder in einer Verminderung bestehen. Von diesen Verhältnissen ist auch gegenwärtig, eben so wie bezüglich des Tragmomentes, nur dasjenige massgebend, welches sich von der Einheit weniger entfernt. Dieser massgebende Werth wird oft die Einheit selbst werden, d. h. die Gleichheit des mechanischen Widerstandsmomentes in den betrachteten 2 Stellungen anzeigen. Auch leuchtet ein, dass die grösste Veränderung, welche in dem mechanischen Widerstandsmomente in Folge des Umkehrens eines Querschnittes überhaupt möglich ist, durch das Verhältniss $a^2:r^2$ ausgedrückt sein wird.

§. 110.

Folgerungen. Die für die mechanischen Widerstandsmomente gegebenen Formeln können durch gegenseitige Vergleichung zu mannigfaltigen nützlichen Resultaten führen. Es sollen hievon nur einige bemerkt werden.

1. Will man die mechanischen Widerstandsmomente vergleichen, welche 2 materielle Prismen mit quadratischen und kreisförmigen übrigens gleich grossen Querschnitten I und II (Fig. 51) unter sonst gleichen Umständen entwickeln können, und nennt man die betreffenden Maximalwerthe der mechanischen Widerstandsmomente W_I und W_{II}, so hat man unter Beibehaltung der diessfälligen Bezeichnungen nach den Formeln (149) und (151)

$$W_I = \begin{cases} \text{entw.} \ \frac{1}{18} \frac{a^3}{m} K \\ \text{oder} \ \frac{1}{18} \frac{r^3}{m} K \end{cases} \text{u.} \ W_{II} = \begin{cases} \text{entw.} \ \frac{1}{24} \frac{a^3}{m} K \\ \text{oder} \ \frac{1}{24} \frac{r^3}{m} K, \end{cases}$$

und da von diesen Alternativwerthen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren, als die kleineren, Mass und Ziel zu geben haben, die Proportion

$$W_I : W_{II} = \tfrac{1}{18} : \tfrac{1}{24} = 4 : 3.$$

Es ist also das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment des Prismas mit dem quadratförmigen Querschnitte um den 3. Theil grösser, als das von dem Prisma mit dem kreisförmigen Querschnitte. Dasselbe gilt auch, wenn man überhaupt statt dem Quadrate ein Rechteck, und statt dem Kreise eine Ellipse wählt, vorausgesetzt, dass dabei der Querschnittsinhalt nicht geändert wird.

2. Zu einer weiteren Vergleichung untersuche man die grössten zulässigen Widerstandsmomente eines Prismas mit einem rechteckigen Querschnitte in den Stellungen I, II und III (Fig. 52). Bezeichnet man die betreffenden Maximalwerthe gleichfalls mit W und mit — den numerirten Fällen correspondirenden — Zeigern, so erhält man mit Rücksicht auf die Formeln (149) und (150)

$$W_I = \begin{cases} \text{entw.} \ \frac{a^3 K}{18m} \\ \text{oder} \ \frac{r^3 K}{18m} \end{cases}, \quad W_{II} = \begin{cases} \text{entw.} \ \frac{a^3 K}{18m} \\ \text{oder} \ \frac{r^3 K}{18m} \end{cases} \text{u.} \ W_{III} = \begin{cases} \text{entw.} \ \frac{a^3 K}{36m} \\ \text{oder} \ \frac{r^3 K}{36m}, \end{cases}$$

daher durch Vergleichung jedenfalls

$$W_I : W_{II} : W_{III} = 1 : 1 : \tfrac{1}{2},$$

d. h. $W_I = W_{II}$ und $W_{III} = \frac{1}{2} W_I = \frac{1}{2} W_{II}$.

Diese Resultate sind merkwürdig. Sie lehren, dass das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment dasselbe bleibt, ob die Biegung in der Richtung der grossen oder der kleinen Seite des rechteckigen Querschnittes stattfindet, dass aber das fragliche Widerstandsmoment bis auf die Hälfte des vorigen

Werthes herabsinkt, wenn die Biegung normal auf die Diagonale des rechteckigen Querschnittes gerichtet ist.

3. Da das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment im directen Verhältnisse mit dem Körperraume des Prismas steht, so kann es geschehen, dass dasselbe bei ganz verschiedenen Lagen des Querschnittes ungeändert bleibt. Man hat bereits ad 2 einen solchen Fall bei dem rechteckigen Querschnitte kennen gelernt. Dasselbe findet bei dem dreieckigen Querschnitte statt. Wird nämlich derselbe in die 3 Stellungen gebracht, in welchen aufeinanderfolgend die 3 Seiten des dreieckigen Querschnittes parallel zur neutralen Axe gehen, also gleichsam als Grundlinien fungiren, so hat man in jeder dieser 3 Stellungen zufolge der Gleichungen (154) oder (155) denselben Werth für das mechanische Widerstandsmoment, wenn nur bei dieser Vergleichung die gespannten Fasern stets an der jeweiligen Spitze des Querschnittes, oder stets an der Basis desselben vorkommen. Für $a=r$ würde auch diese Bedingung wegfallen. Endlich hat man für den elliptischen Querschnitt in jeder beliebigen Lage nach der Gleichung (151) wegen $fl=K$

$$Max \, . \, W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{24} \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{r^2}{m} K, \end{cases}$$

wonach das Prisma mit diesem Querschnitte, wenn dasselbe um seine Längenaxe gedreht wird, in jeder Stellung das gleiche mechanische Widerstandsmoment entwickeln kann.

Die Ursache dieser nicht selten vorkommenden Eigenschaft ist nicht schwer einzusehen, wenn man beachtet, dass das mechanische Widerstandsmoment laut der Gleichung (146) nach der Grösse des Productes aus dem Tragvermögen und der diessfälligen Biegung gemessen wird. Entspricht nun dem grösseren Tragvermögen eine kleinere Biegung, und dem kleineren Tragvermögen eine grössere Biegung, und befolgt die Veränderung sowohl bei dem Tragvermögen als auch bei der Biegung dasselbe Gesetz, so werden offenbar die fraglichen Producte aus Tragvermögen und Biegung, und daher auch

die betreffenden mechanischen Widerstandsmomente gleiche Werthe haben.

§. 111.

Anwendung auf besondere Materialien (Schmiedeeisen, Gusseisen, Holz). Um die für die grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomente gefundenen Resultate für die genannten Materialien anschaulich zu machen, hat man nur statt $\frac{a^2}{m}$ und beziehungsweise $\frac{r^2}{m}$ die entsprechenden Werthe zu setzen. Zu einer beiläufigen Vorstellung können die betreffenden Mittelwerthe aus den §§. 34, 35, 36 und 37 entnommen werden. Ueberhaupt gilt das an jenen Orten, so wie in den darauf folgenden §§. 38 und 39 Angeführte der Hauptsache nach auch gegenwärtig.

Anmerkung. Die zwischen der Biegung und dem diessfälligen Widerstande herrschende Relation kann auf ähnliche Weise, wie im 1. Abschnitte bezüglich der Ausdehnung und Zusammendrückung, mittelst Curven graphisch dargestellt, und eine solche graphische Darstellung auch zur Anschauung der auf die Biegung bezüglichen Eigenschaften gebraucht werden. Es leuchtet ein, dass die Abhängigkeit zwischen der Biegung und dem Widerstande eben so, wie bei der Ausdehnung und Zusammendrückung, in so lange genau genug durch die Coordinaten einer geraden Linie repräsentirt werden könne, als die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

Was die Brauchbarkeit der vorstehenden Theorie über die Biegung anbelangt, so kann dieselbe nicht bezweifelt werden. Zahlreiche Versuche haben schon die hinreichende Genauigkeit der älteren Theorien, wenn auch nicht durchgehends, doch nach vielen Richtungen dargethan. Die in der vorliegenden Theorie eingeführten Verbesserungen und Ergänzungen insbesondere bezüglich der neutralen Schichte, des Tragmomentes und des Tragvermögens sind geeignet, auch die Anomalien zu beseitigen, die sich bei der Vergleichung der Erfahrungen mit den Resultaten der bisherigen Theorien ergeben haben. Diese letzteren (nach Navier und Redtenbacher), welche hinsichtlich der Bestimmung des Tragvermögens und der daran geknüpften Consequenzen in manchen Fällen bedeutend von einander abweichen, sind nämlich nur als specielle Theile der im vorliegenden

Werke gegebenen Theorie zu betrachten. In manchen Fällen kann allerdings die Theorie nach Navier, in manchen Fällen wieder die Theorie nach Redtenbacher richtig sein, in manchen Fällen aber können beide Theorien unrichtige Resultate geben. In dem Vorhergehenden hat man gesehen, dass die hier durchgeführte Theorie diese verschiedenen Fälle deutlich gruppirt, zugleich aber auch im Stande ist, dieselben unter sich zu vereinigen, und wie oben bemerkt, die Anomalien zu beseitigen, welche sich durch die Vergleichung der Resultate unter sich, und mit der Erfahrung ergeben haben. Einen unzweideutigen Beweis dafür wird man im §. 145 kennen lernen, welcher die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens behandelt, denn man wird dort sehen, dass in dieser Beziehung die Theorie nach Redtenbacher ein schon der einfachen Anschauungsweise widersprechendes, die Theorie nach Navier aber ein solches Resultat gibt, welches nur in einem besonderen Falle richtig sein kann, während dagegen die in diesem Werke durchgeführte Theorie, nach welcher das Tragmoment und Tragvermögen im Allgmeinen alternativ ausgedrückt sind, auf Ergebnisse leitet, welche nicht nur mit den im Grossen angestellten Versuchen, sondern auch schon mit der einfachen Anschauungsweise übereinstimmen. Nur darf nicht übersehen werden, dass solche Anomalien, welche durch eine zu ungleiche Qualität in der Materie, durch Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen, so wie durch eine Anwendung von abnormen Querschnittsformen oder zu unbedeutenden Körperlängen herbeigeführt werden sollten, ausser den Kreis dieser Betrachtung gehören, da in diesen Beziehungen gleich Anfangs der Giltigkeit der Theorie gewisse Gränzen gezogen worden sind, die bei ihrem Gebrauche selbstverständlich eingehalten werden müssen. Insbesondere darf man die im §. 41 zu Grunde gelegten Hypothesen nicht aus den Augen verlieren, wonach der Querschnitt des Prismas in Folge der Biegung nicht aus seiner Form gerathen soll. Desshalb hat man sich auch erlauben dürfen, die Pressungen der Fasern in dem der Zusammendrückung ausgesetzten Querschnittstheile nach den Erörterungen im 1. Abschnitte zu beurtheilen. Ist übrigens ein Ausweichen, ein Verbiegen der gepressten Querschnittstheile nach irgend einer Seite hin zu besorgen, so muss man, um die oben erwähnten Hypothesen der Wahrheit nahe zu bringen, die grösste zulässige Pressung r in den zusammengedrückten Fasern verhältnissmässig kleiner annehmen, als diejenige, welche bei dem Nichtvorhandensein jener Besorgniss gestattet wäre. Wie weit eine solche Verkleinerung zu gehen hat, diess hängt von der Art und Weise der Construction und von dem Grade der Möglichkeit ab, den Querschnitt in seiner Form zu erhalten. Ist es aber gelungen, den Werth von r mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände festzustellen, und hat man sich auch über den Werth der grössten zulässigen Spannung a vereinigt, so können die in diesem Abschnitte ge-

gebenen Regeln und Formeln innerhalb der oben erwähnten Gränzen unbedenklich zugelassen werden. Die durch diese Gränzen entstehenden Beschränkungen für den Gebrauch der Theorie können dem Werthe derselben keinen Eintrag thun, da die practisch vorkommenden Fälle in der Regel solche sind, bei welchen die Anforderungen im Sinne dieser Beschränkungen gestellt werden. Uebrigens wird der Widerstand von prismatischen Körpern mit verhältnissmässig kleinen Längen, wenn die Kraftwirkung normal auf die Längenaxe gerichtet ist (wie bei Bolzen, Nieten u. s. w.), im vierten Abschnitte des zweiten Hauptstückes besonders erörtert.



Zweites Hauptstück.

Anwendung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Materialien auf Holz- und Eisen-Constructionen.

§. 112.

Die im 1. Hauptstücke gelieferte Theorie über den Widerstand fester elastischer Materialien findet Anwendung bei der Beurtheilung von Holz- und Eisenconstructionen. Diese Anwendung zu zeigen ist der Zweck des 2. Hauptstückes. Dieselbe besteht gleichsam nur in der erweiterten Behandlung einer Reihe von practisch wichtigen Fällen, und lässt eine eigentliche Begränzung des Gegenstandes nicht zu. Gleichwohl handelt es sich nur selten um die unmittelbare Benützung der gegebenen Formeln. Man wird vielmehr sehen, dass mittelst der vorstehenden Theorie bloss die Anhaltspuncte geboten sind, deren Ergreifung je nach den zu behandelnden Fällen den einzuschlagenden Weg für die nähere Untersuchung anzubahnen haben.

Erster Abschnitt.

Von den Querschnitten für Träger, welche der Biegung ausgesetzt sind.

---

§. 113.

Vorerinnerung. Im 1. Hauptstücke hat man die Anwendung der auf den Widerstand gegen die Biegung Bezug nehmenden Formeln, zur Erläuterung derselben, bloss auf die dort (§. 55) angegebenen einfachen Querschnittsfiguren gezeigt, und die noch weiters nöthigen Erörterungen für die Anwendung dem 2. Hauptstücke vorbehalten. (Siehe §. 57.) Eben so war man bezüglich der Lage des gefährlichen Querschnittes laut §. 75 nur auf den Fall bedacht, wenn die betreffende Biegungscurve keinen Wendepunct besitzt. Es erübrigt daher auch in dieser Beziehung die Ergänzungen für den Fall anzuknüpfen, wenn Wendepuncte in der Biegungscurve vorkommen. Hieran lassen sich sodann die Regeln anreihen, nach welchen man die Zweckmässigkeit der verschiedenen Querschnitte zu beurtheilen hat.

Erstes Kapitel.

Von den zusammengesetzten Querschnittsformen.

§. 114.

Behandlung solcher Querschnitte. Man beachte, dass man es bei jedem Querschnitte hinsichtlich der Biegung des Trägers mit der Bestimmung der Lage der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe, und mit der Bestimmung des Trägheitsmomentes desselben in Bezug auf diese Axe zu thun hat.

Wie schon im §. 57 bemerkt worden ist, kann man das Trägheitsmoment einer Figur in Bezug auf die durch den Schwerpunct derselben gehende Axe aus den Trägheitsmomenten ihrer einzelnen Theile finden, wenn diese letzteren auf solche Axen bezogen werden, welche durch die Schwerpuncte dieser einzelnen Theile und parallel zur Hauptaxe gezogen sind. Man suche daher die einzelnen Theile der Figur so auszuwählen, dass ihre entsprechenden Trägheitsmomente bekannt erscheinen, um dadurch in die Lage zu kommen, auf das Trägheitsmoment der ganzen Figur schliessen zu können.

Fig. 98.

Seien z. B. n Theile des Querschnittes (Figur 98) vorhanden, nämlich abc, cde, efg, cge, etc...., die Flächenräume dieser Theile aufeinanderfolgend

f_1, f_2, f_3, ... und f_n,

und deren Schwerpuncte beziehungsweise in o_1, o_2, o_3,.. und o_n; hienach ergäbe sich für die ganze Figur der Flächenraum

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \Sigma f_n ,$$

und es falle der Schwerpunct derselben nach . . . . O, durch welchen die Hauptaxe (neutrale Axe) zu ziehen ist;
es seien ferner die Trägheitsmomente der einzelnen Querschnittstheile in Bezug auf die durch ihre Schwerpuncte parallel zur Hauptaxe gezogenen Axen . . . . t_1, t_2, t_3... und t_n,
die auf die Hauptaxe übersetzten Trägheitsmomente hingegen

T_1, T_2, T_3,... und T_n

man setze endlich das zu suchende Trägheitsmoment der ganzen Figur in Bezug auf die neutrale Axe . . . . $= T$,
und bezeichne die Abstände der einzelnen Schwerpuncte von dieser Axe correspondirend mit . . . . e_1, e_2, e_3,.... und e_n.

Indem man die Trägheitsmomente T_1, T_2, T_3,... und T_n, welche sich alle auf die Hauptaxe beziehen, zu dem Behufe summiren kann, um dadurch das Trägheitsmoment der ganzen Figur in Bezug auf diese Hauptaxe zu erhalten, hat man zunächst

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = \Sigma T_n .$$

Nun ist aber zufolge des bekannten Satzes aus der Mechanik, betreffend das sogenannte Uebersetzen des Trägheitsmomentes von einer Axe auf eine andere zu jener parallelen Axe,

$$T_1 = t_1 + f_1 \, e_1^2,$$
$$T_2 = t_2 + f_2 \, e_2^2,$$
$$T_3 = t_3 + f_3 \, e_3^2,$$
etc.
$$\text{und } T_n = t_n + f_n \, e_n^2;$$

daher durch Summirung

$$T = \Sigma T_n = \Sigma t_n + \Sigma f_n . e_n^2 \quad . \; . \; . \quad (161).$$

Fig. 99.

Um diese Methode mittelst eines besonderen Falles anschaulich zu machen, stehe die Querschnitts-Figur 99 in Betracht und man nehme an, dass diese Figur in die 3 Rechtecke ***abcd***, ***efgh*** und ***iklm*** zerlegt wird. In diesem Falle hat man unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen und gleichzeitiger Berücksichtigung der cotirten Dimensionen

$$1. \left.\begin{array}{l} f_1 = \alpha \beta \\ t_1 = \frac{1}{12} f_1 \beta^2 \\ e_1 = \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \end{array}\right\} \text{ und } T_1 = f_1 \left[\tfrac{1}{12}\beta^2 + \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)^2\right] = \tfrac{1}{12}\alpha\beta\left[\beta^2 + 3(\beta+\gamma)^2\right],$$

$$2. \left.\begin{array}{l} f_2 = \alpha \beta \\ t_2 = \frac{1}{12} f_2 \beta^2 \\ e_2 = \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \end{array}\right\} \text{ und } T_2 = T_1$$

und

$$3. \left.\begin{array}{l} f_3 = \gamma \delta \\ t_3 = \frac{1}{12} f_3 \gamma^2 \\ e_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ und } T_3 = \tfrac{1}{12} f_3 \gamma^2 = \tfrac{1}{12} \delta \gamma^3;$$

daher $F = f_1 + f_2 + f_3 = 2\alpha\beta + \gamma\delta$, weiters aber

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \tfrac{1}{12}\left[2\alpha\beta(4\beta^2 + 6\beta\gamma + 3\gamma^2) + \delta\gamma^3\right].$$

Endlich ist $H = 2\beta + \gamma$ und $h' = h'' = \frac{1}{2} H = \beta + \frac{\gamma}{2}$.

Ex. Für $\alpha = \gamma = 3''$ und $\beta = \delta = 1''$ erhält man speciell $T = 26\frac{3}{4}$, $F = 9 \square''$, $H = 5''$, $h' = h'' = 2\frac{1}{2}''$.

Bei der Eintheilung der Querschnittsfigur in mehrere Theile kann es geschehen, dass manche Theile, also auch die betreffenden Trägheitsmomente negativ genommen werden müssen. Will man z. B. den betrachteten Querschnitt (Figur 99) dadurch entstanden

denken, dass man von dem Rechteke *abgf* die beiden Rechtecke *ceil* und *dhkm* wegnimmt, so hat man den Querschnitt zwar gleichfalls aus 3 Rechtecken bestehend zu betrachten, jedoch sind die beiden letzteren negativ zu nehmen. In diesem Falle hat man für die 1. Figur *abgf*

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \alpha\,(2\beta+\gamma) \\ t_1 = \frac{1}{12} f_1\,(2\beta+\gamma)^2 \\ e_1 = o \end{array}\right\} \text{ und } T_1 = t_1 = \tfrac{1}{12}\alpha\,(2\beta+\gamma)^3,$$

für die 2. Figur *ceil*

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma \\ t_2 = \frac{1}{12} f_2\,\gamma^2 \\ e_2 = o \end{array}\right\} \text{ und } T_2 = t_2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma^3,$$

und für die 3. Figur *dhkm* eben so

$$\left.\begin{array}{l} f_3 = \left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma \\ t_3 = \frac{1}{12} f_3\,\gamma^2 \\ e_3 = o \end{array}\right\} \text{ und } T_3 = t_3 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\gamma^3.$$

Daraus folgt, wie zuvor

$$T = T_1 - T_2 - T_3 = \tfrac{1}{12}\left[2\alpha\beta\,(4\beta^2 + 6\beta\gamma + 3\gamma^2) + \delta\gamma^3\right].$$

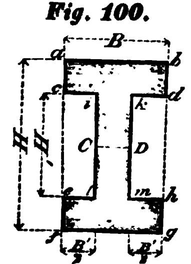
Die Formel für das Trägheitsmoment des betrachteten I förmigen Querschnittes kann übrigens auch auf eine einfachere Weise dargestellt werden. Setzt man nämlich (Fig. 100)

$$\overline{fg} = B,\ \overline{bg} = H,\ \overline{ci} + \overline{kd} = B' \text{ und } \overline{dh} = H',$$

so wird offenbar $F = (BH - B'H')$ und

$$T = \tfrac{1}{12}\,(BH^3 - B'H'^3) \quad \ldots\ldots \quad (162).$$

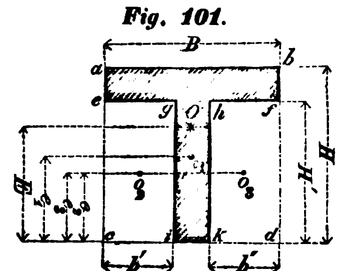
Fig. 100.



Es ist nicht nothwendig, dass man die Trägheitsmomente der einzelnen Figuren unmittelbar auf die neutrale Axe übersetzt. Man kann zuweilen durch ein zweimaliges Uebersetzen bequemer zum Ziele gelangen, indem man sämmtliche Trägheitsmomente zuerst nur überhaupt auf eine gemeinschaftliche Axe, welche mit der neutralen Axe parallel läuft, übersetzt, und erst hierauf die weitere Uebersetzung auf die neutrale Axe selbst vornimmt. Dieses Verfahren ist in solchen Fällen zweckmässig, wo man den Schwerpunct der ganzen Querschnittsfigur *a priori* nicht kennt, und daher dessen

Lage erst aufzusuchen hat. Zur näheren Erläuterung diene folgendes Beispiel. Es stehe der ┬ förmige Querschnitt (Fig. 101) in Betracht, und es sei derselbe aus den Rechtecken *abcd*, *cegi* und *dfhk* gebildet anzusehen, von welchen die letzteren als negativ zu gelten haben. Der Querschnitt habe in Bezug auf die einwirkenden Kräfte eine solche Lage, dass die neutrale Axe parallel zu $\overline{cd}$ laufe. Es sollen nun die Trägheitsmomente der gedachten 3 Rechtecke zuerst auf die Axe $\overline{cd}$ übersetzt werden.

Fig. 101.



Sei die Fläche des Rechteckes *abcd* . . . . . . $= f_1$,
der Abstand ihres Schwerpunctes o_1 von der gewählten Axe $\overline{cd}$ $= e_1$,
das entsprechende Trägheitsmoment in Bezug auf die durch diesen Schwerpunct o_1 gehende Axe . . . . $= t_1$,
das in Bezug auf die Axe $\overline{cd}$ aber . . . . $= T_1$,
und bezeichne eben so die analogen Grössen für die beiden anderen Rechtecke *cegi* und *dfkh* mit f_2 und f_3, e_2 und e_3, t_2 und t_3, endlich T_2 und T_3, so hat man mit Rücksicht auf die Cotirung in der Figur

1. $\left.\begin{aligned} f_1 &= BH \\ e_1 &= \tfrac{1}{2}H \\ t_1 &= \tfrac{1}{12} f_1 H^2 \end{aligned}\right\}$ daher $T_1 = t_1 + f_1 e_1{}^2 = \frac{1}{3} f_1 H^2 = \frac{1}{3} B H^3$,

2. $\left.\begin{aligned} f_2 &= b' H' \\ e_2 &= \tfrac{1}{2}H' \\ t_2 &= \tfrac{1}{12} f_2 H'^2 \end{aligned}\right\}$ daher $T_2 = t_2 + f_2 e_2{}^2 = \frac{1}{3} f_2 H'^2 = \frac{1}{3} b' H'^3$

3. $\left.\begin{aligned} f_3 &= b'' H' \\ e_3 &= \tfrac{1}{2}H' \\ t_3 &= \tfrac{1}{12} f_3 H'^2 \end{aligned}\right\}$ daher $T_3 = t_3 + f_3 e_3{}^2 = \frac{1}{3} f_3 H'^2 = \frac{1}{3} b'' H'^3$.

Demgemäss ist:

1. Die algebraische Summe der Flächentheile, d. i. die Querschnittsfläche $F = f_1 - f_2 - f_3 = BH - (b' + b'')H' = BH - B'H'$, wenn $b' + b'' = B'$ gesetzt wird;

2. die algebraische Summe der statischen Momente der Flächentheile in Beziehung auf die Axe $\overline{cd}$, wenn O der Schwerpunct der gan-

zen Figur ist, und dessen Fntfernung von der Axe $\overline{cd}$ mit E bezeichnet wird,

$$FE = f_1 e_1 - f_2 e_2 - f_3 e_3 = \tfrac{1}{2}(BH^2 - B'H'^2),$$

und daraus behufs der Bestimmung der Lage des Schwerpunctes O

$$E = \tfrac{1}{2}\left(\frac{BH^2 - B'H'^2}{BH - B'H'}\right);$$

3. endlich die algebraische Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf die Axe $\overline{cd}$,

$$T_1 - T_2 - T_3 = \tfrac{1}{3}(BH^3 - B'H'^3).$$

Heisst man jetzt T das zu suchende Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe, und beachtet man, dass der für $(T_1 - T_2 - T_3)$ gefundene Werth sich auf eine Axe bezieht, welche mit der neutralen Axe in der Entfernung E parallel läuft, so hat man zunächst $T + FE^2 = (T_1 - T_2 - T_3)$, somit $T = (T_1 - T_2 - T_3) - FE^2$.

Substituirt man in dieser Gleichung statt F, E und $(T_1 - T_2 - T_3)$ die betreffenden Werthe, so erhält man schliesslich

$$T = \tfrac{1}{3}(BH^3 - B'H'^3) - \tfrac{1}{4}\,\frac{(BH^2 - B'H'^2)^2}{(BH - B'H')} \quad . \; . \; . \; (163).$$

Für die besonderen Dimensionen $B = 5''$, $H = 5''$, $B' = 4''$ und $H' = 4''$ erhält man beispielsweise

$$F = 9\square'', \; E = 3\tfrac{7}{18}'' \text{ und } T = 19\tfrac{28}{36}.$$

§. 115.

Anwendung des für das Trägheitsmoment gefundenen Werthes. Hat man den Werth des Trägheitsmomentes für einen gegebenen Querschnitt in Bezug auf die neutrale Axe gefunden, so kann derselbe nach Anleitung des 1. Hauptstückes zur Bestimmung der Biegung, des Tragmomentes und beziehungsweise Tragvermögens, so wie des mechanischen Widerstandsmomentes benützt werden.

Dabei hat man Folgendes zu bemerken:

1. Nach dem §. 53 steht die Biegung unter sonst gleichen Umständen im verkehrten Verhältnisse zu dem fraglichen Trägheitsmomente des Querschnittes, und man kann dem Begriffe über die zu erreichende Steifigkeit dadurch zu Hilfe kommen, dass man in dieser

Beziehung einen Vergleich zwischen dem in Betracht stehenden Querschnitte und einer bekannten einfachen Querschnittsfigur, z. B. einem Rechtecke von gleichem Flächenraume anstellt. Es war z. B. für den ⌶ förmigen Querschnitt (Fig. 100) nach den dort angenommenen speciellen Dimensionen $T = 26\frac{3}{4}$. Man könnte nun fragen, wie gross das Trägheitsmoment T' eines Rechteckes wäre, wenn dasselbe die gleiche Höhe $H = 5''$ und den gleichen Flächenraum $F = 9\square''$ hätte. Die Antwort auf diese Frage gibt die Formel (51), denn es ist nach derselben $T' = \frac{1}{12} F H^2 = 18\frac{3}{4}$.

Hieraus schliesst man, dass die Biegungen zweier Träger, von welchen der eine den gewählten ⌶ förmigen, der andere aber einen rechteckigen Querschnitt besitzt, bei gleicher Höhe und gleichem Inhalte der beiderseitigen Querschnitte, so wie unter sonst gleichen Umständen, sich verhalten, wie

$$\frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = 18\frac{3}{4} : 26\frac{3}{4} = 75 : 107 = 1 : 1{\cdot}427.$$

Berücksichtiget man auch das andere Beispiel des vorigen §., so hat man für den dort betrachteten ⊤ förmigen Querschnitt (Fig. 101) nach den speciell angenommenen Dimensionen $T = 19\frac{23}{36}$. Für ein Rechteck von derselben Höhe und Querschnittsgrösse wäre wieder $T' = 18\frac{3}{4}$. In diesem Falle wird daher das Verhältniss zwischen den Biegungen der 2 Prismen mit den beiden verglichenen (⊤ förmigen und rechteckigen) Querschnitten

$$\frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = 18\frac{3}{4} : 19\frac{23}{36} = 675 : 707 = 1 : 1{\cdot}047.$$

2. Die Bestimmung des **Tragmomentes** hat aus der Relation (95)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{a\,T}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{r\,T}{h''} \end{cases}$$

zu geschehen, wobei T das vorhin erwähnte Trägheitsmoment des Querschnittes, a und r die auf die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Anspruchsnahmen pr. $\square''$ bis zu den Elasticitätsgränzen, h' und h'' aber die Abstände der gespanntesten und gepresstesten Fasern von der durch den Schwerpunct des Querschnittes gezogenen neutralen Axe bedeuten. Wie im §. 77 bemerkt wurde, ist je nach dem besonderen Falle von den doppelten

Werthen der kleinere auszuwählen. So z. B. erhält man für den vorbesprochenen ⌶ förmigen Querschnitt wegen

$$T = 26\tfrac{3}{4} \text{ und } h' = h'' = 2\tfrac{1}{2},$$

sofort

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 10{\cdot}7\, a \\ \quad\text{oder } 10{\cdot}7\, r, \end{cases}$$

daher für Schmiedeeisen (wegen $r \gtreqless a$) $M = 10{\cdot}7\,r$, und für Gusseisen (wegen $a < r$) $M = 10{\cdot}7\,a$.

Man kann nun auch in Ansehung dieses Tragmomentes zur besseren Verdeutlichung desselben einen Vergleich mit dem Tragmomente eines Rechteckes von derselben Höhe und Querschnittsgrösse anstellen.

Es ist nämlich nach der Relation (96) das Tragmoment M' eines solchen Rechteckes wegen $F = 9$ □″ und $H = 5''$

$$M' = \begin{cases} \text{entweder } \tfrac{1}{6}\, a F H = 7\tfrac{1}{2}\, a \\ \quad\text{oder } \tfrac{1}{6}\, r F H = 7\tfrac{1}{2}\, r. \end{cases}$$

Vergleicht man jetzt M mit M', so kommen jedenfalls nur die Werthe mit a oder mit r in Betracht, so dass man für alle Materialien erhält

$$M : M' = 10{\cdot}7 : 7{\cdot}5 = 1{\cdot}427 : 1, \text{ also } M > M'.$$

Für den ⊤ förmigen Querschnitt (Fig. 101) wird es bei der Bestimmung des Tragmomentes darauf ankommen, in welcher Weise die Anspruchsnahme der Fasern im Querschnitte geschieht. Findet etwa die Ausdehnung an der breiten Seite $\overline{ab}$, und die Zusammendrückung an der schmalen Seite $\overline{ik}$ statt, so wird

$$h' = H - E = 1\tfrac{11}{18}'', \quad h'' = E = 3\tfrac{7}{18}'',$$

ferner $T = 19\tfrac{23}{36}$, also auch nach der Relation (95) das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } 12\ \tfrac{11}{58}\, a \\ \quad\text{oder } 5\ \tfrac{97}{122}\, r. \end{cases}$$

Wäre z. B. für Schmiedeeisen $r = 0{\cdot}9\,a$, und für Gusseisen $r = 3\,a$, so hätte man für das erstere $M = 5\,\tfrac{97}{122}\,r$, und für das letztere

$$M = 12\ \tfrac{11}{58}\, a.$$

Vergleicht man auch hier das für den ⊤ förmigen Querschnitt gefundene Tragmoment mit dem eines Rechteckes von gleicher Höhe und Querschnittsgrösse, und heisst man dieses letztere M', so er-

hält man wegen $F = 9\square''$ und $H = 5''$, für Schmiedeeisen $M' = 7\frac{1}{2}r$ und für Gusseisen $M' = 7\frac{1}{2}a$, sofort aber für das erstere

$$M : M' = 5\tfrac{97}{122} : 7\tfrac{1}{2} = 0{\cdot}773 : 1$$

und für das letztere $M : M' = 12\frac{11}{58} : 7\frac{1}{2} = 1{\cdot}625 : 1.$

Dieses Verhältniss ist also nicht constant, sondern hängt von der Materialgattung ab.

Die gewählten Beispiele sind hinreichend, um einen klaren Begriff zu geben, wie das Tragmoment und beziehungsweise das Tragvermögen mit der Grösse, Gestalt und Lage des Querschnittes, so wie mit der Materialgattung im Zusammenhange steht.

3. Die Bestimmung des grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomentes geschieht nach Massgabe der Relationen (147) und (148). Es ist nämlich dieses Moment

$$Max\,.\,W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{m}\cdot\frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\cdot\frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

und aus diesen Alternativwerthen der kleinere auszuwählen. So hat man z. B. für den I förmigen Querschnitt (Fig. 100)

$$T = 26\tfrac{3}{4},\ h' = h'' = 2\tfrac{1}{2}'',$$

daher

$$Max\,.\,W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{107}{150}\,\frac{a^2 l}{m} \\ \text{oder } \frac{107}{150}\,\frac{r^2 l}{m}. \end{cases}$$

Um auch in dieser Hinsicht den Vergleich mit einem rechteckigen Querschnitte von der gleichen Fläche $F = 9\square''$ anzustellen, bemerke man, dass das betreffende mechanische Widerstandsmoment $Max\,.\,W'$ nach den Formeln (149)

$$Max\,.\,W' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{18}\,\frac{a^2 F l}{m} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 l}{m} \\ \text{oder } \frac{1}{18}\,\frac{r^2 F l}{m} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2 l}{m}, \end{cases}$$

demnach für alle Materialien das fragliche Verhältniss

$$Max\,.\,W : Max\ W' = \tfrac{107}{150} : \tfrac{1}{2} = 1{\cdot}427 : 1$$

wird.

Untersucht man in ähnlicher Weise auch das grösste zulässige Widerstandsmoment für den T förmigen Querschnitt (Fig. 101), so

findet man, wenn die Fasern an der breiten Seite $\overline{ab}$ ausgedehnt und an der schmalen Seite $\overline{ik}$ zusammengedrückt werden,

$$h' = 1\tfrac{11}{18}'', \; h'' = 3\tfrac{7}{18}'' \text{ und } T = 19\tfrac{22}{36},$$

hiernach allgemein

$$Max\,.\,W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{2121}{1682} \cdot \frac{a^3 l}{m} \\ \text{oder } \frac{2121}{7442} \cdot \frac{r^3 l}{m}, \end{cases}$$

also z. B. für Schmiedeeisen, wenn $r = 0{\cdot}9\,a$ wäre,

$$Max\,.\,W = \tfrac{2121}{7442} \frac{r^3 l}{m},$$

und für Gusseisen, wenn $r = 3a$ wäre

$$Max\,.\,W = \tfrac{2121}{1682} \frac{a^3 l}{m}.$$

Für ein gleich grosses Rechteck würde das mechanische Widerstandsmoment mit Rücksicht auf die beispielsweisen Relationen zwischen a und r, für die genannten Materialien beziehungsweise

$$Max\,.\,M' = \tfrac{1}{2} \frac{r^3 l}{m} \text{ und } Max\,.\,M' = \tfrac{1}{2} \frac{a^3 l}{m}.$$

Die gegenseitige Vergleichung ergäbe daher

für Schmiedeeisen $Max\,.\,W : Max\,.\,W' = 0{\cdot}570 : 1$,
für Gusseisen aber $Max\,.\,W : Max\,.\,W' = 2{\cdot}522 : 1$.

Diese Beispiele zeigen, wie das mechanische Widerstandsmoment mit der Gestalt des Querschnittes, dem Körperraume und der Materialgattung zusammenhängt.

§. 116.

Zusammenstellung. Nachfolgende Zusammenstellung enthält für eine Reihe von practisch wichtigen Querschnitten die entsprechenden Werthe für die Trägheitsmomente T. Man hat dabei im Querschnitte die durch seinen Schwerpunct gehende neutrale Axe horizontal und zugleich sich vorzustellen, dass die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden. Für die entgegengesetzte Anspruchsnahme der Fasern würde nur h' mit h'' zu verwechseln sein, hiebei jedoch das Trägheitsmoment T keine Veränderung erleiden. Die Querschnittsfläche selbst ist mit F bezeichnet.

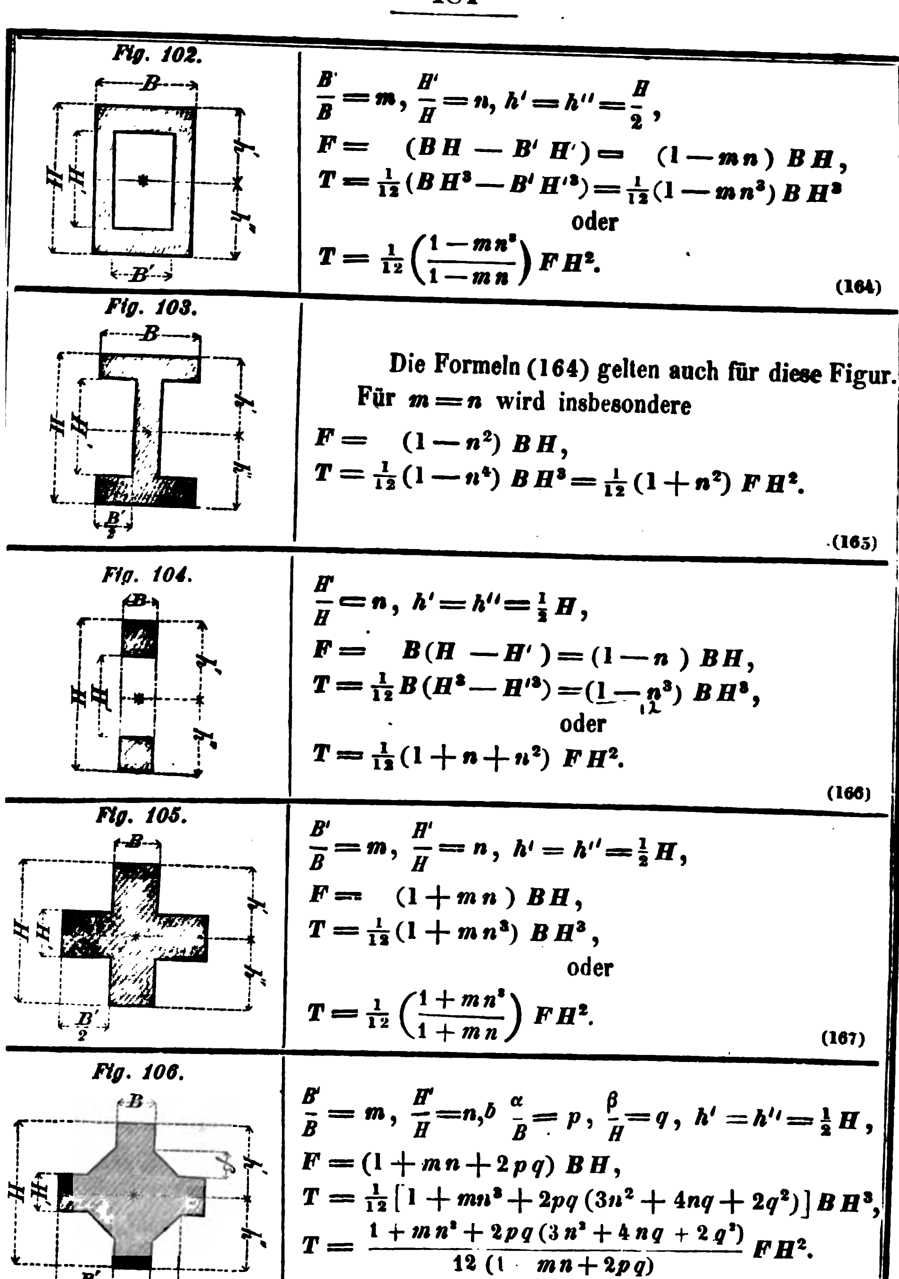


Fig. 102.

$$\frac{B'}{B} = m,\quad \frac{H'}{H} = n,\quad h' = h'' = \frac{H}{2},$$

$$F = (BH - B'H') = (1 - mn)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(BH^3 - B'H'^3) = \tfrac{1}{12}(1 - mn^3)\,BH^3$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{1 - mn^3}{1 - mn}\right) FH^2. \tag{164}$$

Fig. 103.

Die Formeln (164) gelten auch für diese Figur. Für $m = n$ wird insbesondere

$$F = (1 - n^2)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(1 - n^4)\,BH^3 = \tfrac{1}{12}(1 + n^2)\,FH^2. \tag{165}$$

Fig. 104.

$$\frac{H'}{H} = n,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

$$F = B(H - H') = (1 - n)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}B(H^3 - H'^3) = (1 - n^3)\,BH^3,$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}(1 + n + n^2)\,FH^2. \tag{166}$$

Fig. 105.

$$\frac{B'}{B} = m,\quad \frac{H'}{H} = n,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

$$F = (1 + mn)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}(1 + mn^3)\,BH^3,$$

oder

$$T = \tfrac{1}{12}\left(\frac{1 + mn^3}{1 + mn}\right) FH^2. \tag{167}$$

Fig. 106.

$$\frac{B'}{B} = m,\quad \frac{H'}{H} = n,\quad \frac{\alpha}{B} = p,\quad \frac{\beta}{H} = q,\quad h' = h'' = \tfrac{1}{2}H,$$

$$F = (1 + mn + 2pq)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{12}\left[1 + mn^3 + 2pq(3n^2 + 4nq + 2q^2)\right] BH^3,$$

$$T = \frac{1 + mn^3 + 2pq(3n^2 + 4nq + 2q^2)}{12(1 + mn + 2pq)}\,FH^2. \tag{168}$$

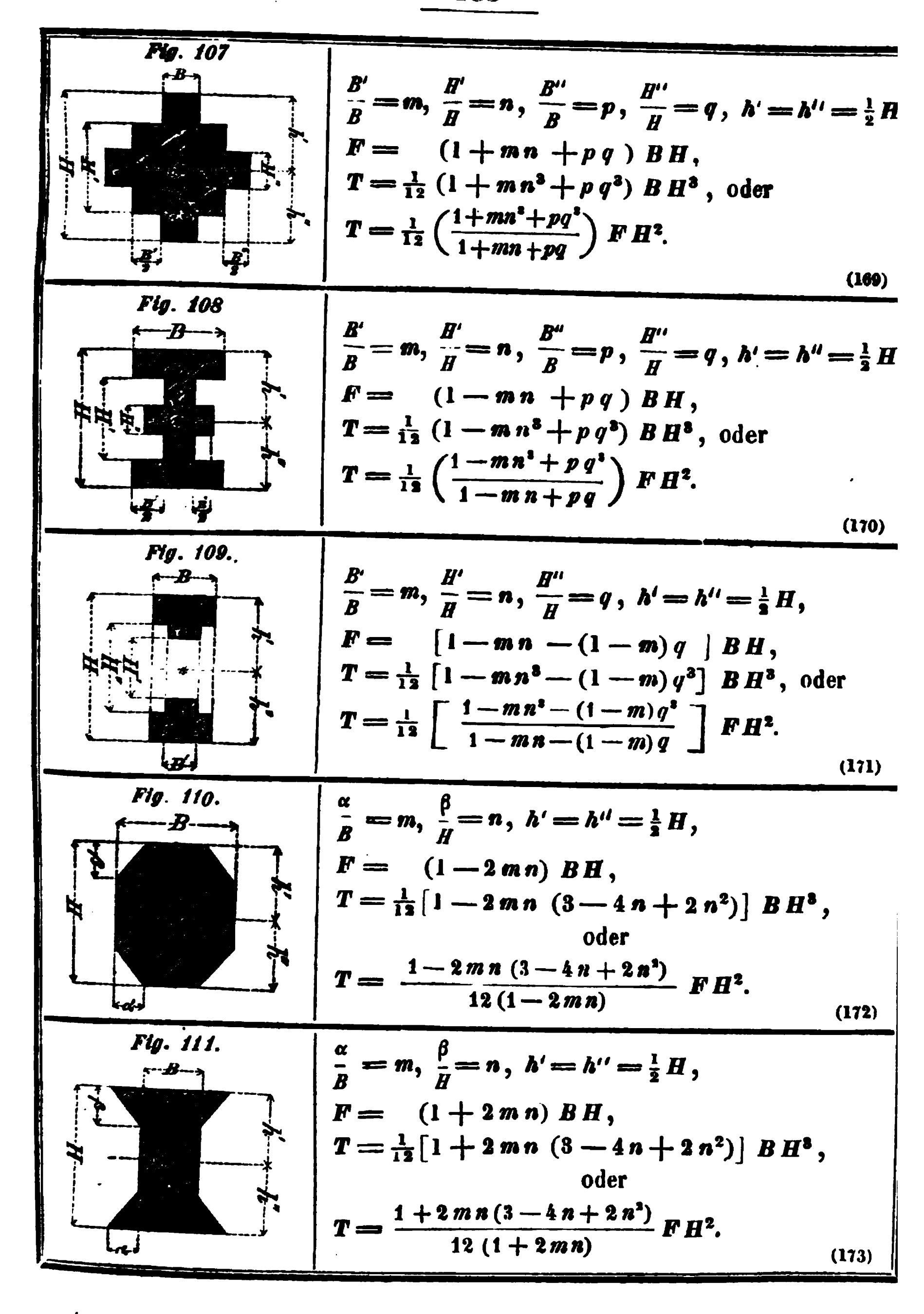


Fig. 107

$$\frac{B'}{B}=m,\quad \frac{H'}{H}=n,\quad \frac{B''}{B}=p,\quad \frac{H''}{H}=q,\quad h'=h''=\tfrac{1}{2}H$$

$$F=\quad(1+mn\;+pq\;)\;BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\;(1+mn^3+pq^3)\;BH^3,\ \text{oder}$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left(\frac{1+mn^3+pq^3}{1+mn+pq}\right)FH^2. \tag{169}$$

Fig. 108

$$\frac{B'}{B}=m,\quad \frac{H'}{H}=n,\quad \frac{B''}{B}=p,\quad \frac{H''}{H}=q,\quad h'=h''=\tfrac{1}{2}H$$

$$F=\quad(1-mn\;+pq\;)\;BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\;(1-mn^3+pq^3)\;BH^3,\ \text{oder}$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left(\frac{1-mn^3+pq^3}{1-mn+pq}\right)FH^2. \tag{170}$$

Fig. 109.

$$\frac{B'}{B}=m,\quad \frac{H'}{H}=n,\quad \frac{H''}{H}=q,\quad h'=h''=\tfrac{1}{2}H,$$

$$F=\quad[1-mn\;-(1-m)\,q\;]\;BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}\;[1-mn^3-(1-m)\,q^3]\;BH^3,\ \text{oder}$$

$$T=\tfrac{1}{12}\left[\frac{1-mn^3-(1-m)q^3}{1-mn-(1-m)q}\right]FH^2. \tag{171}$$

Fig. 110.

$$\frac{\alpha}{B}=m,\quad \frac{\beta}{H}=n,\quad h'=h''=\tfrac{1}{2}H,$$

$$F=\quad(1-2mn)\;BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}[1-2mn\;(3-4n+2n^2)]\;BH^3,$$

oder

$$T=\frac{1-2mn\,(3-4n+2n^2)}{12\,(1-2mn)}\;FH^2. \tag{172}$$

Fig. 111.

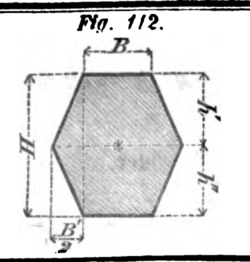
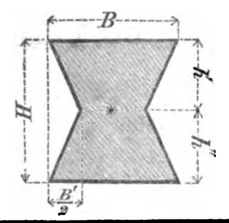
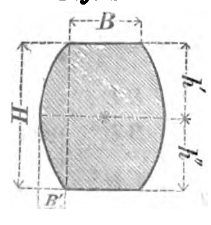
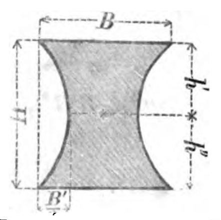
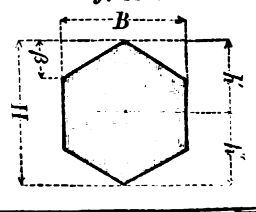
$$\frac{\alpha}{B}=m,\quad \frac{\beta}{H}=n,\quad h'=h''=\tfrac{1}{2}H,$$

$$F=\quad(1+2mn)\;BH,$$

$$T=\tfrac{1}{12}[1+2mn\;(3-4n+2n^2)]\;BH^3,$$

oder

$$T=\frac{1+2mn\,(3-4n+2n^2)}{12\,(1+2mn)}\;FH^2. \tag{173}$$

Fig. 112. 	$\frac{B'}{B} = m,\ h' = h'' = \frac{1}{2} H,$ $F = \frac{1}{2}\ (2 + m)\ B\,H,$ $T = \frac{1}{48}\ (4 + m)\ B\,H^3,$ oder $T = \frac{1}{24} \left(\frac{4 + m}{2 + m}\right) F\,H^2.$ (174)
Fig. 113. 	$\frac{B'}{B} = m,\ h' = h'' = \frac{1}{2} H,$ $F = \frac{1}{2}\ (2 - m)\ B\,H,$ $T = \frac{1}{48}\ (4 - m)\ B\,H^3,$ oder $T = \frac{1}{24} \left(\frac{4 - m}{2 - m}\right) F\,H^2.$ (175)
Fig. 114. 	$\frac{B'}{B} = m,\ h' = h'' = \frac{1}{2} H,$ $F = \frac{1}{3}\ (3 + 2\,m)\ B\,H,$ $T = \frac{1}{60}\ (5 + 2\,m)\ B\,H^3,$ oder $T = \frac{1}{20} \left(\frac{5 + 2\,m}{3 + 2\,m}\right) F\,H^2.$ (176)
Fig. 115. 	$\frac{B'}{B} = m,\ h' = h'' = \frac{1}{2} H,$ $F = \frac{1}{3}\ (3 - 2\,m)\ B\,H,$ $T = \frac{1}{60}\ (5 - 2\,m)\ B\,H^3,$ oder $T = \frac{1}{20} \left(\frac{5 - 2\,m}{3 - 2\,m}\right) F\,H^2.$ (177)
Fig. 116. 	$\frac{\beta}{H} = n,\ h' = h'' = \frac{1}{2} H,$ $F = \ (1 - n)\ B\,H,$ $T = \frac{1}{12} (1 - n)(1 - 2\,n + 2\,n^2)\ B\,H^3,$ oder $T = \frac{1}{12} (1 - 2\,n + 2\,n^2)\ F\,H^2.$ (178)

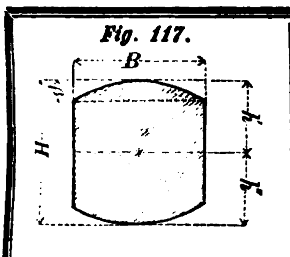


Fig. 117.

$$\frac{\beta}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

$$F = \tfrac{1}{3}\,(3 - 2n)\,BH,$$

$$T = \tfrac{1}{420}\,(35 - 70n + 84n^2 - 40n^3)\,BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \frac{35 - 70n + 84n^2 - 40n^3}{140\,(3 - 2n)}\,FH^2, \qquad (179)$$

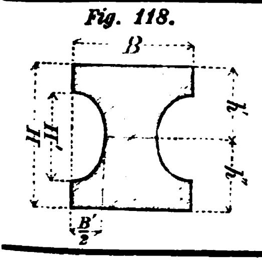


Fig. 118.

$$\frac{B'}{B} = m, \quad \frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H,$$

$$F = \tfrac{1}{4}\,(4 - \pi m n)\,BH, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

$$T = \tfrac{1}{192}\,(16 - 3\pi m n^3)\,BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{48}\left(\frac{16 - 3\pi m n^3}{4 - \pi m n}\right) FH^2. \qquad (180)$$

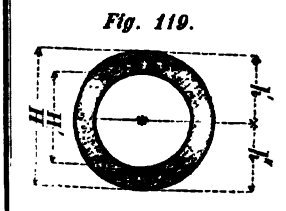


Fig. 119.

$$\frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

$$F = \frac{\pi}{4}\,(H^2 - H'^2) = \frac{\pi}{4}\,(1 - n^2)\,H^2,$$

$$T = \frac{\pi}{64}\,(H^4 - H'^4) = \frac{\pi}{64}\,(1 - n^4)\,H^4, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{16}\,(1 + n^2)\,FH^2. \qquad (181)$$

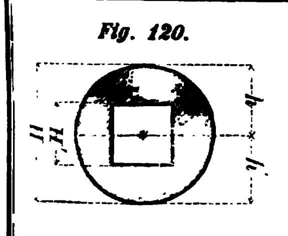


Fig. 120.

$$\frac{H'}{H} = n, \quad h' = h'' = \tfrac{1}{2} H, \quad \pi = 3{\cdot}1415926\ldots,$$

$$F = \tfrac{1}{4}\,(\pi - 4n^2)\,H^2,$$

$$T = \tfrac{1}{192}\,(3\pi - 16n^4)\,H^4, \text{ oder}$$

$$T = \tfrac{1}{48}\left(\frac{3\pi - 16n^4}{\pi - 4n^2}\right) FH^2. \qquad (182)$$

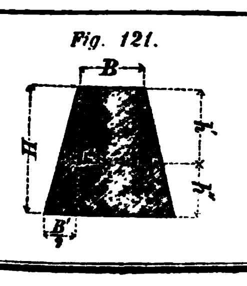


Fig. 121.

$$\frac{B'}{B} = m, \quad h' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{3 + 2m}{2 + m}\right) H, \quad h'' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{3 + m}{2 + m}\right) H,$$

$$F = \tfrac{1}{2}\,(2 + m)\,BH,$$

$$T = \frac{6 + 6m + m^2}{36\,(2 + m)}\,BH^3, \text{ oder}$$

$$T = \frac{6 + 6m + m^2}{18\,(2 + m)^2}\,FH^2. \qquad (183)$$

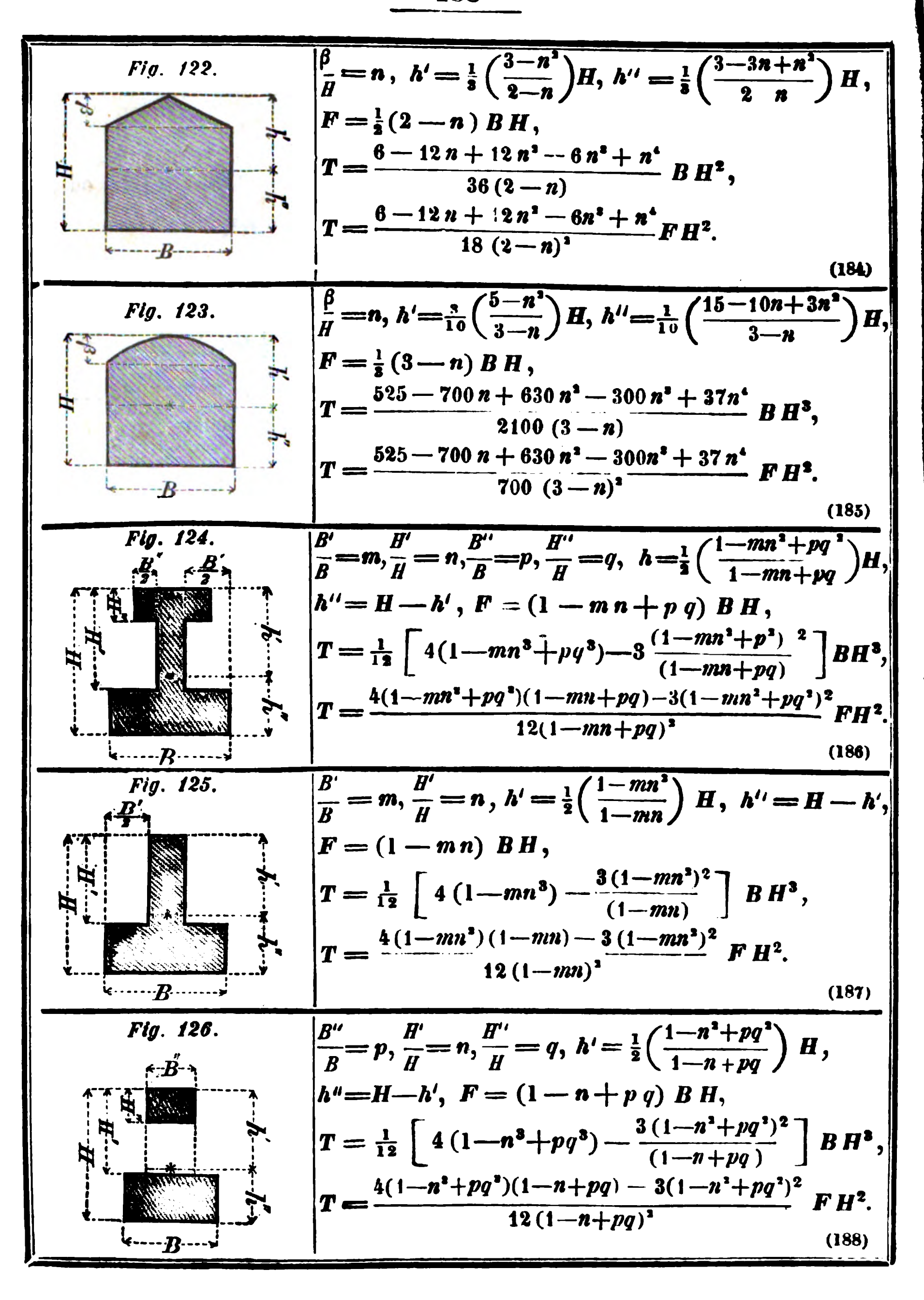


Fig. 122.

$$\frac{\beta}{H}=n,\quad h'=\frac{1}{3}\left(\frac{3-n^2}{2-n}\right)H,\quad h''=\frac{1}{3}\left(\frac{3-3n+n^2}{2-n}\right)H,$$

$$F=\frac{1}{2}(2-n)BH,$$

$$T=\frac{6-12n+12n^2-6n^3+n^4}{36(2-n)}BH^3,$$

$$T=\frac{6-12n+12n^2-6n^3+n^4}{18(2-n)^2}FH^2. \quad (184)$$

Fig. 123.

$$\frac{\beta}{H}=n,\quad h'=\frac{3}{10}\left(\frac{5-n^2}{3-n}\right)H,\quad h''=\frac{1}{10}\left(\frac{15-10n+3n^2}{3-n}\right)H,$$

$$F=\frac{1}{3}(3-n)BH,$$

$$T=\frac{525-700n+630n^2-300n^3+37n^4}{2100(3-n)}BH^3,$$

$$T=\frac{525-700n+630n^2-300n^3+37n^4}{700(3-n)^2}FH^2. \quad (185)$$

Fig. 124.

$$\frac{B'}{B}=m,\ \frac{H'}{H}=n,\ \frac{B''}{B}=p,\ \frac{H''}{H}=q,\quad h=\frac{1}{2}\left(\frac{1-mn^2+pq^2}{1-mn+pq}\right)H,$$

$$h''=H-h',\quad F=(1-mn+pq)BH,$$

$$T=\frac{1}{12}\left[4(1-mn^3+pq^3)-3\frac{(1-mn^2+p^2)^2}{(1-mn+pq)}\right]BH^3,$$

$$T=\frac{4(1-mn^3+pq^3)(1-mn+pq)-3(1-mn^2+pq^2)^2}{12(1-mn+pq)^2}FH^2. \quad (186)$$

Fig. 125.

$$\frac{B'}{B}=m,\quad \frac{H'}{H}=n,\quad h'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-mn^2}{1-mn}\right)H,\quad h''=H-h',$$

$$F=(1-mn)BH,$$

$$T=\frac{1}{12}\left[4(1-mn^3)-\frac{3(1-mn^2)^2}{(1-mn)}\right]BH^3,$$

$$T=\frac{4(1-mn^3)(1-mn)-3(1-mn^2)^2}{12(1-mn)^2}FH^2. \quad (187)$$

Fig. 126.

$$\frac{B''}{B}=p,\ \frac{H'}{H}=n,\ \frac{H''}{H}=q,\quad h'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-n^2+pq^2}{1-n+pq}\right)H,$$

$$h''=H-h',\quad F=(1-n+pq)BH,$$

$$T=\frac{1}{12}\left[4(1-n^3+pq^3)-\frac{3(1-n^2+pq^2)^2}{(1-n+pq)}\right]BH^3,$$

$$T=\frac{4(1-n^3+pq^3)(1-n+pq)-3(1-n^2+pq^2)^2}{12(1-n+pq)^2}FH^2. \quad (188)$$

An diese Zusammenstellung findet man noch die Erklärung anzuknüpfen, dass die Figuren 102 bis *inclus.* 120 sowohl nach horizontaler als auch nach verticaler Richtung, die übrigen Figuren aber nur nach horizontaler Richtung symmetrisch gebildet sind, ferner dass die krummlinige Begränzung in den Figuren 114, 115, 117 und 123 nach parabolischen Segmenten, und in der Figur 118 beiderseits nach einer halben Ellipse angenommen ist. Die Annahme der erwähnten parabolischen Begränzung anstatt des Kreisbogens hat den Vortheil der Einfachheit, und bietet selbst für Kreisbögen von 90gradigem Mittelpunctswinkel genügende Genauigkeit dar. Man sieht übrigens aus dieser Zusammenstellung in Uebereinstimmung mit dem §. 54, dass sich das fragliche Trägheitsmoment stets auf die Form cFH^2 bringen lässt, wobei c nicht von der Grösse des Querschnittes, sondern nur von der Gestalt desselben abhängt, also für analoge Querschnittsgestalten, bei welchen die in der Zusammenstellung bezeichneten Verhältnisszahlen (m, n, p, q) dieselben sind, constant wird. Diese Darstellungsweise (cFH^2) ist zur Beurtheilung die geeignetste, indem sodann der Vergleich zwischen der betreffenden Figur und einem Rechtecke von derselben Höhe und Querschnittsgrösse leicht geschehen kann, wenn man nämlich beachtet, dass das Trägheitsmoment eines solchen Rechteckes den Werth $\frac{1}{12}FH^2$ annimmt.



§. 117.

Fig. 127.

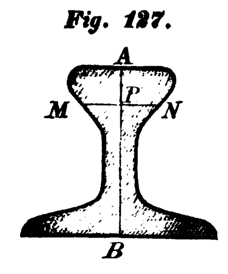
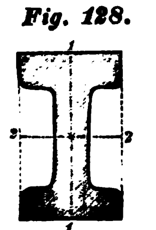


Fig. 128.



Eintheilung der Querschnitts-Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrie. Symmetrisch gebildete Figuren spielen in der Anwendung als Querschnitte eine wichtige Rolle. Um derartige Querschnitts-Figuren hinsichtlich ihrer Symmetrie einzutheilen, bemerke man, dass in einem Querschnitte (Fig. 127) eine Axe der Symmetrie diejenige Gerade $\overline{AB}$ genannt werden soll, wodurch jede Normale darauf (z. B. $\overline{MN}$ in P) halbirt wird. Desshalb kann man die Figuren von einander durch die Zahl der Axen unterscheiden, die sie in Bezug auf die Symmetrie besitzen. So hat z. B. die Fig. 127 eine solche Axe, während die Figuren 128,

Fig. 129.

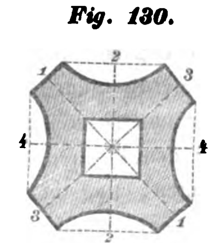


Fig. 130.

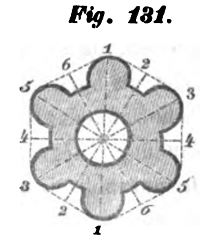


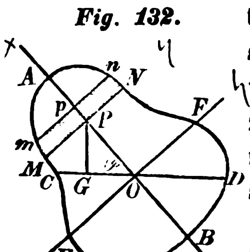
Fig. 131.

129, 130, 131 mehrere, nämlich respective 2, 3, 4, 6 Axen der Symmetrie enthalten. Eben so sind sämmtliche regelmässige Polygone symmetrische Figuren, welche eine mit der Seitenzahl übereinstimmende Anzahl von Axen der Symmetrie besitzen. Zugleich leuchtet ein, dass, wenn überhaupt die Anzahl der Symmetrie-Axen n ist, je zwei solche unmittelbar auf einander folgende Axen den Winkel von $\frac{180}{n}$ Graden einschliessen, alle Axen aber durch den Schwerpunct der Figur gehen.

§. 118.

Trägheitsmoment solcher symmetrisch gebildeten Querschnitts-Figuren in verschiedenen Lagen. Man hat bisher die Querschnitte stets in solchen Lagen betrachtet, wo die Hauptdimensionen entweder parallel zur neutralen Axe oder normal auf dieselbe gerichtet, daher beziehungsweise horizontal und vertical gelegen waren, wenn die neutrale Axe selbst eine horizontale Lage hatte. Nur die Figuren 43 und 46 hat man in anderen, gleichsam schiefen Lagen berücksichtiget. Da solche schiefe Lagen auch bei anderen Querschnitts-Figuren vorkommen können, so dringt sich nun die Frage auf, welcher Einfluss dadurch auf das Trägheitsmoment des Querschnittes hervorgebracht wird. Zur Beantwortung dieser Frage betrachte man den Querschnitt (Fig. 132) in einer schiefen Stellung, in welcher CD die durch den Schwerpunct O gezogene neutrale Axe ist. Die Figur selbst soll mindestens eine Axe der Symmetrie (AB) besitzen.

Fig. 132.

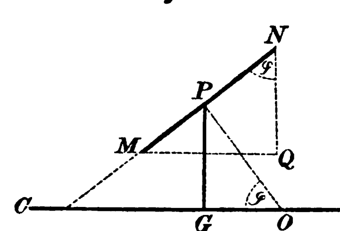


Es handelt sich nun darum, das Trägheitsmoment T dieser Figur in

Bezug auf die der gewählten Lage entsprechende neutrale Axe *CD* zu finden.

Zu diesem Behufe sei der erwähnte Schwerpunct O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, bei welchem die positiven Abscissen auf der Axe der Symmetrie von O gegen A gezählt werden, während die Ordinatenaxe in die hierauf normale Richtung fällt, und man bezeichne für einen willkürlichen Punct M der Begränzungscurve die Abscisse OP mit x, die Doppelordinate MN hingegen mit y. Zieht man in einer unendlich kleinen Entfernung ($Pp = dx$) die nächste Doppelordinate mn, so entsteht das Flächenelement $MNmn$, welches offenbar als eine materielle Linie zu betrachten sein wird, deren unendlich kleiner Inhalt df durch ydx auszudrücken ist. Nennt man ferner φ den Winkel, welcher von der Axe der Symmetrie und der neutralen Axe eingeschlossen wird, und setzt man die Entfernung des Mittelpunctes P der Doppelordinate von letztgenannter Axe, nämlich $PG = z$, so wird das unendlich kleine Trägheitsmoment dT des Flächenelementes mit jenem übereinstimmen, das einer materiellen Geraden MN (Fig. 133) entspricht,

Fig. 133.



wenn ihre Masse $= df$, ihre Länge $= y$, die Entfernung ihres Schwerpunctes von der Drehungsaxe $= z$, und der Winkel, den sie mit dieser letzteren bildet $= 90^0 - \varphi$ gesetzt wird. Man hat daher für das Trägheitsmoment des Flächenelementes df

$$dT = \tfrac{1}{12} df\, \overline{NQ}^2 + df\, \overline{PG}^2,$$

wenn $MQ \parallel CD$ und $NQ \perp MQ$ gezogen wird. Es ist aber $df = ydx$, $NQ = y \cos\varphi$ und $z = x \sin\varphi$, also auch

$$dT = \tfrac{1}{12} \cos^2\varphi\; y^3 dx + \sin^2\varphi\; x^2 y\, dx.$$

Um aus diesem Differentialausdrucke das Trägheitsmoment T der ganzen Fläche zu finden, hat man die Momente von sämmtlichen Flächenelementen, aus welchen die betrachtete Figur besteht, zu summiren, daher die Integrale zwischen den Gränzen $x = OA$ und $x = -OB$ zu nehmen. Man erhält daher

$$T = \tfrac{1}{12} \cos^2\varphi \int_{-OB}^{+OA} y^3 dx + \sin^2\varphi \int_{-OB}^{+OA} x^2 y\, dx.$$

Treffen die neutrale Axe und die Axe der Symmetrie zusammen, und bezeichnet man für diesen besonderen Fall den Werth des Trägheitsmomentes mit T', so hat man wegen $\varphi = o$

$$T' = \frac{1}{12} \int_{-OB}^{+OA} y^3 \, dx.$$

Stehen jedoch die beiden erwähnten Axen normal auf einander, und nennt man den diessfälligen Werth T'', so wird wegen $\varphi = 90^0$

$$T'' = \int_{-OB}^{+OA} x^2 y \, dx.$$

Werden jetzt diese beiden für T' und T'' gefundenen Werthe in der allgemeinen Gleichung für T berücksichtigt, so erhält man die eben so einfache wie merkwürdige Relation

$$T = T' \cos^2\varphi + T'' \sin^2\varphi \; ^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad (189).$$

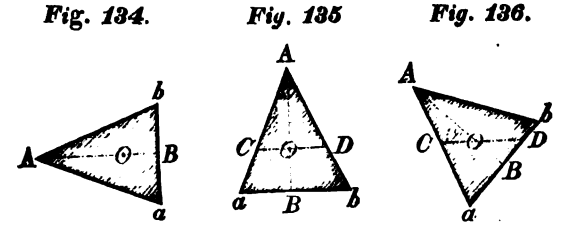
Wenn daher für eine symmetrisch gebildete Figur die Werthe der beiden Trägheitsmomente in Bezug auf die gewählten Coordinatenaxen bekannt sind, so lässt sich hieraus auch das Trägheitsmoment in Bezug auf jede wie immer gelegene neutrale Axe der Figur bestimmen.

§. 119.

Anwendung dieser Regel auf besondere Querschnitte. Um die in der Gleichung (189) enthaltene Regel zuers auf Figuren mit Einer Axe der Symmetrie anzuwenden, betrachtet man das gleichschenklige Dreieck und das parabolische Segment.

Für das gleichschenklige Dreieck ist die Höhe zugleich die Axe der Symmetrie. Es befinde sich dasselbe in Fig. 134 in der

Fig. 134. Fig. 135 Fig. 136.



*) Diese Relation hat der Verfasser bereits im Jahre 1851 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins Nr. 10 zur öffentlichen Kenntniss gebracht.

Lage, wo die Axe der Symmetrie mit der horizontalen neutralen Axe zusammenfällt, also $\varphi = o$ wird, in Fig. 135 hingegen in der Lage, wo jene Axe normal auf der neutralen Axe steht, also $\varphi = 90^0$ wird, während die schiefe Lage in Fig. 136 zu einem beliebigen Winkel φ gehört. Da das Trägheitsmoment des Dreieckes in den beiden ersten Stellungen bekannt ist, so kann man dasselbe auch für die erwähnte schiefe Lage finden. Setzt man nämlich $\overline{ab} = \alpha$, $\overline{AB} = \beta$ und *Area* $Aab = \frac{1}{2}\alpha\beta = F$, so hat man unter Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. und zufolge der Gleichungen (52) und (55)

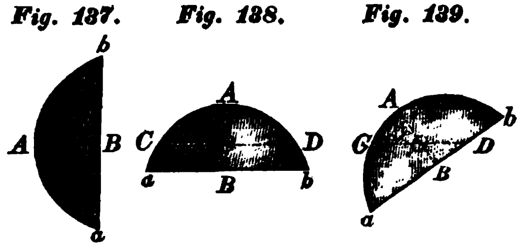
$$T' = \tfrac{1}{24} F \alpha^2 \text{ und } T'' = \tfrac{1}{18} F \beta^2,$$

also auch nach der Gleichung (189)

$$T = \tfrac{1}{6} F (\tfrac{1}{4}\alpha^2 \cos^2\varphi + \tfrac{1}{3}\beta^2 \sin^2\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (190).$$

Betrachtet man auf dieselbe Weise das parabolische Segment in den Stellungen Fig. 137, 138 und 139, welche den betreffenden

Fig. 137. *Fig. 138.* *Fig. 139.*



Winkeln von o, 90 und φ Graden entsprechen, und setzt man wieder $\overline{ab} = \alpha$, $\overline{AB} = \beta$ und *Area* $Aab = \frac{2}{3}\alpha\beta = F$, so hat man nach den Gleichungen (56) und (57)

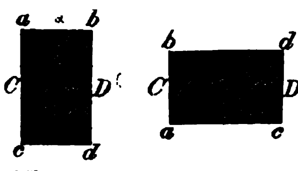
$$T' = \tfrac{1}{20} F \alpha^2 \text{ und } T'' = \tfrac{12}{175} F \beta^2,$$

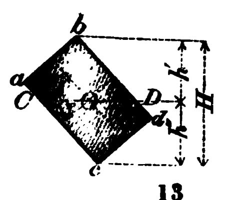
sofort aber

$$T = \tfrac{1}{5} F \left[\tfrac{1}{4}\alpha^2 \cos^2\varphi + \tfrac{12}{35}\beta^2 \sin^2\varphi\right] \quad . \quad . \quad (191).$$

Um noch die Anwendung der gegebenen Regel auf eine Figur mit 2 Axen der Symmetrie zu zeigen, stehe ein Rechteck in den 3 Lagen Fig. 140, 141 und 142 in Betracht. Sei $\overline{ab} = \alpha$,

Fig. 140. *Fig. 141.* *Fig. 142.*







$\overline{bd} = \beta$ und *Area abcd* $= F = \alpha\beta$, so hat man offenbar nach der Gleichung (51)

$$T' = \frac{1}{12} F \beta^2 \text{ und } T'' = \frac{1}{12} F \alpha^2,$$

daher auch

$$T = \frac{1}{12} F (\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi) \quad . \quad . \quad (192).$$

Ueberdiess ist die Höhe der Fig. (142) $H = \beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi$, und die Abstände der am meisten gespannten und gepressten Fasern von CD sind $h' = h'' = \frac{1}{2} H$, wesshalb die Gleichung (192) auch die Form annimmt

$$T = \frac{(\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi)}{12\,(\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi)^2}\, F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad (193).$$

Fällt insbesondere die neutrale Axe in die Diagonale, so ist $tg\,\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, $\sin^2\varphi = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ und $\cos^2\varphi = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, daher in Uebereinstimmung mit der bereits gegebenen Relation (52)

$$T = \frac{1}{24} F H^2.$$

§. 120.

Weitere Eigenschaften symmetrischer Querschnitte. Aus der Gleichung (189) lassen sich noch andere Eigenschaften ableiten. Die wichtigsten davon sind folgende:

1. Der Werth des Trägheitsmomentes T ist im Allgemeinen mit dem Winkel φ variabel, und erreicht sein **Maximum** für $\varphi = o$, sein **Minimum** aber für $\varphi = 90^0$, oder auch umgekehrt. Es ist daher der **grössere** von den beiden Werthen T' und T'' das **Maximum**, der **kleinere** hingegen das **Minimum** des Trägheitsmomentes, während alle anderen Werthe für T zwischen T' und T'' liegen. Indem nun die Biegung eines Trägers sich umgekehrt, wie das betreffende Trägheitsmoment verhält, so gelangt man zur Ueberzeugung, dass unter allen Lagen des Querschnittes die 2 besonderen, wo $\varphi = o$ und $\varphi = 90^0$ wird, also die neutrale Axe mit der Axe der Symmetrie zusammenfällt, und auf derselben normal steht, diejenigen sind, in welchen die Biegung am **grössten** und am **kleinsten**, oder auch umgekehrt, am **kleinsten** und am **grössten** wird. Daraus ist jedoch nicht zu folgern, dass in diesen besonderen Stellungen auch das grösste und kleinste Tragmoment, beziehungsweise Tragvermögen stattfinden werde. Ist nämlich auf

die erwähnte Weise der Werth des betreffenden Trägheitsmomentes bekannt geworden, so muss dasselbe zur Bestimmung des Tragmomentes oder des mechanischen Widerstandsmomentes erst nach den früher gegebenen Regeln benützt werden. So erhält man z. B. für das Tragmoment des Rechteckes in der schiefen Stellung desselben (Fig. 142)

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi}{\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi}\right) a F \\ \text{oder } \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2 \cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi}{\beta\cos\varphi + \alpha\sin\varphi}\right) r F \end{cases} \quad . \; . \quad (194),$$

je nachdem von den auf die Elasticitätsgränzen für die Ausdehnung und Zusammendrückung Bezug nehmenden Grössen a und r die eine oder die andere kleiner ist. Dieser Ausdruck ist zwar ebenfalls mit φ variabel, erreicht aber das Maximum und Minimum nicht für dieselben Werthe, wie der Ausdruck für T.

2. Heisst man die den besonderen 2 Stellungen des Querschnittes für $\varphi = o$ und $\varphi = 90^0$ entsprechenden Biegungen δ' und δ'', hingegen die in einer anderen Querschnittslage entstehende Biegung allgemein δ (alle übrigen Umstände gleich gesetzt), so muss offenbar zwischen den reciproken Werthen der Biegungen, also zwischen $\frac{1}{\delta'}$, $\frac{1}{\delta''}$ und $\frac{1}{\delta}$ dieselbe Relation vorhanden sein, wie zwischen den dazu gehörigen Trägheitsmomenten T', T'' und T. Desshalb ist man berechtigt zu schreiben

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos^2\varphi}{\delta'} + \frac{\sin^2\varphi}{\delta''} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (195).$$

Diese Gleichung lehrt, die Biegung des Trägers für eine beliebige Lage des Querschnittes zu finden, wenn die Werthe der grössten und kleinsten Biegung, welche nach Massgabe der verschiedenen Querschnittslagen entstehen können, bekannt sind. Dabei ist bemerkenswerth, dass, wenn die Grössen δ' und δ'' gegeben sind, es durchaus nicht nothwendig erscheine, die eigentliche Gestalt des Querschnittes zu kennen. Es genügt zu wissen, dass in demselben wenigstens eine Axe der Symmetrie vorhanden sei. Hätte z. B. ein Balken einen in Bezug auf eine Axe symmetrischen Querschnitt, und wäre bei einer gegebenen Unterstützung und Belastung seine grösste

Durchbiegung 3″ und zwar in derjenigen Querschnittslage, in welcher die Axe der Symmetrie mit der neutralen Axe zusammenfällt, hingegen die kleinste Durchbiegung, welche nunmehr in der um einen rechten Winkel gedrehten Querschnittslage eintreten muss, nur 1″, so könnte die etwa aufgestellte Frage, wie viel sich der Balken bei einer solchen Stellung des Querschnittes durchbiegen werde, in welcher die neutrale Axe mit der Axe der Symmetrie einen Winkel von 30 Graden einschliessen würde, alle übrigen Umstände aber ungeändert bleiben sollen, ganz einfach durch die Auflösung der Gleichung $\delta = \frac{cos^2 30^\circ}{3} + \frac{sin^2 30^\circ}{1}$ beantwortet werden, weil sodann $\delta' = 3''$, $\delta'' = 1''$ und $\varphi = 30^\circ$ gesetzt werden muss. Sonach erhielte man $\delta = 2$ Zoll.

3. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes T ist es gerade nicht nothwendig, dass die beiden zu den Winkeln $\varphi = \varphi' = o$ und $\varphi = \varphi'' = 90^0$ gehörigen Trägheitsmomente unmittelbar gegeben seien. Wären nämlich anstatt dieser Werthe 2 andere T''' und T^{IV} gegeben, welche den Winkeln $\varphi = \varphi'''$ und $\varphi = \varphi^{IV}$ entsprächen, so würden sich im Allgemeinen die Gleichungen

$$T''' = T' cos^2 \varphi''' + T'' sin^2 \varphi''' \text{ und}$$
$$T^{IV} = T' cos^2 \varphi^{IV} + T'' sin^2 \varphi^{IV}$$

zur Bestimmung der darin unbekannten Grössen T' und T'' benützen lassen. Aus diesen Gleichungen folgt nämlich

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{T^{IV} sin^2 \varphi''' - T''' sin^2 \varphi^{IV}}{sin(\varphi''' + \varphi^{IV}) sin(\varphi''' - \varphi^{IV})} \\ \text{und } T'' &= \frac{T''' cos^2 \varphi^{IV} - T^{IV} cos^2 \varphi'''}{sin(\varphi''' + \varphi^{IV}) sin(\varphi''' - \varphi^{IV})} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (196).$$

Zu Folge dieser Relationen ist es genügend, das Trägheitsmoment des Querschnittes in irgend 2 Lagen desselben zu kennen, um auf das Trägheitsmoment desselben in jeder andern Lage zu schliessen. Man erkennt übrigens, dass die Gleichungen (196) nur dann bestimmt erscheinen, wenn φ''' von φ^{IV} und $\varphi''' + \varphi^{IV}$ von 2 oder 4 Rechten verschieden sind.

4. Nimmt man in der Gleichung (189) $T' = T''$, so wird für jeden Winkel φ

$$T = T' (cos^2\varphi + sin^2\varphi) = T' = T'' . \quad . \quad (197).$$

In diesem besonderen Falle ist also das Trägheitsmoment des Querschnittes in allen Lagen desselben eine constante Grösse.

Damit z. B. diese Eigenschaft bei einem gleichschenkligen Dreiecke eintrete, müsste wegen $T' = T''$ mit Rücksicht auf die Gleichung (190) $\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{1}{3}\beta^2$, also $\alpha : \beta = 2 : \sqrt{3} = 1 : 0·866$, d. h. das Dreieck gleichseitig sein.

Hingegen hätte man bei einem parabolischen Segmente mit Rücksicht auf die Gleichung (191)

$$\frac{1}{4}\alpha^2 = \frac{12}{35}\beta^2, \text{ also } \alpha : \beta = 4\sqrt{3} : \sqrt{35} = 1 : 0·854.$$

Endlich wäre bei dem rechteckigen Querschnitte die erwähnte Eigenschaft dann vorhanden, wenn in der Gleichung (192) $\alpha = \beta$, d. h. das Rechteck in ein Quadrat übergehen würde. Hiermit stimmt die für das Quadrat gemachte Bemerkung im §. 56 ad 2 überein. Es leuchtet ein, dass man bei jeder Figur, welche eine oder zwei Axen der Symmetrie besitzet, die Dimensionen stets so wählen kann, dass die beiden mit T' und T'' bezeichneten, und sofort auch die auf alle anderen Querschnittslagen bezüglichen Trägheitsmomente einander gleich werden.

Ein Träger mit einem solchen Querschnitte muss sodann unter übrigens gleichen Umständen bei jeder Querschnittslage stets einerlei Biegung zeigen, wenn hierbei die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden.

5. Hat eine Figur mehr als 2 Axen der Symmetrie, und denkt man sich dieselbe nach und nach in alle verschiedenen Lagen gebracht, so begreift man, dass bei der Regelmässigkeit einer solchen Figur jedesmal, wenn die neutrale Axe mit einer Axe der Symmetrie zusammenfällt, das Trägheitsmoment T den gleichen Werth annehmen muss. Die Gleichungen (196) lehren aber, dass in dem Falle, wo für 2 verschiedene Werthe von $\varphi = \varphi'''$ und $\varphi = \varphi^{\text{IV}}$ die correspondirenden Werthe für die Trägheitsmomente T''' und T^{IV} einander gleich werden, auch die zu den Winkeln $\varphi = \varphi' = 0$ und $\varphi = \varphi'' = 90^0$ gehörigen T' und T'' identisch sein müssen, wenn hierbei selbstverständlich $\sin\varphi'''$ und $\sin\varphi^{\text{IV}}$ und eben so $\cos\varphi'''$ und $\cos\varphi^{\text{IV}}$ verschieden sind, also φ''' und φ^{IV} sich weder zu 180^0 noch zu 360^0 ergänzen.

Desshalb kann mit Bezug auf die vorige Bemer-

kung ad 4 behauptet werden, dass für Figuren mit mehr als 2 Axen der Symmetrie das Trägheitsmoment, also auch die Biegung eines derartig geformten Prismas in jeder Querschnittslage unverändert bleibt. Diese Eigenschaft ist für die Praxis wichtig, und die Zahl der Figuren, welche dieselbe besitzen, ist unbegränzt *).

Von diesen Figuren gehören in die vorderste Reihe alle regelmässigen Polygone. Für das regelmässige Dreieck und für das Quadrat wurde die Richtigkeit dieser Eigenschaft bereits ad 4 erkannt. Offenbar gehört auch der Kreis in diese Figuren-Kategorie, indem derselbe eine unendlich grosse Anzahl von Axen der Symmetrie besitzt. Ausserdem können aber derlei Querschnitte ganz beliebig begränzt sein, wie diess aus den Fig. 129, 130, 131 ersichtlich ist, welche beziehungsweise 3, 4, 6 Axen der Symmetrie, also auch die in Rede stehende Eigenschaft der Unveränderlichkeit des Trägheitsmomentes besitzen. So z. B. würde eine Wasserradwelle, welche ein regelmässiges Sechseck zum Querschnitte hat, bei der rotirenden Bewegung des Rades stets dieselbe Biegung erleiden. Eben so ist einzusehen, dass die bei Aufstellung von Strassengeländern in Verwendung kommenden Geländerbäume mit quadratischem Querschnitte ganz gleichen Durchbiegungen ausgesetzt seien, es möge derselbe auf eine seiner Seiten oder eine seiner Diagonalen gelegt werden, daher man sich täuschen würde, wenn man durch die letztere Stellung im Vergleich zur ersteren eine grössere Steifigkeit erreichen zu können glaubte. Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, dass eine ungleiche Qualität in der Materie oder ein Ueberschreiten der Elasticitätsgränzen diese Resultate stören können.

Was das Tragmoment solcher Querschnitte betrifft, deren Trägheitsmoment sich in den verschiedenen Querschnittslagen nicht ändert, so ist klar, dass dasselbe nur mehr mit dem reciproken Werthe der betreffenden Höhendimension h' oder h'', nämlich des Abstandes der am meisten gespannten oder gepressten Fasern von der neutralen Axe

---

*) Auf diese merkwürdige Eigenschaft regelmässig gebildeter Querschnitte hat der Verfasser schon im Jahre 1851 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines (Nr. 10) aufmerksam gemacht. Was insbesondere den quadratischen Querschnitt betrifft, so wurde diese Eigenschaft bereits von Navier bemerkt.



veränderlich ist. Je **kleiner** nämlich der bezügliche Abstand ist, auf ein desto **grösseres** Tragvermögen kann geschlossen werden, und umgekehrt. So wäre z. B. für das Quadrat in jeder beliebigen Stellung nach der Gleichung (194) wegen $\beta = \alpha$

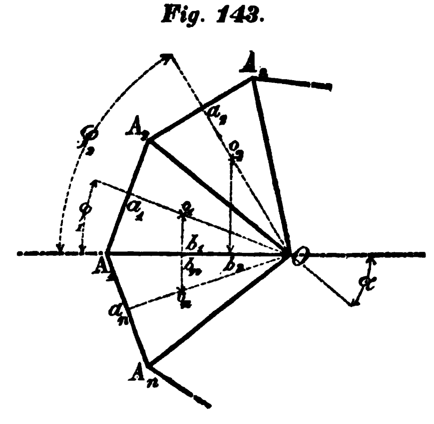
$$M = \begin{Bmatrix} \text{entweder } \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^3}{\sin\varphi + \cos\varphi}\right) a \\ \text{oder } \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha^3}{\sin\varphi + \cos\varphi}\right) r \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad (198).$$

Dieser Werth nimmt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 45^0$ ab, und von $\varphi = 45^0$ bis $\varphi = 90^0$ zu, wird also ein Maximum für $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$, d. h. wenn die neutrale Axe parallel zur Quadratseite läuft, hingegen für $\varphi = 45^0$ ein Minimum, d. h. wenn die neutrale Axe in eine Diagonale des Quadrates fällt. Der Maximalwerth ist $\frac{1}{6} a \alpha^3$ und der Minimalwerth $\frac{1}{6} \frac{a \alpha^3}{\sqrt{2}}$, oder auch respective $\frac{1}{6} r \alpha^3$ und $\frac{1}{6} \frac{r \alpha^3}{\sqrt{2}}$, sonach das gegenseitige Verhältniss wie $\sqrt{2} : 1$, was mit der Bemerkung ad 2 im §. 56 übereinstimmt.

§. 121.

Trägheitsmoment regelmässiger Polygone. In dem vorigen §. wurde bewiesen, dass das Trägheitsmoment eines regelmässigen Polygons in jeder Lage desselben einen und denselben Werth annimmt. Es erübrigt nur noch, diesen Werth selbst kennen zu lernen. Zu diesem Behufe stehe (*Fig.* 143) ein regelmässiges Polygon mit n Seiten in Betracht. Da die Lage desselben beliebig ist, so nehme man sie so an, dass eine Axe der Symmetrie, z. B. $A_1 O$, mit der horizontalen neutralen Axe zusammenfällt. Man stelle sich jetzt das Polygon aus den n gleichschenkligen und zugleich congruenten Dreiecken

Fig. 143.



$A_1 O A_2, A_2 O A_3, .., A_1 O A_n$ zusammengesetzt vor, und nenne sofort

die Seite desselben als Grundlinie dieser Dreiecke

$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \ldots = A_1 A_n$ . . . . $= b$,

den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises als Höhe dieser Dreiecke $O a_1 = O a_2 = \ldots = O a_n$ . . . . $= c$,

den Flächenraum eines jeden solchen Dreieckes

$A_1 O A_2,\ A_2 O A_3, \ldots A_1 O A_n$ . . . . $= f$,

den Flächenraum des ganzen Polygons . . . . $= F$,

den Centriwinkel in demselben, nämlich

$\sphericalangle A_1 O A_2 = \sphericalangle A_2 O A_3 = \ldots = \sphericalangle A_1 O A_n$ . . . . . . $= \alpha$,

die Winkel, welche die Höhen der gleichschenkligen Dreiecke mit der neutralen Axe $A_1 O$ einschliessen $= \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$,

die Abstände ihrer Schwerpuncte o_1, o_2, o_3, o_n von dieser Axe, also $o_1 b_1$, $o_2 b_2, \ldots o_n b_n$ beziehungsweise $= e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$,

die Trägheitsmomente der Dreiecke in Bezug auf die durch ihre eigenen Schwerpuncte gehenden horizontalen Axen

$= t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$,

in Bezug auf die gemeinschaftliche neutrale Axe $A_1 O$ aber

$= T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$,

endlich das zu suchende Trägheitsmoment des ganzen regelmässigen Polygones selbst . . . . . . $= T$.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man zunächst

$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,	$\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha$,	$e_1 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_1$,
$b = 2c \tang \frac{\alpha}{2}$,	$\varphi_2 = \frac{3}{2}\alpha$,	$e_2 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_2$,
$f = \frac{1}{2} bc$,	$\varphi_3 = \frac{5}{2}\alpha$,	$c_3 = \frac{2}{3} c \sin \varphi_3$,
	. . . . .	. . . .
$F = nf$,	$\varphi_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)\alpha$,	$e_n = \frac{2}{3} c \sin \varphi_n$.

Es ist ferner nach der Gleichung (190)

$$t_1 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_1 + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_1\right),$$
$$t_2 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_2 + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_2\right),$$
$$t_3 = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_3 + \tfrac{1}{4} c^2 \sin^2 \varphi_3\right),$$
. . . .
$$t_n = \tfrac{1}{6} f \left(\tfrac{1}{4} b^2 \cos^2 \varphi_n + \tfrac{1}{3} c^2 \sin^2 \varphi_n\right),$$

und nach dem Satze des Uebersetzens der Trägheitsmomente von einer Axe auf eine andere

$$T_1 = t_1 + fe_1^2,$$
$$T_2 = t_2 + fe_2^2,$$
$$T_3 = t + fe_3^2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T_n = t_n + fe_n^2,$$

also auch durch Substitution der betreffenden Werthe

$$T_1 = \tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{12}b^2 cos^2 \varphi_1 + c^2 sin^2 \varphi_1),$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{12}b^2 cos^2 \varphi_2 + c^2 sin^2 \varphi_2),$$
$$T_3 = \tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{12}b^2 cos^2 \varphi_3 + c^2 sin^2 \varphi_3),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T_n = \tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{12}b^2 cos^2 \varphi_n + c^2 sin^2 \varphi_n),$$

und sofort wegen $T = \Sigma T_n$

$$T = \tfrac{1}{2}f\left[\tfrac{1}{12}b^2 \Sigma cos^2\varphi_n + c^2 \Sigma sin^2 \varphi_n\right], \text{ wobei ist:}$$

$$\Sigma cos^2 \varphi_n = cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + cos^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + cos^2\left[(2n-1)\frac{\alpha}{2}\right]$$

und $$\Sigma sin^2 \varphi_n = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sin^2\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + sin^2\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + sin^2\left[(2n-1)\frac{\alpha}{2}\right].$$

Nach den Lehren der Trigonometrie ist in jedem regelmässigen Polygone $\Sigma cos^2 \varphi_n = \Sigma sin^2 \varphi_n = \tfrac{1}{2}n$, also reducirt sich der Ausdruck für T auf

$$T = \tfrac{1}{4}nf(\tfrac{1}{12}b^2 + c^2) = \tfrac{1}{4}F(\tfrac{1}{12}b^2 + c^2).$$

Heisst man noch den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $A_1O = C$, und bemerkt, dass sodann $\tfrac{1}{4}b^2 = C^2 - c^2$ zu setzen ist, so erhält man endlich für das **Trägheitsmoment eines jeden regelmässigen Polygones** ganz einfach

$$T = \tfrac{1}{12}F(C^2 + 2c^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199).$$

Dieser Werth gilt für jede beliebige Querschnittslage, und ist gleich dem 12ten Theil der Fläche des Polygons, multiplicirt mit der Summe aus dem Quadrate des Halbmessers vom umgeschriebenen Kreise und dem doppelten Quadrate des Halbmessers vom eingeschriebenen Kreise.

Für $C = c$ wird das Polygon ein **Kreis**, und hiefür

$$T = \tfrac{1}{4}FC^2 = \tfrac{1}{16}F(2C)^2.$$

Dieser Werth stimmt mit der Formel (53) überein, da $2C$ den Diameter des Kreises vorstellt.

Für das **gleichseitige Dreieck** ist $C = 2c$, also auch $T = \frac{1}{2} F c^2 = \frac{1}{18} F (3c)^2$. Dieser Werth stimmt mit der Formel (55) überein, da $3c$ die Höhe des Dreieckes ist.

Für das **Quadrat** ist ferner $C^2 = 2c^2$, folglich

$$T = \frac{1}{3} F c^2 = \frac{1}{12} F (2c)^2.$$

Dieser Werth steht in Uebereinstimmung mit der Formel (51), da $2c$ die Quadratseite bezeichnet.

§. 122.

Zusammenstellung der Trägheitsmomente für die regelmässigen Polygone. Die nachfolgende Zusammenstellung enthält die Werthe der Trägheitsmomente für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w. bis 12 Seiten, so wie für den Kreis, und zwar durch den Flächenraum F ausgedrückt. Es ist nämlich wegen $c = C \cos \frac{\alpha}{2}$, und $F = \frac{1}{2} n \sin \alpha \, C^2$ auch

$$T = \frac{1}{6} \left(\frac{2 + \cos \alpha}{n \sin \alpha} \right) F^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

Zahl der Polygon-Seiten n	Centriwinkel in Graden α	Trägheitsmoment T des regelmässigen Polygons in Bezug auf die neutrale Axe in jeder Querschnittslage: Eigentlicher Werth desselben	Wenn bei gleichem Flächenraume das Trägheits-Moment des Kreisquerschnittes = 1 ist.
3	120	$0{\cdot}0962\ F^2$	1·209
4	90	$0{\cdot}0833\ F^2$	1·047
5	72	$0{\cdot}0809\ F^2$	1·016
6	60	$0{\cdot}0802\ F^2$	1·008
8	45	$0{\cdot}0798\ F^2$	1·003
9	40	$0{\cdot}0797\ F^2$	1·001
10	36	$0{\cdot}0797\ F^2$	1·001
12	30	$0{\cdot}0796\ F^2$	1·000
∞ Kreis	0	$0{\cdot}0796\ F^2$	1·000

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass das Trägheitsmoment von regelmässigen Polygonen bei einerlei Flächenraum mit der Zunahme der Seitenzahl abnimmt, und sich dem Werthe $\frac{1}{4\pi}F^2 = 0{\cdot}0796\,F^2$, welcher dem Kreisquerschnitte entspricht, desto mehr nähert, je grösser n genommen wird.

Die Biegung eines Trägers, dessen Querschnitt ein regelmässiges Polygon ist, wird daher bei einem gegebenen Inhalte desselben desto grösser, je mehr Seiten das Polygon hat, und für den Kreisquerschnitt ist die grösste Biegung vorhanden.

§. 123.

Tragmoment regelmässiger Polygone. Nachdem das Trägheitsmoment der regelmässigen Polygone in jeder Lage der neutralen Axe bekannt ist, so unterliegt es keinem Anstande, das betreffende Tragmoment zu finden. Man hat nämlich nach der Gleichung (95) allgemein

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{a\,T}{h'} = \frac{1}{12} a\,F\left(\frac{C^2 + 2c^2}{h'}\right) \\ \quad\text{oder } \frac{r\,T}{h''} = \frac{1}{12} r\,F\left(\frac{C^2 + 2c^2}{h''}\right) \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (201)$$

und es wird sich nur darum handeln, die richtigen Werthe für die Grössen h' und h'' zu substituiren. Zu diesem Behufe unterscheide man, ob die Anzahl der Polygonseiten gerade oder ungerade ist.

1. Ist die Seitenzahl n eines regelmässigen Polygones eine gerade, so hat man in jeder Querschnittslage $h' = h''$. Der grösste Werth, welchen die Abstände h' und h'' nach den verschiedenen Querschnittslagen erreichen können, ist offenbar der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, der kleinste Werth hingegen der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

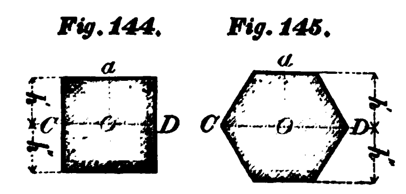
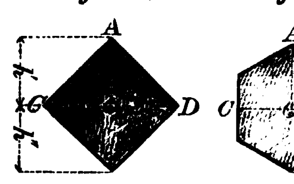


Fig. 144. *Fig. 145.*

Das grösste Tragmoment $Max.\ M$ entsteht daher für $h' = h'' = c$, d. h. wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises vertical steht, wie in den Figuren 144 und 145, und das klein-

Fig. 146. Fig. 147.



ste Tragmoment *Min.* M für $h' = h'' = C$, d. h. wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises vertical ist, wie in den Figuren 146 und 147, wo in beiden Fällen die neutrale Axe horizontal angenommen wird. Demgemäss wird

$$Max.\ M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12} a F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) \\ \text{oder } \frac{1}{12} r F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) \end{array} \right\} \quad . \; . \quad (202).$$

und

$$Min.\ M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } \frac{1}{12} a F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) \\ \text{oder } \frac{1}{12} r F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (203).$$

Auch hat man nach dem Vorigen

$$F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C} \right) = \frac{(2 + \cos\alpha)\sqrt{2}}{\sqrt{n \sin\alpha}} F^{\frac{3}{2}} \text{ und}$$

$$F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{c} \right) = \frac{(2 + \cos\alpha)\sqrt{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \sqrt{n \sin\alpha}} F^{\frac{3}{2}}.$$

Endlich ist das Verhältniss zwischen dem jeweiligen Maximal- und Minimal-Werthe des Tragmomentes

$$Max. M : Min. M = C : c = 1 : \cos\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \quad (204).$$

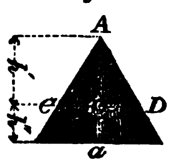
Nach diesen Relationen wurde folgende Tabelle entworfen:

Anzahl der Polygon-Seiten n	Tragmoment regelmässiger Polygone mit gerader Seitenzahl für alle Materialien				
	Eigentlicher Werth von		Verhältniss	Wenn bei gleichem Flächenraume das Tragmoment des Kreisquerschnittes = 1 ist	
	Max. M	*Min. M*	*Max. M* : *Min. M*	*Max. M*	*Min. M*
4	entw. 0·167 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·167 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·118 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·118 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·707	1·18	0·84
6	entw. 0·149 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·149 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·129 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·129 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·866	1·06	0·91
8	entw. 0·145 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·145 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·134 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·134 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·924	1·03	0·95
10	entw. 0·144 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·144 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·137 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·137 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·951	1·02	0·97
12	entw. 0·143 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·143 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·138 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·138 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 0·966	1·01	0·98
∞ Kreis	entw. 0·141 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·141 $rF^{\frac{3}{2}}$	entw. 0·141 $aF^{\frac{3}{2}}$ oder 0·141 $rF^{\frac{3}{2}}$	1 : 1	1	1

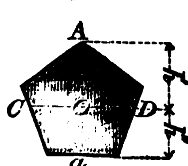
Aus dieser Tabelle geht hervor, dass von allen regelmässigen Polygonen, deren Seitenzahl gerade ist, mit Rücksicht auf die verschiedenen Lagen, die der Querschnitt haben kann, bei einem gegebenen Flächenraume und sonst gleichen Umständen das Quadrat sowohl das grösste Tragmoment, wenn nämlich die neutrale Axe mit der Quadratseite parallel läuft, als auch das kleinste Tragmoment, wenn jene Axe in eine Diagonale fällt, besitzt.

2. Ist bei einem regelmässigen Polygone die Anzahl der Seiten ungerade, so sind im Allgemeinen die Grössen h' und h'' von einander verschieden, können aber in besonderen Querschnittslagen auch gleich werden. Da der grösste Werth, welchen der Abstand h' oder h'' annehmen kann, auch in diesem Falle C ist, so leuchtet ein, dass das Minimum des Tragmomentes *Min. M* sich gleichfalls in derjenigen Querschnittslage ergeben werde, wo der Halbmesser des umge-

Fig. 148.





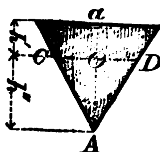


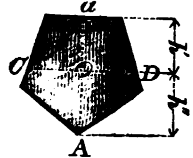
schriebenen Kreises vertical liegt. Wird dieses Minimalmoment, wie in den Figuren 148 und 149, in Folge der Ausdehnung der Fasern erschöpft, so hat man $h' = C$ und

$$Min.\, M = \frac{a\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\, a\, F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C}\right) \quad . \; . \; . \quad (205).$$

Dieser Fall tritt für $r > a$, also bei dem G u s s e i s e n ein.

Fig. 150. *Fig. 151.*





Wird hingegen das Minimalmoment, wie in den Figuren 150 und 151, in Folge der Zusammendrückung der Fasern erschöpft, so hat man $h'' = C$ und

$$Min.\, M = \frac{r\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\, r\, F \left(\frac{C^2 + 2c^2}{C}\right) \quad . \; . \; . \quad (206).$$

Dieser Fall tritt für $r < a$, also bei den H o l z m a t e r i a l i e n ein.

Für $r = a$ kann entweder das eine oder das andere geschehen, indem das Minimalmoment in zwei einander entgegengesetzten Stellungen zu erreichen ist. Dieser Fall wird bei dem Schmiedeeisen Anwendung finden, wenn für dasselbe in der That die Gleichheit der Grössen a und r zugelassen werden kann. Es ist sodann

$$Min.\, M = \frac{a\,T}{C} = \frac{r\,T}{C} = \tfrac{1}{12}\, a\, F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) = \tfrac{1}{12}\, r\, F\left(\frac{C^2+2c^2}{C}\right) \quad (207).$$

3. Um auch das g r ö s s t e Tragmoment für die regelmässigen Polygone von einer u n g e r a d e n Seitenzahl zu finden, welches nach den verschiedenen Querschnittslagen eintreten kann, erwäge man, dass dann der kleinere von den beiden Werthen $\frac{a}{h'}$ und $\frac{r}{h''}$ ein Maximum werden muss. Diess geschieht, wenn

$$\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''} \text{ oder } a : r = h' : h''$$

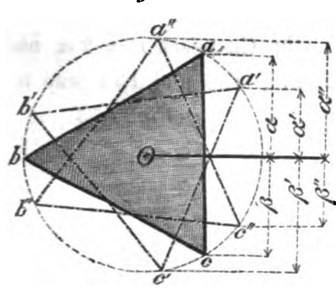


Fig. 152.

wird, vorausgesetzt, dass dieser Fall überhaupt möglich ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung leuchtet sehr bald ein. Es sei z. B. (Fig. 152) das gleichseitige Dreieck abc eben in der besonderen Lage, wo $h'=\alpha$ und $h''=\beta$ solche Werthe haben, dass $\frac{a}{h'}=\frac{r}{h''}$ wird. In diesem Falle ist das Tragmoment

$$M=\frac{aT}{\alpha}=\frac{rT}{\beta}.$$

Dreht man jetzt die Figur um ihren Schwerpunct, so dass sie etwa in die Lage $a'b'c'$ kommt, so wird $h'=\alpha'$, $h''=\beta'$, also das Tragmoment

$$M'=\begin{cases}\text{entweder } \dfrac{aT}{\alpha'}\\ \text{oder } \dfrac{rT}{\beta'}.\end{cases}$$

Nun ist nach der Figur $\alpha'<\alpha$ und $\beta'>\beta$, daher $\frac{aT}{\alpha'}>\frac{aT}{\alpha}$ und $\frac{rT}{\beta'}<\frac{rT}{\beta}$, ferner wegen $\frac{aT}{\alpha}=\frac{rT}{\beta}$ offenbar $\frac{rT}{\beta'}<\frac{aT}{\alpha'}$. Demgemäss hat von den Doppelwerthen für M' der zweite den kleineren Werth, und da man desshalb $M'=\frac{rT}{\beta'}$, sofort aber $M'<M$ erhält, so ist das Tragmoment in der veränderten Stellung $a'b'c'$ kleiner, als in der früheren Stellung abc.

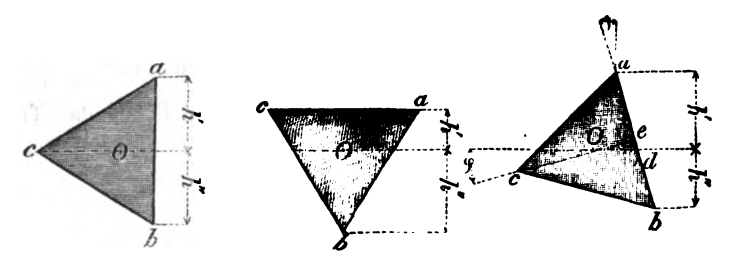
Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass eine Drehung des Querschnittes nach der anderen Seite das Tragmoment gleichfalls verkleinert. Kommt nämlich das Δabc in die Lage $a''b''c''$, so findet man das betreffende Tragmoment M'' aus der Relation $M''=\frac{aT}{\alpha''}$, woraus wegen $\alpha''>\alpha$ auch $M''<M$ folgt.

Da also $M'<M>M''$ ist, und diese Relation in dem gleichen Sinne auch für die anderen regelmässigen Polygone mit ungerader Seitenzahl gilt, so unterliegt es keinem Zweifel, dass der besondere Werth von M selbst ein Maximum sein muss, wenn, wie bereits vorne

bemerkt wurde, überhaupt eine solche Polygonstellung möglich ist, in welcher $h' : h'' = a : r$ werden kann.

Wäre z. B. für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holz $r = \frac{3}{4} a$, so zeigen die Figuren 153, 154 und 155 jene re-

Fig. 153. *Fig. 154.* *Fig. 155.*



spectiven Stellungen des gleichseitigen Dreieckes, in welchen das Tragmoment ein Maximum wird. Man hat nämlich nach diesen Annahmen für Schmiedeeisen (Fig. 153) $h' = h'' = \frac{1}{2} \overline{ab}$, daher eine Dreiecksseite vertical und wegen $F = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{ab}^2$

$$h' = h'' = 0{\cdot}7598 \sqrt{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208).$$

Für Gusseisen wäre die Gleichheit der Verhältnisse $h' : h''$ und $a : r$ nicht möglich, man muss daher diejenige Stellung (Fig. 154) wählen, in welcher die genannten Verhältnisse am wenigsten von einander differiren. In dieser Stellung liegt eine Dreiecksseite horizontal und man erhält

$$h' : h'' = 1 : 2, \; h' = \tfrac{1}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{6} \overline{ab} \text{ und } h'' = \tfrac{2}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{3} \overline{ab},$$

daher wegen $F = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{ab}^2$ auch

$$\left. \begin{array}{r} h' = 0{\cdot}4387 \sqrt{F} \\ \text{und } h'' = 0{\cdot}8774 \sqrt{F} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209).$$

Für Holz endlich wäre die Stellung (Fig. 155) zu wählen, in welcher $h' : h'' = a : r = 4 : 3$ und demnach

$$\overline{ad} : \overline{bd} = a : r = 4 : 3, \; \overline{ad} = \left(\frac{a}{a+r}\right) \overline{ab} = \tfrac{4}{7} \overline{ab}$$

und $\overline{bd} = \left(\frac{r}{a+r}\right) \overline{ab} = \frac{3}{7} \overline{ab}$ wird. Ist noch $\overline{Oe} \perp \overline{ab}$, daher

$$\overline{de} = \overline{ad} - \overline{ae} = \left(\frac{a}{a+r} - \tfrac{1}{2}\right) \overline{ab} = \frac{a-r}{2(a+r)} \overline{ab} = \tfrac{1}{14} \overline{ab},$$

$\overline{Oe} = \frac{1}{3}\,\overline{ce} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\overline{ab}$ und $tg\,\varphi = \frac{\overline{de}}{\overline{Oe}} = \frac{(a-r)\sqrt{3}}{a+r} = \frac{\sqrt{3}}{7} = 0{\cdot}2475$, so folgt daraus der betreffende Stellungswinkel $\varphi = 13^\circ\,54'$,

$$h = \overline{ab}\,\cos\varphi = 0{\cdot}9708\;\overline{ab} = 1{\cdot}4752\;\sqrt{F},$$

und

$$\left.\begin{aligned} h' &= 0{\cdot}8430\;\sqrt{F} \\ h'' &= 0{\cdot}6322\;\sqrt{F} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (210).$$

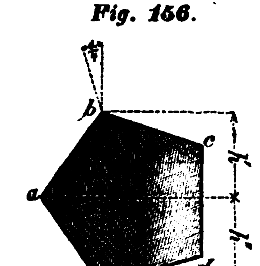
Benützt man jetzt die gefundenen Werthe von h' und h'' zur Bestimmung des Maximal-Tragmomentes für das gleichseitige Dreieck, so findet man beispielsweise

für Schmiedeeisen $Max.\,M = 0{\cdot}127\;a\,F^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}127\;r\,F^{\frac{3}{2}}$

für Gusseisen . $Max.\,M = 0{\cdot}219\;a\,F^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}073\;r\,F^{\frac{3}{2}}$

und für Holz . . $Max.\,M = 0{\cdot}114\;a\,F^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}152\;r\,F^{\frac{3}{2}}$.

Fig. 156.



Bei den anderen regelmässigen Polygonen mit ungerader Seitenzahl hat man zunächst für solche Materialien, für welche man $r = a$ setzen kann, zur Erreichung des grössten Tragmomentes stets die Stellung zu wählen, wo, wie in der Fig. 156, $h' = h''$ wird. In dieser Stellung ist immer eine grösste Diagonale $\overline{be}$ vertical, und der Winkel $e\,b\,O$, den der Halbmesser $\overline{bO}$ des umgeschriebenen Kreises mit jener Diagonale einschliesst, gleich $\frac{1}{4}\alpha$, wenn α den Polygonswinkel $\frac{360^\circ}{n}$ bedeutet. Unter diesen Umständen ist $h' = h'' = \frac{1}{2}\,\overline{be} = C\cos\frac{\alpha}{4}$ und das grösste Tragmoment

$$Max.\,M = \frac{aT}{C\cos\frac{\alpha}{4}} = \frac{rT}{C\cos\frac{\alpha}{4}} \quad \ldots \quad (211).$$

Indem aber nach der Gleichung (207)

$$Min.\,M = \frac{aT}{C} = \frac{rT}{C}$$

war, erhält man als gegenseitiges Verhältniss

$$Max.\,M : Min.\,M = 1 : \cos\frac{\alpha}{4} \quad \ldots \quad (212),$$

also für $n = 5$ . . 1 : 0·951

„ „ $n = 9$ . . 1 : 0·985 u. s. w.

Vergleicht man die Verhältnisse (204) und (212), so bemerkt man, dass dieselben für $a = r$ verschiedene Gesetze befolgen, je nachdem die Seitenzahl n des Polygons gerade oder ungerade ist. Das Verhältniss (212) wird für Schmiedeeisen zuzulassen sein, wenn man $r = a$ annehmen kann.

Für Gusseisen und Holz ist bezüglich der regelmässigen Polygone mit ungerader Seitenzahl (abgesehen von dem gleichseitigen Dreiecke) zu bemerken, dass die vorerwähnte Bedingung $h' : h'' = a : r$ nicht mehr erreicht werden kann. In diesem Falle ist das Maximalmoment in derjenigen Querschnittslage vorhanden, wo der Abstand der bis zur Elasticitätsgränze beanspruchten Fasern (h' oder h'') $= c =$ dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises wird. In dieser Stellung liegt der genannte Halbmesser c vertical, und sie ist derjenigen Stellung (Fig. 148, 149, 150 und 151), welche dem Minimalmoment entspricht, geradezu entgegengesetzt. Es wird daher das betreffende Maximalmoment

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Gusseisen } Max.\ M & = \frac{a\,T}{c} \\ \text{und für Holz . . } Max\ M & = \frac{r\,T}{c} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (213)$$

also für beide Materialien mit Rücksicht auf die Gleichungen (205) und (206)

$$Max.\ M : Min.\ M = C : c = 1 : cos \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad (214)$$

Dieses Verhältniss ist

für $n = 5$ . . . . 1 : 0·809,
für $n = 9$ . . . . 1 : 0·940,

u. s. w.

Man sieht, dass für Gusseisen und Holz jetzt dasselbe Verhältniss zwischen $Max.\ M$ und $Min.\ M$ wieder eintritt, wie solches in der Relation (204) allgemein für eine gerade Polygonseitenzahl aufgestellt wurde.

§. 124.

Vergleichung der Tragmomente regelmässiger Polygone bei verschiedenen Materialien in den günstigsten und ungünstigsten Querschnittslagen.

Zu einer solchen Vergleichung eignen sich die nach dem vorigen §. resultirenden Werthe für *Max. M* und *Min. M*. Ist die Seitenzahl des regelmässigen Polygones gerade, so gibt die Tabelle im vorigen §. ad 1 bereits den nöthigen Aufschluss. In diesem Falle sind die Zahlenverhältnisse von der Materialgattung unabhängig. Ist aber die Seitenzahl des Polygons ungerade, so unterliegen die Zahlenverhältnisse nach der Materialgattung einer grösseren oder geringeren Veränderung. In der nachfolgenden Tabelle sind die Maximal- und Minimalwerthe von *M* für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w., bis 12 Seiten in Theilen des Tragmomentes des Kreisquerschnittes von gleichem Flächenraume ausgedrückt, wobei für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holzmaterialien $r = \frac{3}{4} a$ beispielsweise angenommen ist.

Anzahl der Polygonseiten n	Maximal- und Minimal-Tragmomente der regelmässigen Polygone, wenn bei gleichem Flächenraume und sonst gleichen Umständen das Tragmoment des Kreisquerschnittes = 1 ist.					
	für Schmiedeeisen		für Gusseisen		für Holz	
	Max M	*Min. M*	*Max. M*	*Min. M*	*Max. M*	*Min. M*
3	0·90	0·78	1·55	0·78	1·08	0·78
4	1·18	0·84	1·18	0·84	1·18	0·84
5	0·93	0·88	1·10	0·88	1·09	0·88
6	1·06	0·91	1·06	0·91	1·06	0·91
8	1·03	0·95	1·03	0·95	1·03	0·95
9	0·98	0·96	1·02	0·96	1·02	0·96
10	1·02	0·97	1·02	0·97	1·02	0·97
12	1·01	0·98	1·01	0·98	1·01	0·98
∞ Kreis	1	1	1	1	1	1

§. 125.

Mechanisches Widerstandsmoment von Trägern, welche regelmässige Polygone als Querschnitte besitzen. Um auch das zulässige mechanische Widerstandsmoment solcher Träger zu finden, berücksichtige man die allgemeinen Gleichungen (147) und (148). Heisst man das grösste zulässige Widerstandsmoment in einer beliebigen Querschnittslage W, die Länge des Prismas l und den Körperraum desselben K, so hat man $K = Fl$ und

$$W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2} \\ \quad \text{oder } \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

daher auch wegen $T = \frac{1}{12} (2 \quad cos\,\alpha) F C^2$

$$W = \begin{Bmatrix} \text{entweder } \frac{1}{72} (2 + cos\,\alpha) \frac{a^2}{m} . K . \frac{C^2}{h'^2} \\ \quad \text{oder } \frac{1}{72} (2 + cos\,\alpha) \frac{r^2}{m} . K . \frac{C^2}{h''^2} \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad (215),$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

Nach den verschiedenen Querschnittslagen, welche in Bezug auf die neutrale Axe eintreten können, werden sich auch gegenwärtig grösste und kleinste Werthe für W ergeben, deren Bestimmung auf analoge Weise, wie bei dem Tragmomente geschehen kann, zumal es einleuchtet, dass die Maximal- und Minimalwerthe für M und W in denselben Stellungen der Polygone vorhanden sein müssen.

1) Ist daher die Seitenzahl des Polygons eine gerade, so hat man, um $Max.\ W$ zu erhalten, $h' = h'' = c = C cos \frac{\alpha}{2}$, und, um $Min.\ W$ zu erhalten, $h' = h'' = C$ zn setzen. Dieser Bemerkung gemäss erhält man

$$Min.\ W = \begin{Bmatrix} \text{entweder } \frac{1}{72} (2 + cos\,\alpha) \frac{a^2}{m} K \\ \quad \text{oder } \frac{1}{72} (2 + cos\,\alpha) \frac{r^2}{m} K \end{Bmatrix} . \quad . \quad . \quad . \quad (216),$$

und

$$Max.\ W = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{72}\left(\frac{2+\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{a^3}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{72}\left(\frac{2+\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{r^3}{m}K \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (217),$$

also auch

$$Max.\ W : Min.\ W = 1 : \cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \quad (218).$$

Nach diesen Formeln ist die nachstehende Tabelle entworfen:

Anzahl der Polygon-Seiten n	Mechanisches Widerstandsmoment von prismatischen Trägern, welche regelmässige Polygone mit gerader Seitenzahl als Querschnitte besitzen, und aus einem festen elastischen Materiale bestehen.				
	Eigentlicher Werth von		Verhältniss	Wenn bei gleichem Körperraume das mech. Widerstandsmoment bezüglich des Kreisquerschnittes = 1 ist.	
	Max. W	*Min. W*	*Max. W* : *Min. W*	*Max. W*	*Min. W*
4	entw. $0{\cdot}0554\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0554\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0278\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0278\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·5	1·33	0·67
6	entw. $0{\cdot}0463\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0463\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0347\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0347\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·75	1·11	0·83
8	entw. $0{\cdot}0441\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0441\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0376\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0376\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·854	1·06	0·90
10	entw. $0{\cdot}0431\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0431\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0390\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0390\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·905	1.03	0·94
12	entw. $0{\cdot}0427\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0427\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0398\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0398\frac{r^3}{m}K$	1 : 0·933	1·02	0·95
∞ Kreis	entw. $0{\cdot}0417\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0417\frac{r^3}{m}K$	entw. $0{\cdot}0417\frac{a^3}{m}K$ oder $0{\cdot}0417\frac{r^3}{m}K$	1 : 1	1	1

2. Bei regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl ist zur Erreichung des Minimalwerthes von W

für $r > a$, also für Gusseisen, $h' = C$,
für $r < a$, also für Holz, $h'' = C$
und für $r = a$, ... $h' = h'' = C$

zu setzen. Das letztere wird in der Regel für Schmiedeeisen gelten können. Sonach erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } r > a,\ Min.\ W = \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\frac{a}{m}K, \\ &\text{für } r < a,\ Min.\ W = \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\frac{r^2}{m}K \\ &\text{und für } r = a,\ Min.\ W = \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\frac{a^2}{m}K \\ &\qquad\text{auch} = \tfrac{1}{72}(2 + \cos\alpha)\frac{r^2}{m}K \end{aligned}\right\} \quad (219).$$

3. Um auch $Max\ W$ bei den regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl zu finden, hat man diejenigen Polygonstellungen zu wählen, auf welche im §. 123 ad 3 aufmerksam gemacht wurde. So erhält man z. B. bezüglich des gleichseitigen Dreieckes, mit Rücksicht auf die in den Gleichungen (208), (209) und (210) zusammengestellten Werthe von h' und h''

für Schmiedeeisen (wenn $r = a$ wäre) $Max.\ W = 0{\cdot}0277 \frac{a^2}{m} K$,

für Gusseisen (wenn $r = 3a$ wäre) $Max.\ W = 0{\cdot}0832 \frac{a^2}{m} K$ und

für Holz . . (wenn $r = \frac{3}{4}a$ wäre) $Max.\ W = 0{\cdot}0520 \frac{r^2}{m} K$.

Bei den übrigen regelmässigen Polygonen mit einer ungeraden Seitenzahl hat man eben so in Hinblick auf die weiteren Bemerkungen im §. 123 ad 3

$$\left.\begin{aligned} &\text{für Schmiedeeisen } Max.\ W = \tfrac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{4}}, \\ &\text{für Gusseisen . } Max.\ W = \tfrac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\ &\text{und für Holz . . . } Max.\ W = \tfrac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{C^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \ (220).$$

Die Vergleichung der Relationen (219) und (220) ergibt endlich für Schmiedeeisen

$$Max.\ W : Min.\ W = 1 : cos^2 \frac{\alpha}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221),$$

also für $n = 5$ . . $1 : 0{\cdot}809$,
„ „ $n = 9$ . . $1 : 0{\cdot}940$
u. s. w.,

für Gusseisen und Holz aber

$$Max\ W : Min.\ W = 1 : cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222),$$

also für $n = 5$ . . $1 : 0{\cdot}604$,
„ „ $n = 9$ . . $1 : 0{\cdot}883$
u. s. w.

Man bemerkt nicht ohne Interesse, dass die Verhältnisse (218) und (221) verschiedene, die Verhältnisse (218) und (222) aber gleiche Gesetze befolgen.

§. 126.

Vergleichung der mechanischen Widerstandsmomente von prismatischen Trägern mit regelmässigen Polygonen als Querschnitte in den günstigsten und ungünstigsten Querschnittslagen. Zu einer solchen Vergleichung eignen sich die nach dem vorigen §. resultirenden Werthe für *Max. W* und *Min. W.* Ist die Seitenzahl des regelmässigen Polygones eine gerade, so gibt die Tabelle im vorigen §. ad 1 bereits den nöthigen Aufschluss. In diesem Falle sind die Zahlenverhältnisse von der Materialgattung unabhängig. Ist aber die Seitenzahl des Polygons eine ungerade, so unterliegen die Zahlenverhältnisse je nach der Materialgattung einer grösseren oder geringeren Veränderung. In der nachstehenden Tabelle sind die Maximal- und Minimalwerthe von W für die regelmässigen Polygone mit 3, 4, 5 u. s. w. bis 12 Seiten in Theilen des Widerstandsmomentes eines Cylinders von gleichem Körperraume ausgedrückt, wobei für Schmiedeeisen $r = a$, für Gusseisen $r = 3a$ und für Holzmaterialien $r = \frac{3}{4}a$ beispielsweise angenommen ist.

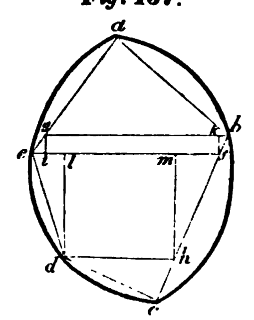
Anzahl der Polygonseiten.	Maximal- und Minimal-Werthe des mechanischen Widerstandsmomentes von prismatischen Trägern mit regelmässigen Polygonen als Querschnitte, wenn das mechanische Widerstandsmoment eines Cylinders von gleichem Körperraume = 1 ist.					
	für Schmiedeeisen		für Gusseisen		für Holz	
	Max. W	*Min. W*	*Max. W*	*Min. W*	*Max. W*	*Min. W*
3	0·67	0·50	2·00	0·50	1·25	0·50
4	1·33	0·67	1·33	0·67	1·33	0·67
5	0·85	0·77	1·27	0·77	1·27	0·77
6	1·11	0·83	1·11	0·83	1·11	0·83
8	1·06	0·90	1·06	0·90	1·06	0·90
9	0·95	0·93	1·04	0·93	1·04	0·93
10	1·03	0·94	1·03	0·94	1·03	0·94
12	1·02	0·95	1·02	0·95	1·02	0·95
∞ Kreis	1	1	1	1	1	1

§. 127.

Allgemeine Regel zur Bestimmung des Trägheitsmomentes für jeden beliebigen Querschnitt. Nach den bisherigen Erörterungen kann man für eine grosse Anzahl von Querschnitten die entsprechenden Werthe für das Trägheitsmoment bestimmen. Es erübrigt noch die ergänzenden Bemerkungen beizufügen, aus welchen eine allgemeine Regel hervorgeht, wie man in dieser Beziehung für jeden beliebigen Querschnitt zu verfahren hat. Zu diesem Behufe braucht man nur eine zweckmässige Eintheilung des Querschnittes in mehrere Theile vorzunehmen, so dass die Trägheitsmomente dieser Bestandtheile angegeben werden können. Die Art und Weise dieser Eintheilung ist aus dem Folgenden zu entnehmen: Man schneide von dem

gegebenen Querschnitte (Fig. 157) zuerst solche Segmente ab, bc, cd, de und ea ab, welche als parabolisch und symmetrisch gelten können. Sodann ziehe man durch sämmtliche Endpuncte dieser Segmente die zur neutralen Axe parallelen Geraden ef, bg und dh, endlich hierauf die Normalen gi, fk, dl und hm. Auf diese Weise bekommt man durchaus Rechtecke, Dreiecke und Segmente. Die beiden erstgenannten Figuren haben eine solche Lage, dass stets eine Seite mit der neutralen Axe parallel läuft. Nur die Segmente erscheinen in schiefen Stellungen, können aber in besonderen Fällen auch so liegen, dass entweder die Basis oder die Höhe derselben zu der neutralen Axe parallel ist. Nun sind die Trägheitsmomente der Rechtecke, Dreiecke und Segmente in den erwähnten Lagen leicht zu bestimmen, indem es nach den §§. 118 und 119 und insbesondere nach der Gleichung (191) keinem Anstande unterliegt, den Einfluss schiefer Stellungen von Segmenten gegen die neutrale Axe zu berücksichtigen. Das weitere Verfahren ergibt sich aus dem §. 114. Es versteht sich übrigens von selbst, dass in besonderen Fällen auch andere einfache Figuren als Theile des Querschnittes erscheinen können*).

Fig. 157.



Um die besprochene Methode durch ein specielles Beispiel zu versinnlichen, betrachte man den in der Fig. 158 (Seite 219) in natürlicher Grösse verzeichneten Querschnitt, welcher für die Schienen der Semmering-Eisenbahn in Anwendung gekommen ist. Es werde die Krafteinwirkung vertical und die neutrale Axe horizontal und parallel zu der Basis vw angenommen. Um das Trägheitsmoment T dieses

*) Dieses Verfahren ist analog mit dem, welches in der practischen Geometrie zur Berechnung des Flächenraumes einer Figur angewendet wird, und empfiehlt sich desshalb, weil die Berücksichtigung der schiefen Lage von Segmenten gegen die neutrale Axe auf eine einfache Art geschehen kann. Die Kenntniss der in den §§. 118 und 119 angegebenen Eigenschaften der symmetrischen Figuren gibt daher dem vorgeschlagenen Verfahren den eigentlichen practischen Werth, zumal man dabei keine weitläufigen Formeln und keinen besonderen mathematischen Calcul benöthigt.

Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe zu bestimmen, zerlege man die eine Hälfte desselben in folgende Theile:

1. In das Rechteck *abcd*,
2. " " *defg*,
3. " " *hikl*,
4. " Dreieck *ilm*,
5. " " *eno*,
6. " " *ofp*,
7. " Segment *abu*,
8. " " *nos*,
9. " " *mlq* und
10. in die Viertel-Ellipse *bhk*.

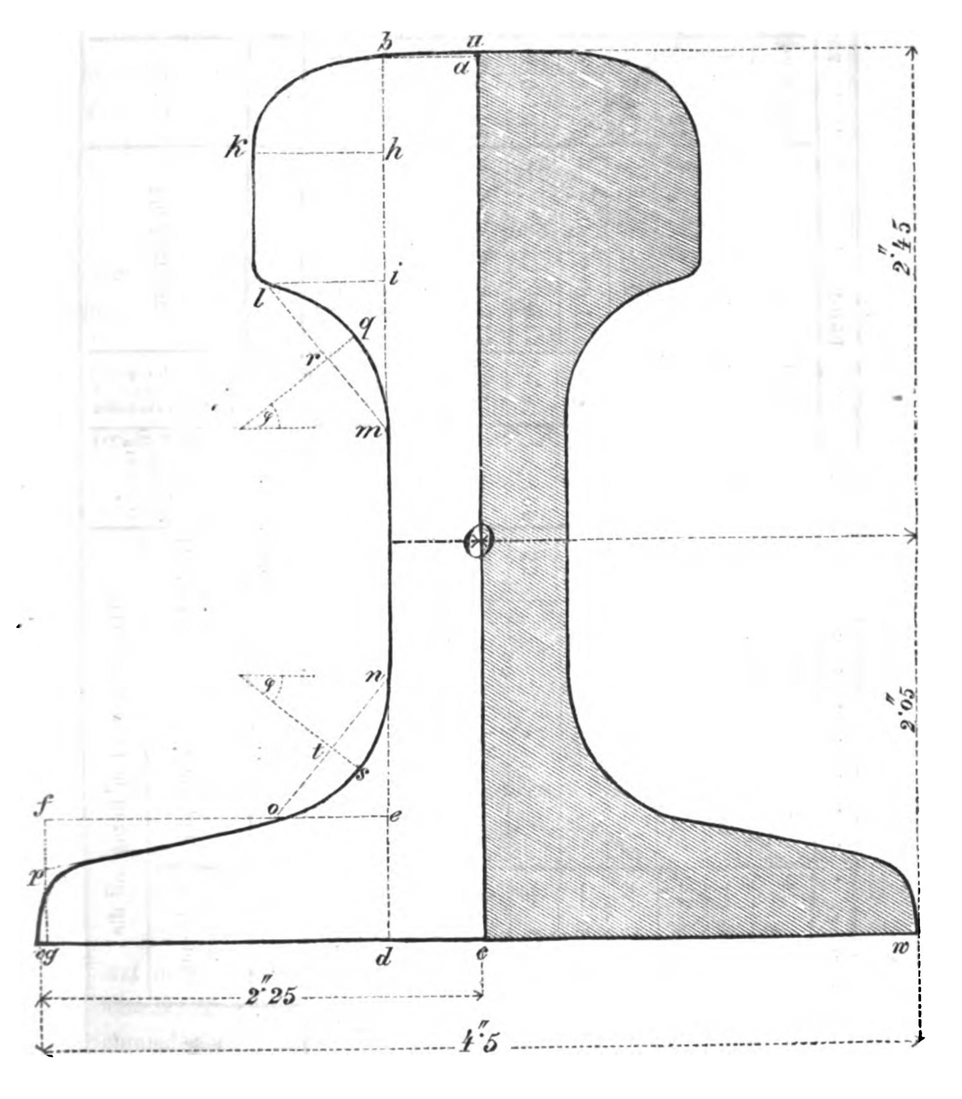
Dabei wird näherungsweise statt der krummlinigen Begränzung zwischen *o* und *v* die geradlinige *opg* substituirt, und die Abrundung nächst *l* vernachlässigt. Die Figuren, 6, 8 und 9 sind negativ zu nehmen.

Mit Rücksicht auf diese Eintheilung und mit Benützung der betreffenden Ausmassen wurde folgende Tabelle zu sammengestellt (S. 220)

Fig. 158.

Profil der Semmering-Eisenbahnschienen.

(Natürliche Grösse.)



Bezeichnung der Theilfigur	Grundlinie		Höhe		Flächenraum		Abstand d. eigenen Schwerpunctes v. d. Schienenbasis	Statisches Moment in Bezug auf die Schienenbasis	Trägheitsmoment in Bezug auf die durch den eigenen Schwerpunct gehende horizontale Axe		Trägheitsmoment in Bezug auf die Schienenbasis.	Anmerkung.
	α		β		f □″		e	fe	Nach d. Formel	t	$t+fe^2$	
abcd	*cd*	0·458″	*ac*	4·483″	$+\ \alpha\beta$	+2·052	2·241″	+4·598	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+ 13·741	Die Masseinheit ist der Wiener Zoll
defg	*dg*	1·762	*de*	0·643	$+\ \alpha\beta$	+1·132	0·322	+0·365	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+ 0·156	
hikl	*hk*	0·667	*hi*	0·643	$+\ \alpha\beta$	+0·428	0·367	+1·567	51	$\frac{1}{12}f\beta^2$	+ 5·803	
ilm	*il*	0·588	*im*	0·732	$+\frac{1}{2}\alpha\beta$	+0·215	3·113	+0·670	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	+ 2·090	
eno	*eo*	0·588	*en*	0·732	$+\frac{1}{2}\alpha\beta$	+0·215	0·887	+0 190	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	+ 0·175	
ofp	*of*	1·174	*fp*	0·270	$-\frac{1}{2}\alpha\beta$	—0·158	0·553	—0·087	55	$\frac{1}{18}f\beta^2$	— 0·049	
abu	*ab*	0·458	*au*	0·017	$+\frac{2}{3}\alpha\beta$	+0·052	4·490	+0·233	57	$\frac{12}{175}f\beta^2$	+ 1·048	
nos	*no*	0·938	*st*	0·164	$-\frac{2}{3}\alpha\beta$	—0·103	0 978	—0·101	191	$\frac{1}{3}f[\frac{1}{4}\alpha^2\cos^2\varphi+\frac{12}{35}\beta^2\sin^2\varphi]$	— 0·101*	
mlq	*ml*	0·938	*qr*	0·164	$-\frac{2}{3}\alpha\beta$	—0·103	3·022	—0·311	191	detto	— 1·048*	
bhk	*hk*	0·667	*bh*	0·483	$+\frac{\pi}{4}\alpha\beta$	+ 0·254	4·205	+1·068	54	$\left(\frac{1}{4}-\frac{16}{9\pi^2}\right)f\beta^2$	+ 4·495	
Summa						3·984	. .	8·192	. . . .		26·310	

$$* \sin^2\varphi = \frac{\overline{eo}^2}{\overline{eo}^2+\overline{en}^2} = 0·391$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\overline{en}^2}{\overline{eo}^2+\overline{en}^2} = 0·609$$

Sonach ist der Flächenraum $F = 2\,\Sigma f = 7{\cdot}97 \,\square''$, die Entfernung des Schwerpunctes O von der Schienenbasis

$$\overline{Oc} = \frac{\Sigma fe}{\Sigma f} = \frac{8{\cdot}192}{3{\cdot}984} = 2{\cdot}05'',$$

und wenn H die ganze Schienenhöhe vorstellt, wegen $H = 4{\cdot}5''$

$$\overline{Ou} = H - \overline{Oc} = .\ 2{\cdot}45'',$$

endlich das zu suchende Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe

$$T = 2\,\Sigma(t + fe^2) - F\,\overline{Oc}^2 = 2 \times 26{\cdot}310 - 7{\cdot}97 \times \overline{2{\cdot}05}^2 = 18{\cdot}96,$$

oder sehr nahe

$$T = 0{\cdot}118\,FH^2.$$

Mit Hilfe des Werthes findet man für Schmiedeeisen das Tragmoment des Querschnittes, wenn die Fasern an der Schienenbasis ausgedehnt und an dem Schienenkopfe zusammengedrückt werden, aus der Formel

$$M = \frac{rT}{\overline{Ou}} = 7{\cdot}74\,r = 0{\cdot}216\,rFH,$$

weil in diesem Falle wegen $a \gtreqqless r$ offenbar die Elasticitätsgränze bei der Zusammendrückung erreicht wird.

Ferner ist unter diesen Umständen das grösste zulässige mechaniche Widerstandsmoment

$$W = \tfrac{1}{6}\,\frac{r^2}{m}\,\frac{Tl}{\overline{Ou}^2} = 0{\cdot}527\,\frac{r^2}{m}\,l = 0{\cdot}066\,\frac{r^2}{m}\,Fl = 0{\cdot}066\,\frac{r^2}{m}\,K,$$

wobei l die Länge der Schiene und K ihren Körperraum bezeichnet.

Die Benützung dieser Werthe für M nnd W kann keinem Anstande unterliegen. Liegt z. B. die Schiene auf 2 Stützen so auf, dass die freie Länge $l = 100''$ beträgt, und wird die Frage gestellt, wie gross das Tragvermögen ist, wenn die Belastung in der halben Länge sich concentrirt, so erhält man zu Folge der Gleichung (113)

$$\tfrac{1}{4}(Q_3 + \tfrac{1}{2}Q_4)\,l = M,$$

wenn Q_3 das eigene Gewicht der Schiene, Q_4 aber jenes zu suchende Tragvermögen bezeichnet. Daraus folgt

$$Q_4 = \frac{8M}{l} - 2\,Q_3.$$

Setzt man das eigene Gewicht $Q_3 = Fl\gamma = 2$ Ztnr., und das Tragmoment $M = 7{\cdot}74\,r = 774$, wenn das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeisen $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztnr., und die grösste zulässige Pressung r per $\square''$ etwa mit 100 Ztr. angenommen wird, so erhält man endlich das Tragvermögen $Q_4 = 58$ Ztnr.

§. 128.

Vergleichung des Widerstandes verschiedener Eisenbahnschienen. Nachstehende Zusammenstellung enthält für die Querschnittsformen von Schienen bei mehreren ausgeführten Eisenbahnen die entsprechenden Werthe des Trägheitsmomentes (T), des Tragmomentes (M) und des grössten zulässigen mechanischen Widerstandsmomentes (W). Dabei ist die neutrale Axe parallel zur Schienenbasis, die Ausdehnung in den unteren und die Zusammendrückung in den oberen Fasern angenommen, ferner sind die Werthe der obigen Momente auf Schmiedeeisen bezogen und für dieses die Elasticitätsgränzwerthe bezüglich der Spannungen und Pressungen mit a und r bezeichnet.

Fig.	Bahn	Maße	T	M, W
Fig. 159.	Kaiser-Ferdinands-Nordbahn (anno 1836).	$h = 2\cdot159''$ $h'' = 1\cdot403$ $H = 3\cdot562$ $F = 3\cdot57\square''$	$T = 0\cdot099FH^2$ $= 4\cdot48$	$M = 0\cdot164aFH = 2\cdot08a$ $W = 0\cdot045\frac{a^2}{m}K$
Fig. 160.	Mailand-Monza-Bahn (anno 1837).	$h' = 2\cdot463''$ $h'' = 1\cdot537$ $H = 4\cdot000$ $F = 4\cdot39\square''$	$T = 0\cdot092FH^2$ $= 6\cdot46$	$M = 0\cdot150aFH = 2\cdot62a$ $W = 0\cdot040\frac{a^2}{m}K$
Fig. 161.	Lomb.-Venetian.-Bahn (anno 1839).	$h' = 2\cdot486''$ $h'' = 1\cdot764$ $H = 4\cdot250$ $F = 4\cdot71\square''$	$T = 0\cdot097FH^2$ $= 8\cdot24$	$M = 0\cdot166aFH = 3\cdot32a$ $W = 0\cdot047\frac{a^2}{m}K$
Fig. 162.	K. k. österr. Staatsbahn (anno 1842).	$h' = 2\cdot250''$ $h'' = 1\cdot500$ $H = 3\cdot750$ $F = 3\cdot87\square''$	$T = 0\cdot098FH^2$ $= 5\cdot32$	$M = 0\cdot164FH = 2\cdot37a$ $W = 0\cdot046\frac{a^2}{m}K$
Fig. 163.	Monza-Como-Bahn (anno 1846).	$h' = 2\cdot670''$ $h'' = 1\cdot692$ $H = 4\cdot362$ $F = 4\cdot49\square''$	$T = 0\cdot102FH^2$ $= 8\cdot71$	$M = 0\cdot167aFH = 3\cdot27a$ $W = 0\cdot045\frac{a}{m}K$

Fig. 164.

Wien-Gloggnitzer-Bahn (anno 1838).		
$h' = 1''{\cdot}495$ $h'' = 1{\cdot}880$ $H = 3{\cdot}375$ $F = 4{\cdot}76\square''$	$T = 0{\cdot}128 FH^2$ $= 6{\cdot}93$	$M = 0{\cdot}229 rFH = 3{\cdot}69 r$ $W = 0{\cdot}069 \frac{r^2}{m} K$

Fig. 165.

Ungarische Centralbahn (anno 1845).		
$h' = 1''{\cdot}535$ $h'' = 1{\cdot}965$ $H = 3{\cdot}500$ $F = 4{\cdot}89\square''$	$T = 0{\cdot}123 FH^2$ $= 7{\cdot}37$	$M = 0{\cdot}219 rFH = 3{\cdot}75 r$ $W = 0{\cdot}065 \frac{r^2}{m} K$

Fig. 166.

K. k. österr. Staatsbahn (Ausweichbahnen) (anno 1843).		
$h' = 1''{\cdot}596$ $h'' = 1{\cdot}779$ $H = 3{\cdot}375$ $F = 5{\cdot}05\square''$	$T = 0{\cdot}125 FH^2$ $= 7{\cdot}19$	$M = 0{\cdot}238 rFH = 4{\cdot}04 r$ $W = 0{\cdot}071 \frac{r^2}{m} K$

Fig. 167.

K. k. österr. Staatsbahn (anno 1847).		
$h' = 1''{\cdot}582$ $h'' = 1{\cdot}918$ $H = 3{\cdot}500$ $F = 5{\cdot}56\square''$	$T = 0{\cdot}119 FH^2$ $= 7{\cdot}95$	$M = 0{\cdot}217 rFH = 4{\cdot}15 r$ $W = 0{\cdot}065 \frac{r^2}{m} K$

Fig. 168.

K. k. öst. Staatsbahn über den Semmering (anno 1852).		
$h' = 2''{\cdot}050$ $h'' = 2{\cdot}450$ $H = 4{\cdot}500$ $F = 7{\cdot}97\square''$	$T = 0{\cdot}118 FH^2$ $= 19{\cdot}0$	$M = 0{\cdot}216 rFH = 7{\cdot}74 r$ $W = 0{\cdot}066 \frac{r^2}{m} K$

Neuere Schienen. Winkler. { Eisen 0.15 FH^2 / Stahl 0.12 $F.H^2$ }

Bei den ersten fünf Querschnitten ist die Erreichung der Elasticitätsgränze in den gespanntesten Fasern anzunehmen, weil hierbei h'' im Vergleiche zu h' so klein ist, dass in der Regel $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$ sein wird. Bei den letzten fünf Querschnitten tritt aber das Umgekehrte ein, indem bei diesen wegen $h'' > h'$ und $a > r$ offenbar $\frac{r}{h''} < \frac{a}{h'}$ und in Folge dessen die Elasticitätsgränze zuerst in den gepresstesten Fasern erreicht wird. Die zusammengestellten Zahlenwerthe geben Anlass zu interessanten Vergleichungen*).

Zweites Kapitel.

Von dem gefährlichen Querschnitte.

§. 124.

Ergänzende Bemerkungen zum §. 75. Die Erörterungen über die Lage des gefährlichen Querschnittes im §. 75 beschrän-

*) Die zur Zusammenstellung obiger Tabelle nöthigen Angaben sind theilweise der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1849 entnommen. Es wird bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass die in jener Zeitschrift gleichzeitig gelieferte Berechnung des Tragvermögens principiell unrichtig ist. Es werden nämlich daselbst zuerst die beiden Querschnittstheile ober- und unterhalb der neutralen Axe separat behandelt, die Trägheitsmomente dieser Theile in Bezug auf die neutrale Axe bestimmt, und die Berechnung so durchgeführt, dass das Tragmoment durch die Formel

$$M = a\left(\frac{t'}{h} + \frac{t''}{h''}\right)$$

ausgedrückt sein würde, wenn t' und t'' die den erwähnten Querschnittstheilen entsprechenden Trägheitsmomente vorstellen. Es ist aber $T = t' + t''$ daher auch das wahre Tragmoment,

$$\text{wenn } \frac{a}{h'} < \frac{r}{h''} \text{ ist,.. } M = \frac{aT}{h} = \frac{a(t' + t'')}{h'},$$

$$\text{wenn aber } \frac{r}{h''} < \frac{a}{h'} \text{ ist,.. } M = \frac{rT}{h''} = \frac{r(t' + t')}{h''}.$$

Nach dieser Erklärung bemerkt man, dass die erwähnte Berechnungsweise durchgehends zu grosse Resultate geben müsse und nur in dem einzigen Falle $h' = h''$ und $a = r$ richtig wäre.

ken sich auf solche Fälle, wo die Biegungscurve keinen Wendepunct besitzt. Unter dieser Beschränkung hat man dort gesehen, dass der gefährliche Querschnitt an jener Stelle des Prismas anzunehmen ist, wo das statische Moment der einwirkenden Kräfte (Rz) ein numerisches Maximum wird. Diese Regel genügt jedoch nicht mehr, wenn die erwähnte Beschränkung aufhört, und die Biegungscurve entweder einen oder mehrere Wendepuncte besitzt. Bekanntlich ist der Werth von Rz an solchen Wendepuncten $= 0$ und geht aus dem Positiven in das Negative über. Es sei sofort zur weiteren Untersuchung (Fig. 169) ein Träger von Kräften in Anspruch genommen, welche normal auf seine Längenaxe wirken, und es bestehe die Biegungscurve $\widehat{ab}$ aus den zwei entgegengesetzt gekrümmten Theilen $\widehat{ac}$ und $\widehat{bc}$, welche sich in dem Wendepuncte c vereinigen. In diesem Falle wird es in jedem der beiden Theile des Prismas eine schwächste Stelle geben. Es sind nämlich bezüglich des ersten Theiles $\widehat{ac}$ die statischen Kraftmomente Rz positiv, und die schwächste Stelle ist in jenem Querschnitte $m_1 n_1$ vorhanden, für welchen das Kraftmoment den grössten numerischen Werth $R_1 z_1$ annimmt. Hätte man es daher bloss mit diesem Theile des Prismas zu thun, so wäre offenbar $m_1 n_1$ als der gefährliche Querschnitt selbst anzusehen. Bezüglich des andern Theiles $\widehat{bc}$ hingegen sind die statischen Kraftmomente negativ, und es ist gleichfalls eine schwächste Stelle, nämlich in jenem Querschnitte $m_2 n_2$ vorhanden, wofür das Kraftmoment, abgesehen von dem negativen Zeichen, den grössten numerischen Werth $R_2 z_2$ hat. Hätte man es daher nur mit dem Theile $\widehat{bc}$ des Prismas zu thun, so wäre $m_2 n_2$ als der gefährliche Querschnitt anzusehen. Es leuchtet ein, dass in der That, wo beide Theile $\widehat{ac}$ und $\widehat{bc}$ gleichzeitig in Betracht gezogen werden müssen, der gefährliche Querschnitt entweder in $m_1 n_1$

Fig. 169.

oder in $m_2 n_2$ oder auch an beiden Orten zugleich liegen kann, und es erübrigt nur mehr zu entscheiden, ob das Eine oder das Andere eintritt. Zu diesem Behufe heisse man das Tragmoment des Querschnittes $m_1 n_1$, in welcher Stellung die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, ... M_1, und eben so das Tragmoment des Querschnittes $m_2 n_2$, in welcher Stellung gerade umgekehrt die unteren Fasern ausgedehnt und die oberen zusammengedrückt werden, ... M_2, und beachte Folgendes:

1. Ist der gefährliche Querschnitt in $m_1 n_1$ allein vorhanden, so muss das Kraftmoment daselbst gleich dem Tragmomente, also $M_1 = R_1 z_1$ sein. Da diessfalls in dem Querschnitte $m_2 n_2$ die Elasticitätsgränze noch nicht erreicht wird, und daher der numerische Werth des Kraftmomentes $R_2 z_2$ das Tragmoment des Querschnittes M_2 noch nicht erschöpfen kann, so muss ausserdem $M_2 > R_2 z_2$ sein. Man erhält sonach die Bedingung

$$M_1 : M_2 < R_1 z_1 : R_2 z_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (223).$$

2. Ist der gefährliche Querschnitt in $m_2 n_2$ allein vorhanden, so bekommt man analog, wie ad 1,

$M_1 > R_1 z_1$ und $M_2 = R_2 z_2$, daher in diesem Falle die Bedingung

$$M_1 : M_2 > R_1 z_1 : R_2 z_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (224).$$

3. Ist endlich der gefährliche Querschnitt in $m_1 n_1$ und in $m_2 n_2$ zugleich vorhanden, d. h. wird die Elasticitätsgränze in diesen beiden Querschnitten gleichzeitig erreicht, so hat man offenbar

$M_1 = R_1 z_1$ und $M_2 = R_2 z_2$, daher in diesem Falle die Bedingungsgleichung

$$M_1 : M_2 = R_1 z_1 : R_2 z_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (225).$$

Um daher die Lage des gefährlichen Querschnittes aufzufinden, ist nur das Verhältniss $R_1 z_1 : R_2 z_2$ mit dem Verhältnisse $M_1 : M_2$ zu vergleichen. Hierbei ist es übrigens nicht nothwendig, die absoluten Werthe der betreffenden Verhältnissglieder zu kennen. So wird man z. B. das Verhältniss der beiden Tragmomente $M_1 : M_2$ nach dem §. 81 finden können, wenn man berücksichtigt, dass diese Tragmomente mit entgegengesetzten Querschnittslagen correspondiren. Das

Tragmoment M_2 entspricht nämlich auch dem Querschnitte in $m_1 n_1$, wenn man denselben in die umgekehrte Lage bringt.

Was das Verhältniss $R_1 z_1 : R_2 z_2$ betrifft, so kann der diesem gleiche Werth $\frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2}$ oder $\varrho_2 : \varrho_1$ substituirt werden, wenn man die Krümmungshalbmesser an den betreffenden Stellen, nämlich $N_1 o_1 = \varrho_1$ und $N_2 o_2 = \varrho_2$ zu kennen in der Lage ist, und sich erinnert, dass in Gemässheit der Gleichung (46) das statische Kraftmoment mit dem reciproken Werthe des dazu gehörigen Krümmungshalbmessers der Längenaxe zu- und abnimmt.

In der Figur 169 ist zwar nur von Einem Wendepuncte der Biegungscurve die Rede gewesen. Die Behandlung bleibt jedoch dieselbe, wenn auch mehrere Wendepuncte vorhanden sind. Es bezeichnet nämlich stets $R_1 z_1$ den grössten numerischen Werth von allen positiven, und $R_2 z_2$ den grössten numerischen Werth von allen negativen Kraftmomenten. In solchen Fällen kann der gefährliche Querschnitt auch an mehr als 2 Stellen der Längenaxe vorhanden sein.

§. 125.

Besondere Regeln für die Lage des gefährlichen Querschnittes.

1. Ist $a = r$, so ist nach dem §. 81 $M_1 = M_2$, daher von den beiden Werthen $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$ der grössere massgebend. In diesem Falle liegt der gefährliche Querschnitt an jener Stelle, wo das Kraftmoment überhaupt den grössten numerischen Werth annimmt. Diese Regel ist unabhängig von der Querschnittsform, und kann z. B. für Schmiedeeisen angewendet werden, wenn die Grössen a und r als gleich gelten können*).

2. Liegt der Schwerpunct des Querschnittes in der halben Höhe, oder ist $h' = h''$, so hat man nach dem §. 81 gleichfalls $M_1 = M_2$. Auch in diesem Falle ist der grössere von den beiden Werthen $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$ entscheidend. Diese Regel ist unabhängig von der Materialgattung.

---

*) Da Navier allgemein $a = r$ voraussetzt, so ist nach seiner Lehre diese besondere Regel als eine allgemeine bezeichnet.



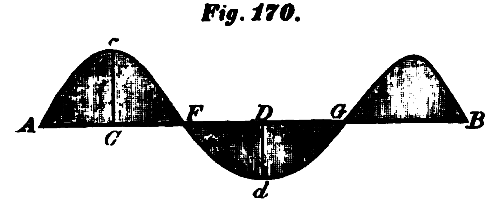
3. Ist $R_1 x_1 = R_2 x_2$ oder, was dasselbe bedeutet, $\varrho_1 = \varrho_2$, so gehört offenbar der kleinere Werth von den beiden Tragmomenten M_1 und M_2 zu dem gefährlichen Querschnitte.

4. Im Allgemeinen hängt die Lage des gefährlichen Querschnittes von der Querschnittsform, von der Art und Intensität der einwirkenden Kräfte und von der Materialgattung ab, aus welcher das Prisma besteht.

§. 126.

Graphische Darstellung zur Beurtheilung der Lage des gefährlichen Querschnittes. Die Werthe für die statischen Kraftmomente Rx sind mit der örtlichen Lage des betreffenden Querschnittes veränderlich. Betrachtet man diese Werthe als Ordinaten einer Curve, welche in den dazu gehörigen Puncten der Längenaxe normal auf diese letztere errichtet werden, und verzeichnet man diese Curve (Fig. 170), so erlangt man Kenntniss von der Form und Lage derselben ($AcdB$) in Bezug auf die Längenaxe AB. Da die reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser der Biegungscurve mit den satischen Kraftmomenten zu- und abnehmen, so leuchtet ein, dass die Ordinaten jener Curve $AcdB$ zugleich die gedachten reciproken Werthe repräsentiren können. Man bemerkt, dass die angeregte graphische Darstellung dieselbe ist, welche schon im ersten Hauptstücke für die dort betrachteten vier einfachsten Fälle in den §§. 60, 62, 64 und 66 mit Bezug auf die Figuren 55, 58, 63 und 68 besprochen wurde. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die positiven Ordinaten jener Curve nach abwärts und die negativen nach aufwärts aufzutragen, und an den Durchschnittspuncten der Curve mit der Längenaxe die Wendepuncte (F, G) der Biegungscurve vorhanden sind. Die beiden grössten Ordinaten unterhalb und oberhalb der Längenaxe, also beispielsweise Dd und Cc repräsentiren nunmehr die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente ($R_1 x_1$ und $R_2 x_2$).

Fig. 170.



Es muss daher in Gemässheit des §. 124 an einer

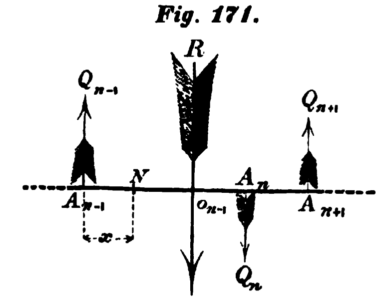
dieser Stellen der Längenaxe, wo jene Maximalwerthe vorhanden sind, also entweder in D oder in C, oder auch an beiden Stellen zugleich der gefährliche Querschnitt liegen.

Eine derartige graphische Darstellung führt nicht nur zur Kenntniss des Ortes oder der Orte, wo der gefährliche Querschnitt liegt, sondern dieselbe ist auch insoferne nützlich, als man dadurch von der Grösse der Ordinaten (als Repräsentanten der statischen Kraftmomente, so wie der reciproken Krümmungshalbmesser der Biegungscurve) einerseits auf die Anspruchsnahme des Trägers in den verschiedenen Querschnitten, anderseits auf die Gestalt der Biegungscurve schliessen kann.

§. 127.

Lage des gefährlichen Querschnittes in dem Falle, wenn mehrere Kräfte normal auf die Längenaxe des Trägers wirken, und von dem eigenen Gewichte desselben abstrahirt wird. Man betrachte von dem prismatischen Träger (Fig. 171) den Theil, auf welchen die Kräfte Q_{n-1}, Q_n und Q_{n+1} wirken, und darin den Querschnitt an einer beliebigen Stelle, z. B. in N. Die Resultirende aller in Bezug auf diesen Querschnitt einwirkenden Kräfte ist nach der Gleichung (27)

Fig. 171.



$$R = \Sigma Q_N - \Sigma Q_{n-1},$$

wenn, wie dort, N die Anzahl der sämmtlichen Kräfte bezeichnet. Ferner ist der Hebelsarm dieser Resultirenden

$$z = \overline{N o_{n-1}} = \overline{A_{n-1} o_{n-1}} - x,$$

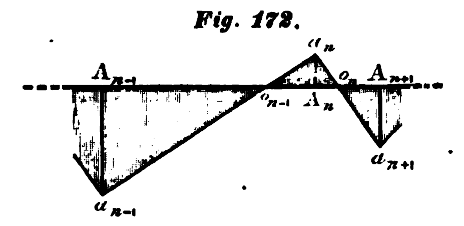
wenn $\overline{A_{n-1} N} = x$ gesetzt wird. Die Resultirende bleibt offenbar constant, so lange die Stelle N zwischen A_{n-1} und A_n fällt, während x variabel ist. Das statische Kraftmoment geht jetzt über in die Gleichung

$$Rz = R\left[\overline{A_{n-1} o_{n-1}} - x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226).$$

Nachdem diese Gleichung in Bezug auf x vom ersten Grade

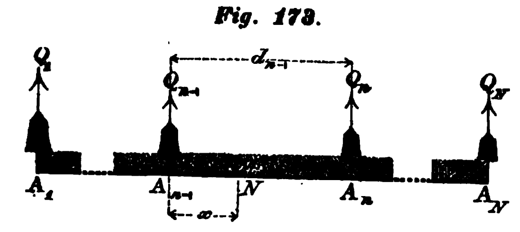
ist, so repräsentirt die im vorigen §. erwähnte Curve, für welche z die Abscissen und die Werthe von Rz die Ordinaten sind, zwischen A_{n-1} und A_n eine gerade Linie. Was aber bezüglich der Strecke $A_{n-1}A_n$ gefunden wurde, gilt offenbar der Hauptsache nach bezüglich jeder andern Strecke zwischen zwei Kraftangriffspuncten. Hieraus folgt, dass die Begränzung aller Ordinaten, welche in den verschiedenen Strecken der Längenaxe als Repräsentanten der statischen Kraftmomente vorkommen, eine aus Geraden zusammengesetzte gebrochene Linie $a_{n+1}a_na_{n-1}\ldots$ (Fig. 172) bildet, und der grösste numerische Werth für die positiven und für die negativen Ordinaten, also auch der gefährliche Querschnitt nur an einer solchen Stelle vorhanden sein kann, wo ein Kraftangriffspunct sich befindet. Diese Regel erleichtert wesentlich die Aufsuchung der numerischen Maximal-Werthe von Rz, weil man im Vorhinein weiss, dass es sich dabei nicht um solche Stellen der Längenaxe handelt, welche zwischen den Angriffspuncten der Kräfte liegen. Eine Ausnahme von dieser Regel tritt nur dann ein, wenn für den gefährlichen Querschnitt $R = o$ und $z = \infty$ wird. Auf diesen Fall wurde bereits im §. 49 ad 2 und im §. 52 ad 4 mit dem Beisatze aufmerksam gemacht, dass sodann in der ganzen Strecke, für welche $R = o$ ist, das Kraftmoment Rz constant, und die Biegungscurve ein Kreisbogen wird. In diesem Falle bleibt die Lage des gefährlichen Querschnittes unbestimmt, und derselbe kann an jeder Stelle der kreisförmigen Längenaxe angenommen werden, wenn von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt wird.

Fig. 172.



§. 128.

Lage des gefährlichen Querschnittes in dem Falle, wenn ausser einzelnen Kräften auch eine gleichförmig vertheilte Belastung der Länge nach vorhanden ist. Dieser Fall ist in der Fig. 173 anschaulich gemacht. Man



nehme analog, wie im vorigen §. N einzelne Kräfte an, bezeichne dieselben mit $\pm Q$, (je nachdem die Richtung nach ab- oder nach aufwärts gekehrt ist), und die Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Angriffspuncte mit d, beide Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern. Endlich sei die gleichförmig vertheilte Belastung per Längeneinheit $= q$. Für eine beliebig gewählte Stelle in N hat man sodann für das statische Kraftmoment

$$Rz = \pm Q_n (d_{n-1} - x) \pm Q_{n+1} (d_{n-1} + d_n - x) \pm \ldots$$
$$\ldots \pm Q_N (d_{n-1} + d_n + \ldots + d_{N-1} - x) + \tfrac{1}{2} q (d_{n-1} + d_n + \ldots + d_{N-1} - x)^2,$$

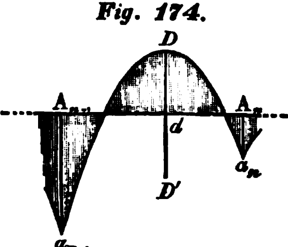
welcher Ausdruck die Form

$$Rz = A + Bx + \tfrac{1}{2} q x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

annimmt, wenn man nach x ordnet, und die Coefficienten von x^0 und x^1 beziehungsweise mit A und B bezeichnet.

Die Gleichung (127) ist in Beziehung auf x vom zweiten Grade, und hinsichtlich derselben kann Folgendes bemerkt werden:

1. Die Gleichung gehört zu einer Parabel $a_{n-1} D a_n$ (Fig. 174), deren Axe DD' normal auf die Längenaxe des Prismas gerichtet ist. Da ferner $\frac{d^2(A + Bx + \frac{1}{2} q x^2)}{dx^2} = q$ wesentlich positiv wird, so liegt der Scheitel der Parabel D am höchsten, und ihre Aeste laufen nach abwärts.



2. Zwischen je 2 unmittelbar auf einander folgenden Kraftangriffspuncten existirt eine besondere Parabel.

3. Der Parameter einer jeden dieser Parabeln ist $\frac{2}{q}$, also bloss abhängig von der gleichförmig vertheilten Belastung per Längeneinheit, woraus folgt, dass die Form aller Parabeln eine congruente ist, zwischen welchen Kraftangriffspuncten sie auch betrachtet werden. Die Parabeln erscheinen daher nur gegenseitig parallel verschoben,

und von denselben wird bald ein grösseres bald ein kleineres Stück benöthigt.

4. Die Werthe von A und B sind so lange constant, als es sich um eine gewisse zwischen zwei Kraftangriffspuncten liegende Strecke handelt, sie sind aber mit den verschiedenen Strecken veränderlich. Da nun diese Grössen A und B den Ort des betreffenden Parabelscheitels bestimmen, so ist die Lage dieses Letzteren in den verschiedenen Strecken verschieden.

5. In jeder Strecke zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Kraftangriffspuncten, z. B. zwischen A_{n-1} und A_n, ist im Allgemeinen der grösste numerische Werth der negativen Ordinaten $\overline{Dd}$ in der Richtung der Parabelaxe vorhanden; die grösste positive Ordinate aber in einem der beiden Kraftangriffspuncte A_{n-1} und A_n selbst. Man bemerkt zugleich, dass die Ordinate $\overline{Dd}$ eigentlich ein analytisches Minimum ist, und die Entfernung der beiden Wendepuncte in d halbirt. Uebrigens müssen nicht in jeder Strecke zwischen zwei Kraftangriffspuncten positive und negative Ordinaten, so wie Wendepuncte vorkommen, sondern es kann diess je nach den obwaltenden Umständen verschieden sein. Siehe die Figuren 175, 176 und 177. Es kann nämlich geschehen, dass nur positive, oder nur negative Ordinaten vorhanden sind, oder dass die Parabelaxe nicht mehr in das zu benützende Stück fällt. In dem letzteren Falle (Fig. 177) ist die grösste negative Ordinate gleichfalls an einem der Kraftangriffspuncte vorhanden.

Fig. 175.

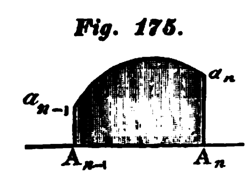


Fig. 176.

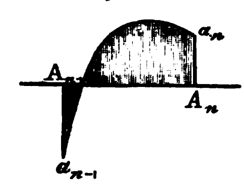
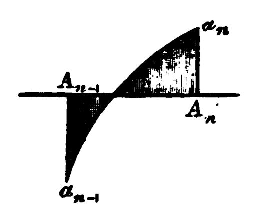


Fig. 177.



Der gefährliche Querschnitt fällt daher in eine solche Stelle, wo entweder eine von den Einzelkräften ihren Angriffspunct hat, oder, wo eine der Axen der fraglichen Parabeln die Längenaxe des Trägers durchschneidet.

Drittes Kapitel.

Ueber die zweckmässigsten Querschnittsformen.

§. 129.

Erklärung. Die Zweckmässigkeit der Form eines Querschnittes kann in verschiedenen Beziehungen verstanden werden, je nach der Absicht, die man zu erreichen anstrebt. So kann z. B. eine solche Querschnittsform unter sonst gleichen Umständen verlangt werden, dass die **Biegung am kleinsten**, oder, dass das **Tragvermögen am grössten**, oder aber, dass das **mechanische Widerstandsmoment am grössten wird.** In der Praxis nennnt man eine Querschnittsform zweckmässiger, als eine zweite, wenn die gleiche Absicht mit einem kleineren Materialaufwande, oder umgekehrt, wenn mit dem gleichen Materialaufwande der angestrebte Zweck in einem höheren Grade erreicht werden kann. In der Regel beabsichtigt man das grösste Tragvermögen, was auch zumeist die Hauptsache ist. Zur Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit jedoch wird im Nachstehenden die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen in jeder der oben erwähnten drei Beziehungen abgesondert betrachtet.

I. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn seine Biegung bei einer die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung unter sonst gleichen Umständen möglichst klein werden soll.

§. 130.

Hauptsatz. Die Biegung eines Trägers, welche durch eine gewisse die Sicherheitsgränzen nicht überschreitende Belastung hervorgebracht wird, steht unter sonst gleichen Umständen zufolge des §. 53 im umgekehrten Verhältnisse zu dem Trägheitsmomente T des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe. **Die fragliche Biegung wird daher desto kleiner, je grösser jenes Trägheitsmoment ist, wesshalb das Maximum des-**

selben angestrebt werden muss, wenn jene Biegung auf ein Minimum gebracht werden soll.

§. 131.

Folgerung. Um die Bedingungen zu erfahren, unter welchen das Trägheitsmoment T des Querschnittes in Bezug auf seine neutrale Axe den Umständen entsprechend möglichst gross wird, erinnere man sich, dass dasselbe nach dem §. 54 auf die Form cFH^2 gebracht werden kann, wenn F den Flächenraum des Querschnittes, H seine Höhe normal auf die neutrale Axe und c einen von der Querschnittsform abhängigen Coefficienten bezeichnet. Der Werth vom cFH^2 wächst daher bei einem gegebenen Flächenraume F mit den Factoren H und c, wesshalb man zur möglichsten Verminderung der fraglichen Biegung des Trägers die Querschnittsform so zu wählen hat, dass die Werthe von H und c nach Zulässigkeit gross werden.

§. 132.

Zweckmässigste Höhe H. Die Wahl der Höhe eines Querschnittes ist nicht ganz beliebig. In der Regel ist für dieselbe nur ein Spielraum gestattet, innerhalb welchem man die Wahl zu treffen hat. Von der obigen Rücksicht allein geleitet, würde es am zweckmässigsten sein, von den zulässigen Höhen die grösste auszuwählen. Allein es machen sich auch andere Rücksichten geltend, welche die Wahl von zu grossen Höhendimensionen beschränken. Man muss nämlich beachten, dass bei einem gegebenen Flächenraume mit dem Wachsen der Höhendimension die Breitendimension abnimmt, und es aus diesem Grunde geschehen kann, dass der Träger beim Eintritte einer Biegung nach der Seite ausweicht. In diesem Falle würden die Bedingungen nicht mehr stattfinden, welche gleich Anfangs im §. 41 eingeführt worden sind, indem der Querschnitt nach der Biegung nicht mehr die vor derselben vorhandene Form hätte, wodurch der Bestand des Trägers gefährdet wäre. Man wird also die Vergrösserung der Höhe des Querschnittes auf Kosten seiner Breite nur bis zu einem gewissen Grade ohne Gefahr veranlassen können. Wie weit das Verhältniss der Breite zur Höhe bei einer Querschnittsform getrieben werden kann, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben. Es hängt diess von mancherlei Umständen, insbesondere aber

von der Querschnittsform und der Materialgattung ab. Vorzüglich kann man durch Rippen, Verstrebungen etc. beitragen, um jene Bedingungen selbst bei ziemlich grellen Verhältnissen der Breite zur Höhe des Querschnittes in genügender Weise zu erfüllen. Uebrigens wird eine solche Anordnung nur dann von einem Vortheile sein, wenn die Biegung des Trägers bloss in der Richtung der Höhe, als der grösseren Dimension des Querschnittes stattfindet. Wenn aber die Biegung nach mehreren, oder, wie bei einer rotirenden Welle nach allen Richtungen vorkommen kann, so wird man von der einseitigen Vergrösserung einer Dimension auf Kosten der anderen keinen Gebrauch machen dürfen, sondern vielmehr darauf zu achten haben, dass die Steifigkeit des Trägers nach allen in Betracht kommenden Richtungen eine angemessene werde. Bei rotirenden Wellen finden z. B. regelmässige Polygone als Querschnitte eine zweckmässige Anwendung, indem nach dem §. 120 ad 5 die Biegung solcher Wellen in jeder Stellung des rotirenden Querschnittes unverändert bleibt. Insbesondere ist nach der Tabelle im § 122 die Steifigkeit einer solchen Welle desto grösser, je weniger Seiten das Polygon hat.

§. 133.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der möglichsten Vergrösserung des Trägheitsmomentes T. Ist man über die Höhe des Querschnittes einig, so kann man das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf seine neutrale Axe desto mehr steigern, je weiter die Querschnittstheile von dieser Axe entfernt werden. Es leuchtet ein, dass das Maximum des Trägheitsmomentes erhalten würde, wenn man im Stande wäre, jedes Paar der Flächenelemente an den Enden der Höhe A und B (Fig. 178) anzubringen, und auf diese Weise den Trägerquerschnitt in 2 gerade Linien $A'A''$ und $B'B''$ zu drängen. Dieser Fall ist allerdings ein imaginärer, doch kann er dazu dienen, die Anhaltspuncte zu finden, an welche die Bedingungen zu knüpfen sind, die bei der Vertheilung des Flächenraumes in einem Trägerquerschnitte erfüllt werden sollen. In dieser Absicht bezeichne man die ganze Querschnittsfläche mit F, und stelle sich vor, dass

Fig. 178.

A′ A″ A C′ C″ C H h′ h″ B′ B″ B

davon der Theil f' in $\overline{A'A''}$, der Theil f'' aber in $\overline{B'B''}$ concentrirt sei. Man ziehe ferner durch den Schwerpunct der beiden Querschnittstheile die neutrale Axe $\overline{C'C''}$, und nenne die Abstände derselben von den beiden Enden der Höhe h' und h'', so dass die ganze Querschnittshöhe $H = h' + h''$ ist. Es entsteht nunmehr die Frage, welches Verhältniss zwischen f' und f'' das **zweckmässigste** ist, wenn unter sonst gleichen Umständen die **kleinste** Biegung entstehen soll. Zur Beantwortung dieser Frage beachte man, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen

$$f'h' = f''h'', \; Fh' = f''H \text{ und } Fh'' = f'H$$

sattfinden, und das Trägheitsmoment T der beiden Querschnittstheile f' und f'' in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{C'C''}$ den Werth

$$T = f'h'^2 + f''h''^2 = \frac{Fh'^2h''}{H} + \frac{Fh'h''^2}{H} = Fh'h''\left(\frac{h'+h''}{H}\right)$$

oder

$$T = h'h''F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

annimmt, wenn die aus den obigen Gleichungen hervorgehenden Werthe $f' = \frac{Fh''}{H}$ und $f'' = \frac{Fh'}{H}$ berücksichtigt werden.

Der Gleichung (228) zufolge ist das Trägheitsmoment T mit h' und h'', also auch mit f' und f'' veränderlich, und zur Erreichung seines **grössten** Werthes ist das Product $h'h''$ auf ein **Maximum** zu bringen. Dieser Anforderung wird, weil $h' + h'' = H$ eine constante Grösse ist, durch die Bedingung

$$h' = h'' = \tfrac{1}{2}H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229),$$

entsprochen, wornach die neutrale Axe durch die halbe Höhe zu gehen hat. Hiedurch erhält man

$$f' = f'' = \tfrac{1}{2}F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

und den **Maximalwerth** des Trägheitsmomentes

$$T = \tfrac{1}{4}FH^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231).$$

Aus diesen Resultaten folgt, dass die Biegung eines Trägers bei einer und derselben die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung desto kleiner wird,

1. **je weiter die einzelnen Querschnittstheile von der neutralen Axe entfernt liegen, und**

2. **je näher zugleich die ganze Querschnittsfläche in zwei gleiche Theile getheilt wird.**

Bezüglich des ersten Punctes sind jedoch die Gränzen nicht aus den Augen zu lassen, welche sich für das Vertheilen jeder einzelnen Querschnittsfläche f' und f'' vom practischen Standpuncte aus ergeben.

Die Gleichung (231) zeigt, dass für den analytisch grössten Werth des Trägheitsmomentes $T = c F H^2$ der Coefficient c zwar auf $\frac{1}{4}$ gesteigert, aber in der Anwendung stets kleiner sein wird, weil jener Maximalwerth von T nicht zu erreichen ist.

Im Nachfolgenden werden mehrere der vorzüglichsten Querschnitte betrachtet, welche in der untersuchten Beziehung als zweckmässig gelten können.

Anmerkuug. Die angegebene Vertheilung der Querschnittsfläche correspondirt nur mit der kleinsten Biegung, welche eine und dieselbe Belastung ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen unter sonst gleichen Umständen hervorbringen würde. Daraus ist keineswegs zu schliessen, dass bei dieser Vertheilung auch das grösste Tragvermögen erreicht werden kann; man wird vielmehr im §. 145 sehen, dass zur Erreichung dieser letzteren Absicht das Vertheilungsgesetz ein anderes ist.

§. 134.

Querschnittsform Fig. 179. Dieselbe gehört zu den vorzüglich zweckmässigen Querschnittsformen. Nach der Relation (166) ist das betreffende Trägheitsmoment

Fig. 179.

Fig. 180.

$$T = \frac{(1+n+n^2)}{12} F H^2,$$

wenn man $\frac{H'}{H} = n$ und den Flächenraum $F = B(H - H') = (1 - n)\, B H$ setzt.

Da n immer kleiner als die Einheit ist, so kann der Coefficient von FH^2, nämlich $\frac{(1+n+n^2)}{12}$ die Zahl $\frac{1}{4}$ nie erreichen, was mit der Bemerkung im vorigen §. übereinstimmt.

Vergleicht man diesen Querschnitt mit einem vollen Rechtecke (Fig. 180), welches dieselbe Breite B und denselben Flächenraum F hat, so dass $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ef} = 2\alpha$ ist, und nennt man das Trägheitsmoment dieses Rechteckes t, so erhält man nach der Formel (51)

$$t = \frac{1}{12} F (2\alpha)^2 = \frac{1}{3} F \alpha^2,$$

also durch Vergleichung

$$t : T = \alpha^2 : \frac{(1+n+n^2)}{4} H.$$

Setzt man noch das Verhältniss $\frac{2a}{H} = x$, und berücksichtigt zugleich, dass sodann $(H - H') = 2a$, $H = \frac{2a}{x}$, $H' = 2a\left(\frac{1-x}{x}\right)$ und $n = 1 - x$ wird, so geht die vorige Proportion in folgende über:

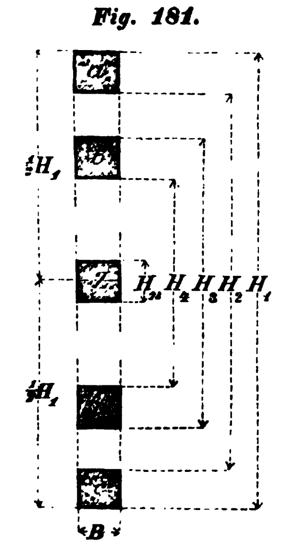
$$t : T = x^2 : (3 - 3x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232).$$

Insbesondere ist

für $x = 1$, $a = 0{\cdot}50\,H$ und $t : T = 1 : 1$
„ $x = 0{\cdot}9$, $a = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}370$
„ $x = 0{\cdot}8$, $a = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}937$
„ $x = 0{\cdot}7$, $a = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}837$
„ $x = 0{\cdot}6$, $a = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 4{\cdot}333$
„ $x = 0{\cdot}5$ $a = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 7$
„ $x = 0{\cdot}4$, $a = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 12{\cdot}25$
„ $x = 0{\cdot}3$, $a = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 24{\cdot}333$.

Das Verhältniss (232) gestaltet sich für die Querschnittsform (Fig. 179) desto günstiger, d. h. die Steifigkeit des Trägers wird desto bedeutender, je kleiner x, also je grösser der leere Raum zwischen den vollen Querschnittstheilen im Vergleiche zu diesen selbst ist. Die Vergrösserung des leeren Raumes hat indessen in jedem besonderen Falle eine practische Gränze, welche an die Bedingungen im §. 41 gebunden, und der Bemerkung im §. 132 gemäss je nach den Umständen verschieden ist.

Fig. 181.



§. 135.

Querschnittsform Fig. 181. Diese Querschnittsform ist ebenfalls zweckmässig. Man nehme an, dass dieselbe n volle Flächentheile a, b, c, d, ... z und $(n-1)$ leere Zwischenräume enthalte, ferner die ganze Querschnittsform in Bezug auf die neutrale Axe symmetrisch gebildet sei, dass also letztere die Höhe H_1 halbire. Hiernach und mit Rücksicht auf die cotirten Dimensionen erhält man den Flächenraum

$$F = B(H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \ldots \pm H_n). \quad . \quad (233),$$

und das Trägheitsmoment

$$T = \tfrac{1}{12} B (H_1^3 - H_2^3 + H_3^3 - H_4^3 + \ldots \pm H_n^3). \quad . \quad (234),$$

in welchen n gliederigen Reihen das letzte Glied positiv oder negativ wird, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Diese allgemeinen Ausdrücke sind leicht zu gebrauchen. Sie lassen sich in besonderen Fällen noch einfacher darstellen. Haben z. B. alle vollen Rechtecke $a, b, c, d, \ldots z$ und eben so alle leeren Zwischenräume die gleiche Höhe α, so erhält man insbesondere

$$H_n = \alpha,\ H_{n-1} = 3\alpha,\ H_{n-2} = 5\alpha, \ldots H_2 = (2n-3)\alpha$$

und $H_1 = (2n-1)\alpha$, und durch Substitution dieser Werthe

$$T = \tfrac{1}{12} B \alpha^3 [(2n-1)^3 - (2n-3)^3 + \ldots \pm 1],$$

also auch wegen

$$F = nB\alpha,\ \alpha = \frac{H_1}{2n-1},\ B = \frac{F}{n\alpha} \text{ und}$$

$$B\alpha^3 = \frac{F\alpha^2}{n} = \frac{FH_1^2}{n(2n-1)^2},$$

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[(2n-1)^3 - (2n-3)^3 + \ldots \pm 1] FH_1^2.$$

Ist n eine ungerade Zahl, so muss das letzte Glied in der Klammer positiv genommen werden, und es wird

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[+1 - 3^3 + 5^3 - \ldots + (2n-1)^3];$$

ist aber n eine gerade Zahl, daher jenes Glied negativ zu nehmen, so wird

$$T = \frac{1}{12n(2n-1)^2}[-1 + 3^3 - 5^3 + \ldots + (2n-1)^3].$$

In beiden Fällen reducirt sich T auf dieselbe Weise. Es kann nämlich allgemein für jeden Werth von n gesetzt werden

$$T = \frac{(4n^2-3)}{12(2n-1)^2} FH_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (235)\,^{*)}.$$

---

*) Bei dieser Reduction ist zu beachten, dass $1 + 5^3 + 9^3 + \ldots$ und $3^3 + 7^3 + 11^3 + \ldots$ arithmetische Reihen vom 3. Range sind, und das summatorische Glied für die erste Reihe auf die Form $3t - 2t^2 - 16t^3 + 16t^4$, für die zweite Reihe aber auf die Form $-3t - 2t^2 + 16t^3 + 16t^4$ gebracht werden kann, wenn t die jeweilige Gliederzahl bezeichnet.

Dieser Formel gemäss wird z. B.

für $n=1$, $T=0{\cdot}083\,FH_1^2$	für $n=6$, $T=0{\cdot}097\,FH_1^2$
„ $n=2$, $T=0{\cdot}120\,FH_1^2$	„ $n=7$, $T=0{\cdot}095\,FH_1^2$
„ $n=3$, $T=0{\cdot}110\,FH_1^2$	„ $n=8$, $T=0{\cdot}094\,FH_1^2$
„ $n=4$, $T=0{\cdot}104\,FH_1^2$	„ $n=9$, $T=0{\cdot}093\,FH_1^2$
„ $n=5$, $T=0{\cdot}100\,FH_1^2$	„ $n=10$, $T=0{\cdot}092\,FH_1^2$.

Der grösste Werth von T entsteht für $n=2$ *), nämlich in dem Falle, der im vorhergehenden §. behandelt wurde, welcher sosomit die zweckmässigste Anordnung bei der hier untersuchten Querschnittsform angibt. Mit der Zunahme von n vermindert sich das Trägheitsmoment und nähert sich dem Werthe $\frac{1}{12}FH_1^2$, welcher mit $n=\infty$ correspondirt.

§. 136.

⌶förmiger Querschnitt. Auf diese Querschnittsform wurde schon mittelst der Figuren 99, 100, 103 und 124 aufmerksam gemacht, und die betreffenden Formeln für das Trägheitsmoment T sind aus der Zusammenstellung im §. 116 zu entnehmen. Wenn man bloss der **Biegung** des mit einem solchen Querschnitte versehenen Trägers bei einer gewissen die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung die Aufmerksamkeit zuwendet, so erscheint es mit Rücksicht auf den §. 133 vortheilhaft, der ⌶ Form **gleiche** Flanschen zu geben. Diese Form wird desto zweckmässiger sein, je grösser die beiden Flanschen im Vergleiche zu dem sie verbindenden Mittelstücke sind, oder mit anderen Worten, je näher man dabei der im §. 134 betrachteten Form (Fig. 179) kommt, wo das Mittelstück gänzlich fehlt, vorausgesetzt, dass die Biegung nur in der Richtung der Höhe betrachtet wird, und ein Ausweichen der Querschnittstheile nach der Seite nicht zu besorgen ist. Hieraus

---

*) Eigentlich wird T ein analytisches Maximum, wenn

$$\frac{d\left[\frac{4n^2-3}{(2n-1)^3}\right]}{dn}=\frac{8n\,(2n-1)^2-4(4n^2-3)\,(2n-1)}{(2n-1)^4}=\frac{4(3-2n)}{(2n-1)^3}=0,$$

d. h. $n=1\frac{1}{2}$ ist, wodurch $T=\frac{1}{8}FH_1^2=0{\cdot}125\,FH_1^2$ würde.

Da aber n der Natur der Sache nach eine ganze Zahl ist, so erklärt es sich, warum oben das Maximum für $n=2$ gefunden wurde.

folgt, dass der Coefficient von FH^2 in dem Ausdrucke für das Trägheitsmoment der Zahl $\frac{1}{4}$ zuweilen nahe kommen kann. Auch

Fig. 182.

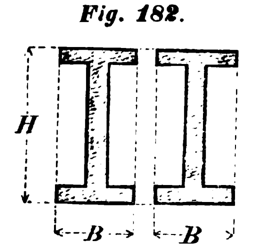
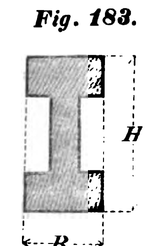


Fig. 183.



leuchtet ein, dass, wenn man einen gegebenen Flächeninhalt in zwei oder mehrere I Formen (Fig. 182) von der Breite *B* und der Höhe *H* zertheilt, mit diesen Theilen zusammen eine grössere Steifigkeit erreicht werden kann, als wenn man denselben Flächenraum in eine einzige I Form (Fig. 183) von derselben Breite und Höhe bringt, wenn nur im ersten Falle auf die Vermehrung des Coefficienten im Ausdrucke für das Trägheitsmoment nach Zulässigkeit hingewirkt wird. Den zertheilten Querschnitt (Fig. 182) kann auch der zusammenhängende Querschnitt (Fig. 184) ersetzen,

Fig. 184

Fig. 185.

welcher, wie man sieht, zwei verticale Verbindungswände hat. Durch die Fortsetzung dieser Betrachtungsweise gelangt man auf die zellenförmigen Querschnitte; denn man erkennt, das die Anordnung von mehreren solchen Verticalwänden (Fig. 185) noch zweckmässiger ist, wenn nur diese Wände nicht zu stark gemacht werden, auch gegen die Vervielfältigung der Breite *B* kein Hinderniss im Wege steht, und überhaupt der Querschnitt in seiner Form erhalten werden kann.

§. 137.

T förmiger Querschnitt. Auf diesen Querschnitt hat man bereits mittelst der Figuren 101 und 125 aufmerksam gemacht. Derselbe ist gleichfalls unter gewissen Bedingungen zweckmässig. Un-

tersucht man nämlich die dazu gehörige Formel (187) für das Trägheitsmoment eines solchen Querschnittes

$$T = \frac{4(1-mn^2)(1-mn) - 3(1-mn^2)^2}{12(1-mn)^2} F H^2,$$

so überzeugt man sich, dass der mit FH^2 zu multiplicirende Coefficient, wenn auch nicht immer, so doch bei gewissen Formverhältnissen grösser als $\frac{1}{12}$, also ein solcher Querschnitt vortheilhafter als ein Rechteck werden kann. Es entsteht desshalb die Frage, welche Verhältnisse bei ┬ förmigen Querschnitten zur möglichsten Verminderung der Biegung des Trägers unter sonst gleichen Umständen am zweckmässigsten sind.

Um diese Frage zu beantworten, nehme man an, dass für die ┬ Form die Fläche F, die grösste Höhe H und die grösste Breite B gegeben seien. In diesem Falle hat man B, H und F als constant, hingegen die Verhältnisszahlen m und n als variabel anzusehen und sofort zu untersuchen, für welche Werthe dieser letzteren das Trägheitsmoment T ein Maximum wird. Zu diesem Behufe beachte man, dass wegen $F = (1 - mn) BH$ zunächst $mn = 1 - \frac{F}{BH}$, also eine constante Grösse wird. Bezeichnet man diese mit γ, d. i. $mn = \gamma$, so reducirt sich der Ausdruck für das Trägheitsmoment auf

$$T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2}{12(1-\gamma)^2} F H^2.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$d\left[4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2\right] = 2\gamma\left[3 - (4-\gamma)n\right] = 0,$$

welcher Bedingung $n = \frac{3}{(4-\gamma)}$ entspricht. Hiernach erhält man

$$\left.\begin{array}{l} n = \frac{3}{(4-\gamma)} = \frac{3}{\left(3 + \frac{F}{BH}\right)} \quad \ldots\ldots \\ \text{und } m = \frac{\gamma(4-\gamma)}{3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{F}{BH}\right)\left(3 + \frac{F}{BH}\right) \quad . \end{array}\right\} \quad (236),$$

endlich für den Maximal-Werth des Trägheitsmomentes selbst

$$T = \frac{1}{3(4-\gamma)} F H^2 = \frac{1}{3\left(3 + \frac{F}{BH}\right)} F H^2 \quad \ldots \quad (237).$$

Um die Anwendung dieser Resultate durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man an, dass der Flächenraum $F = 8\square''$ in eine ┬ Form,

deren grösste Höhe $H = 6''$ und deren grösste Breite $B = 4''$ beträgt, unter der Bedingung zu bringen wäre, dass der Träger bei einer gegebenen, die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung die kleinste Biegung erleiden soll.

Für diesen Fall hat man

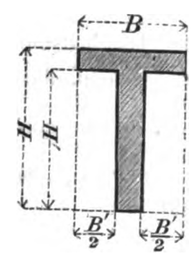
$B = 4''$	$\frac{F}{BH} = \frac{1}{3}$	
$H = 6''$	$\gamma = \frac{2}{3}$	und $T = \frac{1}{10} F H^2 = 28{\cdot}8$,
$BH = 24 \square''$	$n = 0{\cdot}9$	
$F = 8 \square''$	$m = \frac{20}{27}$	

und es ist in dem betreffenden Querschnitte (Fig. 186)

$$B' = m B = 2\tfrac{26}{27}'', \quad H' = n H = 5{\cdot}4'',$$

daher die Dicke der horizontalen Wand . . . $(H - H') = 0{\cdot}6''$,
und jene der verticalen Wand . . . . $(B - B') = 1\frac{1}{27}''$.

Fig. 186.



Diese Verhältnisse sind so lange, als B, H und F die angenommenen Werthe beibehalten, die günstigsten in Bezug auf die Steifigkeit des Trägers nach der Höhenrichtung.

Aus der Bildung der Formel (237) für T bemerkt man, dass der Coefficient von FH^2, nämlich $\frac{1}{8\left(3 + \frac{F}{BH}\right)}$, desto grösser wird, je kleiner die Fläche F im Vergleiche zu dem umgeschriebenen Rechtecke BH ist, dass aber dieser Coefficient den Werth $\frac{1}{8}$ niemals erreichen kann, weil sonst der unmögliche Fall $F = o$ in Betracht käme. Indessen kann bei kleinen Wanddicken der fragliche Coefficient näherungsweise mit $\frac{1}{9}$ angenommen werden. Diese Bemerkung zeigt übereinstimmend mit den Betrachtungen im §. 133, dass einem Träger mit dem I förmigen Querschnitte eine grössere Steifigkeit verliehen werden kann, als mit dem T förmigen, indem der Gränzwerth des Coefficienten von FH^2 bei dem Trägheitsmomente der T Form nur $\frac{1}{9}$ ist, während derselbe bei der I Form $\frac{1}{4}$ beträgt.

Aehnlich wie bei der I Form, wird auch die Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes F in mehrere gleiche T Formen vortheilhafter sein, als wenn derselbe in eine einzige solche Form gebracht würde, wenn nur auf die günstigsten Formverhältnisse nach den Re-

lationen (236) Bedacht genommen wird. So z. B. kann man mit den beiden Querschnitten (Fig. 187) zusammen eine grössere Steifigkeit erreichen, als mit dem Querschnitte (Fig. 186), obgleich der verwendete Flächeninhalt in beiden Fällen derselbe ist. Die beiden Querschnitte (Fig. 187) enthalten nämlich jeder 4□'', und die Formverhältnisse sind nach den Gleichungen (236) bestimmt, welche $n = \frac{18}{19}$, $m = \frac{95}{108}$, $H' = 5\frac{13}{19}''$, $B' = 3\frac{14}{27}''$, $(B - B') = \frac{13}{27}''$ und $(H - H') = \frac{6}{19}''$ ergeben. Wirklich findet man in diesem Falle für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes den Werth $\frac{1}{3(3 + \frac{4}{24})} = \frac{2}{19}$, welcher den früheren von $\frac{1}{10}$ für die Fig. 186 übersteigt.

Fig. 187.

Solche Querschnitte, wie in der Fig. 187, können auch zusammenhängend, wie in der Fig. 188, construirt werden, und man

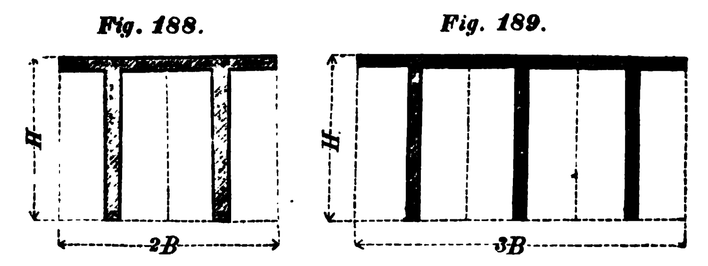


Fig. 188. *Fig. 189.*

kann durch eine weitere Vertheilung des gegebenen Flächenraumes wieder zu dem im vorigen §. bemerkten Resultate gelangen, dass die Anwendung von mehreren verticalen Wänden (Fig. 189) vortheilhaft erscheint, wenn bei der gegebenen Höhe H die Vervielfältigung der zu einer Wand gehörigen Breite B zulässig ist, und die Wanddicken im Einklange mit den Relationen (236) bestimmt werden. Dabei wird der gegebene Flächenraum F in so viele gleiche ⊤ Formen getheilt, als verticale Wände vorhanden sind, deren Dicke mit der Anzahl derselben abnimmt.

Bei der Benützung der Formeln (236) erhält man im Allgemeinen ungleiche Werthe für $(H - H')$ und $(B - B')$, also auch un-

gleiche Dicken für die horizontalen und verticalen Wände. Denn es ist wegen

$$H' = nH,\quad B' = mB,\quad n = \frac{3}{(4-\gamma)} \text{ und } m = \frac{\gamma(4-\gamma)}{3}$$

zunächst

$$(H - H') = H(1 - n) = \left(\frac{1-\gamma}{4-\gamma}\right) H$$

und

$$(B - B') = B(1 - m) = \frac{(1-\gamma)(3-\gamma)}{3} B,$$

folglich

$$(H - H') : (B - B') = \frac{H}{(4-\gamma)} : \left(\frac{3-\gamma}{3}\right) B,$$

und hiernach

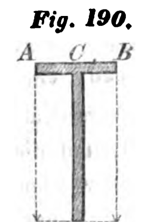
$$\frac{(H-H')}{H} : \frac{(B-B')}{B} = 3 : (3-\gamma)(4-\gamma) \quad . \quad . \quad (238).$$

Verlangt man jedoch, dass die Wanddicken $(H-H')$ und $(B-B')$ einander gleich werden, so muss zwischen B und H die Relation

$$B : H = 3 : (3-\gamma)(4-\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad (239),$$

daher für jede gegebene Höhe H eine gewisse Breite vorhanden sein. Da nun die zulässigen Werthe von γ zwischen 0 und 1 liegen, so folgt, dass dieses Verhältniss stets zwischen die Gränzen 1 : 4 und 1 : 2 fällt, von welchen jedoch nur die erstere, nicht aber auch die letztere erreicht werden kann. Man darf indessen das Verhältniss $B : H = 1 : 2$ näherungsweise bei kleinen Wanddicken gelten lassen. Will man z. B. (Fig. 190) eine ┬ Form von einer gegebenen Höhe $\overline{CD}$ aus dünnen Wänden von gleicher Stärke so construiren, dass die Biegung des Trägers im Vergleiche zu dem Materialaufwande am kleinsten wird, so erreicht man diese Absicht hinreichend genau, wenn man dem obigen Verhältnisse zufolge $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ macht. Verbindet man zwei solche Querschnitte, und rückt die verticalen Wände einmal aneinander, das andere Mal aber auseinander, so erhält man zwei in demselben Sinne zweckmässige Querschnitte (Fig. 191 und 192).

Fig. 190.



Bei dem ersten (Fig. 191), wo die beiden verticalen Wände an einander zu befestigen sind, bekommt man eine ┬ Form, bei welcher

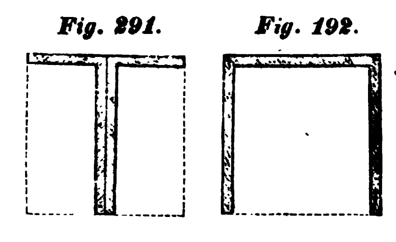


Fig. 191. *Fig. 192.*

das horizontale Stück eben so lang, jedoch nur halb so dick ist, wie das verticale Doppelstück. Ein solcher Querschnitt entsteht z. B. durch die Verbindung zweier Winkeleisen. Bei dem 2. Querschnitte (Fig. 192) sind drei gleiche Wände vorhanden, so dass der Umfang aus drei Seiten eines Quadrates gebildet ist. Für beide Querschnittsformen ist das Trägheitsmoment, eben so wie für die Fig. 190, näherungsweise

$$T = \frac{1}{9} F H^2,$$

wenn F den Flächenraum des Querschnittes und H seine Höhe bezeichnet.

Bei allen in diesem §. besprochenen Anordnungen dürfen jedoch die Dicken der Wände im Vergleiche zu den anderen Dimensionen des Querschnittes nicht zu klein werden; denn man muss zugleich erwägen, ob der gewählte Querschnitt sich auch in seiner Form erhalten lasse.

§. 138.

Röhrenquerschnitte. Diese sind gleichfalls zweckmässig. Auf solche Querschnitte hat man bereits mittelst der Figuren 102, 119, 120, 130 und 131 aufmerksam gemacht. Auch führten die Schlussfolgerungen in dem §. 136 auf ähnliche Formen (Fig. 184, 185).

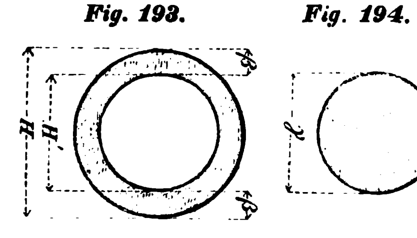


Fig. 193. *Fig. 194.*

Für cylindrische Röhren insbesondere wird nach der Gleichung (181) das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnittes (Fig. 193).

$$T = \frac{1}{16}(1 + n^2) F H^2,$$

wenn $n = \frac{H'}{H}$ und der Flächenraum

$$F = (H^2 - H'^2)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(1 - n^2) H^2 \text{ ist.}$$

Vergleicht man diesen Querschnitt mit einem vollen Kreise von gleichem Flächenraume (Fig. 194), und nennt man das Trägheitsmoment desselben t, so wie seinen Durchmesser γ, so ist $F = \frac{\pi}{4}\gamma^2$, daher $\gamma^2 = (1 - n^2) H^2$ und nach der Formel (53)

$$t = \tfrac{1}{16} F \gamma^2 = \tfrac{1}{16}(1 - n^2) F H^2.$$

Demgemäss erhält man für das Verhältniss zwischen t und T

$$t : T = (1 - n^2) : (1 + n^2).$$

Um noch die Dicke der Röhrenwand einzuführen, bezeichne man dieselbe mit β, und setze das Verhältniss $\frac{2\beta}{H} = x$. Hiernach wird $H = \frac{2\beta}{x}$, $H' = 2\beta\left(\frac{1-x}{x}\right)$ und $n = (1 - x)$, und es geht die vorige Proportion in folgende über:

$$t : T = (2x - x^2) : (2 - 2x + x^2) \quad . \quad (240).$$

Insbesondere wird

für $x = 1$, $\beta = 0{\cdot}50\,H$ und $t : T = 1 : 1$,
„ $x = 0{\cdot}9$, $\beta = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}020$,
„ $x = 0{\cdot}8$, $\beta = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}084$,
„ $x = 0{\cdot}7$, $\beta = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}198$,
„ $x = 0{\cdot}6$, $\beta = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}381$,
„ $x = 0{\cdot}5$, $\beta = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}667$,
„ $x = 0{\cdot}4$, $\beta = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}125$,
„ $x = 0{\cdot}3$, $\beta = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}921$,
„ $x = 0{\cdot}2$, $\beta = 0{\cdot}10\,H$ „ „ $= 1 : 4{\cdot}556$.

Diese Verhältnisszahlen lehren, dass die Biegung einer cylindrischen Röhre desto kleiner wird, je grösser bei einem gegebenen Materialquantum der Röhrendurchmesser ist. Man muss jedoch mit Rücksicht auf den §. 41 stets darauf sehen, dass der Querschnitt in Folge der Biegung seine ursprüngliche Form nicht verliere, daher bei geringen Wanddicken die Anwendung von Verstärkungen, Rippen, u. s. w. nöthig, jedenfalls aber die Verkleinerung der Wanddicke mit der gleichzeitigen Vergrösserung des Röhrendurchmessers nur bis zu einem gewissen Grade zulässig sein wird.

§. 139.

Genäherter Werth des Trägheitsmomentes für Blechröhrenquerschnitte. Die Steifigkeit der Blechröhren

kann nach den allgemeinen Formeln für Röhren beurtheilt werden. Da aber die Blechstärken im Vergleiche zu den anderen Querschnittsdimensionen in der Regel nur klein sind, so wird in den meisten Fällen die Anwendung genäherter Formeln gestattet sein. Man hat bereits bei der Betrachtung der ⌶ und ⊤ Formen solche Fälle kennen gelernt, wo geringe Wanddicken eine genäherte Berechnungsweise zuliessen.

Fig. 195.

Diess vorausgeschickt, betrachte man zunächst eine Blechröhe mit einem rechteckigen Querschnitte (Fig. 195), und erinnere sich, dass mit Rücksicht auf die genauen Formeln nach den Bezeichnungen in der Figur 102

die Fläche . . . . . . $F = (BH - B'H')$

und das Trägheitsmoment . $T = \frac{1}{12}(BH^3 - B'H'^3)$

wird. Ist nun die Wanddicke β gegen die übrigen Querschnittsdimensionen klein, so kann man sich erlauben, bei der Benützung der Werthe

$$B' = (B - 2\beta) = B\left(1 - 2\frac{\beta}{B}\right)$$

$$\text{und } H' = (H - 2\beta) = H\left(1 - 2\frac{\beta}{H}\right)$$

nur die ersten Potenzen von $\frac{\beta}{B}$ und $\frac{\beta}{H}$ zu berücksichtigen, und sofort zu setzen

$$\left.\begin{aligned} F &= 2(B + H)\beta \\ \text{und } T &= \tfrac{1}{6}(H + 3B)\beta H^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) F H^2 \end{aligned}\right\} \quad (241).$$

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient von FH^2 in der Formel für das Trägheitsmoment ist

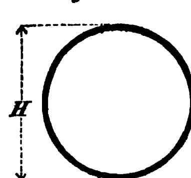
$$\tfrac{1}{12}\left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) = \tfrac{1}{12}\left\{\frac{1 + \frac{3B}{H}}{1 + \frac{B}{H}}\right\},$$

und variirt mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die beiden Gränzen, zwischen welchen die Werthe jenes Coefficienten fallen, ergeben sich, die eine für $B = o$ und die andere für $H = o$, und sind daher durch die Zahlenwerthe $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{4}$ ausgedrückt.

Für $B = H$ geht das Rechteck in ein Quadrat über, und es wird $F = 4 H \beta$, ferner

$$T = \tfrac{1}{6} F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242).$$

Fig. 196.



In diesem Falle ist der fragliche Coefficient ($\tfrac{1}{6}$) das arithmetische Mittel zwischen jenen Gränzwerthen, und doppelt so gross, wie bei einem vollen Quadrate ($\tfrac{1}{12}$).

Für eine cylindrische Blechröhre (Fig. 196) erhält man nach den genauen Gleichungen (181)

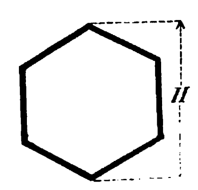
$$T = \tfrac{1}{16}(1 + n^2) F H^2.$$

Ist wieder die Wanddicke β sehr klein, so kann man sich erlauben, $n = 1$, also

$$T = \tfrac{1}{8} F H^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

zu setzen. Auch hier erscheint der Coefficient von $F H^2$ ($\tfrac{1}{8}$) doppelt so gross, wie bei einem vollen Kreisquerschnitte ($\tfrac{1}{16}$).

Fig. 197.



Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein regelmässiges Polygon (Fig. 197), und nennt man den von seinem äusseren Umfange eingeschlossenen Flächenraum f_1, den inneren leeren Raum f_2, ferner die eigentliche Fläche des Blechquerschnittes $F = (f_1 - f_2)$, so hat man unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen im §. 121 zufolge der genauen Formeln (199) und (200) für das Trägheitsmoment des Blechquerschnittes

$$T = \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right) f_1^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right) f_2^2 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{2 + \cos\alpha}{n \sin\alpha}\right)(f_1^2 - f_2^2).$$

Ist die Blechstärke klein genug, um statt

$$(f_1^2 - f_2^2) = (f_1 + f_2)(f_1 - f_2) = (f_1 + f_2) F$$

näherungsweise $2 f_1 F$ annehmen zu dürfen, so erhält man wegen $f_1 = \tfrac{1}{2} n \sin\alpha\, C^2$ zunächst

$$(f_1^2 - f_2^2) = 2 f_1 F = n \sin\alpha\, F C^2,$$

also auch

$$T = \tfrac{1}{6}(2 + \cos\alpha) F C^2.$$

Wird weiter berücksichtigt, dass

$$(2 + \cos\alpha) C'^2 = (C^2 + 2 c^2)$$

ist, so bekommt man als den genäherten Werth des Trägheitsmomentes

$$T = \frac{1}{6} F (C^2 + 2c^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (244).$$

Diese Relation verglichen mit jener (199) zeigt, dass der von der Querschnittsform abhängige Coefficient in der Formel des Trägheitsmomentes für jede beliebige Seitenzahl des Polygons doppelt so gross ist, wie bei einem vollen Polygon von derselben Seitenzahl. Hiernach erscheint die analoge für das Quadrat und den Kreis gefundene Eigenschaft nur als der Ausfluss einer auf alle regelmässigen Polygone anwendbaren Regel. Es versteht sich von selbst, dass die Biegung von derartigen Röhren bei einer die Sicherheitsgränzen nicht überschreitenden Belastung in allen Stellungen des Polygonquerschnittes unverändert bleibt.

Die am Schlusse des vorigen §. bemerkten Vorsichten bezüglich der Anwendung von Verstärkungen, Rippen u. s. w., sind bei Blechröhren im erhöhten Grade zu beobachten *).

§. 140.

Vergleichung der Steifigkeit von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren. Zur Vergleichung der Steifigkeit von Blechröhren mit rechteckigen und kreisrunden Querschnitten behalte man die Benennungen im vorigen §. bei, und bezeichne nur die correspodirenden Grössen mit den Zeigern 1 und 2.

Hiernach ist

für den rechteckigen Querschnitt nach den Formeln (241)

$$F_1 = 2(B_1 + H_1)\beta_1 \text{ und } T_1 = \frac{1}{6}(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1^2,$$

für den kreisrunden aber mit Rücksicht auf die Formel (243)

$$F_2 = \pi H_2 \beta_2 \text{ und } T_2 = \frac{1}{8} F_2 \beta_2^2 = \frac{\pi}{8} \beta_2 H_2^3,$$

also auch

$$T_1 : T_2 = 4(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1^2 : 3\pi\beta_2 H_2^3 \quad . \quad . \quad (245).$$

---

*) Um die angenäherten Werthe für die Trägheitsmomente von Blechquerschnitten zu finden, ist die Kenntniss der bezüglichen genauen Formeln nicht nothwendig. Man kann auch unabhängig von diesen die Bestimmung jener Werthe vornehmen, indem man dabei den Querschnitt aus Linien zusammengesetzt sich vorstellt.

1. Nimmt man für beide Querschnitte gleiche Wanddicken, gleiche Höhen und gleiche Blechmengen an, nämlich $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$ und $F_1 = F_2$, so wird $B_1 = \left(\frac{\pi - 2}{2}\right) H_1 = 0{\cdot}5708\, H_1$ und

$$\left.\begin{aligned} T_1 : T_2 &= 4\,(H_1 + 3\,B_1) : 3\,\pi\,H_2 \\ &= 2\,(3\,\pi - 4) : 3\,\pi \\ &= 1{\cdot}151 : 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (246).$$

Die vierkantige Röhre ist daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Röhrenhöhe und gleicher Blechmenge steifer, als die cylindrische.

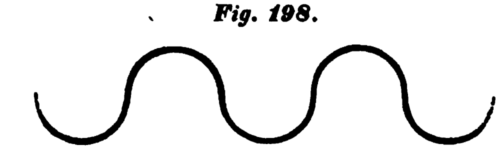
2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$, und setzt man auch in diesem Falle $\beta_1 = \beta_2$ und $F_1 = F_2$, also $4\,H_1 = \pi\,H_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (245) auf

$$\left.\begin{aligned} T_1 : T_2 &= 16\,H_1^3 : 3\,\pi\,H_2^3 \ldots \\ &= \pi^2 : 12 \ldots\ldots \\ &= 0{\cdot}822 : 1 \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (247).$$

Bei gleicher Wanddicke und gleicher Blechmenge ist daher die cylindrische Röhre steifer, als jene mit dem quadratischen Querschnitte.

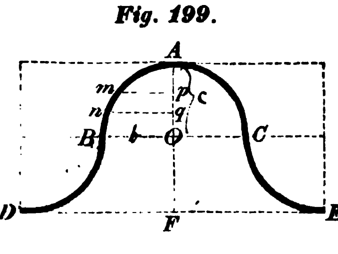
§. 141.

Fig. 198.



Cannelirtes Blech (Fig. 198). Derartiges Blech kann eine bedeutende Steifigkeit entwickeln. Der Querschnitt desselben besteht aus einer Reihe — in der Regel congruenter — Cannelirungen. Eine solche Cannelirung kann im Querschnitte (Fig. 199) als eine krumme Linie $DBACE$ angesehen werden, wenn — wie gewöhnlich — die Blechstärke β im Vergleiche zu den übrigen Dimensionen nur klein ist. Der Schwerpunct O, durch welchen die neutrale Axe zu ziehen ist, liegt in der halben Höhe.

Fig. 199.



$\frac{AF}{BO} = n$

Behufs der Untersuchung lege man durch A ein Coordinaten-System, bei welchem die Abscissen von A gegen O, und die Ordinaten normal darauf angenommen werden. Man nenne für ein beliebiges Curvenelement $\widehat{mn}$ die Länge desselben $\widehat{mn} = d\sigma$,

die Abscisse . . . . $\overline{Ap} = x$,

die Ordinate . . . . $\overline{mp} = y$,

die Abscissenzunahme . . . . $\overline{pq} = dx$,

die Ordinatenzunahme . . . . $\overline{nq} - \overline{mp} = dy$,

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe $\overline{BC}$ . . . . . . dt,

ferner für den Curventheil $\widehat{AB}$

die Länge . . . . $\widehat{AB} = \lambda$,

die Abscisse . . . . $\overline{AO} = c$,

die Ordinate . . . . $\overline{BO} = b$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{BC}$ . . . . t.

Diesen Bezeichnungen gemäss hat man

$$d\sigma = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},\ \lambda = \int_o^b d\sigma,\ dt = \beta\, d\sigma\, (c - x)^2$$

und $t = \int_o^b dt$, wobei nach y zu integriren ist.

Wird die Form der Cannelirung parabolisch angenommen, daher die Curvengleichung $x = \frac{c}{b^2} y^2$ zu Grunde gelegt, so findet man wegen $\frac{dx}{dy} = \frac{2cy}{b^2}$, wenn zugleich das Verhältniss

$$\frac{2c}{b} = 2\,\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = n \text{ gesetzt wird,}$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} b \left[\sqrt{1+n^2} + \frac{1}{n}\, log.\ nat.\ (n + \sqrt{1+n^2})\right]. \quad (248)\,^*)$$

---

*) Es ist nämlich allgemein

$$\sigma = \int dy \sqrt{1 + \frac{4c^2y^2}{b^4}} = \int dy \sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2} y \sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}} + \frac{b}{2n}\, log.\ nat. \left[\frac{ny}{b} + \sqrt{1 + \frac{n^2y^2}{b^2}}\right],$$

daher zwischen den Gränzen o und b

$$\lambda = \frac{b}{2}\left[\sqrt{1+n^2} + \frac{1}{n}\, log\ nat.\ (n + \sqrt{1+n^2})\right].$$

und $t = \frac{\beta b^2}{8}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right]$ (249)*).
Werden diese Werthe viermal genommen, so bekommt man die Länge einer ganzen Cannelirung $DBACE = L$, und ihr Trägheitsmoment T. Demnach ist $L = 4\lambda$ und $T = 4t$. Auch wird der

---

*) Man hat allgemein

$$t = \beta \int d\sigma (c-x)^2 = \beta \int dy \sqrt{\left(1+\frac{4c^2y^2}{b^4}\right)} \left(c - \frac{cy^2}{b^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\beta c^2}{b^4} \int dy \sqrt{\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)} (b^2-y^2)^2.$$

Nun ist aber

$$\int dy \sqrt{\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)}(b^2-y^2)^2 =$$

$$= b^4 \int dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} - 2b^2 \int y^2 dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} + \int y^4 dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}},$$

$\int dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} = \sigma$, wie in der vorhergehenden Anmerkung,

$$\int y^2 dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{b^2}{4n^2}\left[y\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \int dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}}\right] =$$

$$= \frac{b^2}{4n^2}\left[y\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \sigma\right],$$

endlich

$$\int y^4 dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{b^2y}{2n^2}\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{b^2}{4n^2}\right) + \frac{b^4}{8n^4}\int dy \sqrt{1+\frac{n^2y^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{b^2y}{2n^2}\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{b^2}{4n^2}\right) + \frac{b^4}{8n^4}\sigma,$$

also nach gehöriger Reduction

$$t = \frac{1}{8}\beta\left[b^2\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\sigma + y\left(1+\frac{n^2y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}y^2 - b^2 - \frac{b^2}{4n^2}\right)\right],$$

und zwischen den Gränzen o und b

$$t = \frac{\beta b^2}{8}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right].$$

Flächenraum F des Querschnittes Einer Cannelirung $F = L\beta$. So z. B. findet man für das Verhältniss $n = \frac{4}{3}$ *),

$$\lambda = \tfrac{1}{2} b \left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{3}{4} \log.\ nat.\ 3\right) = 1{\cdot}245\, b \text{ und}$$
$$t = 0{\cdot}2638\, b^3 \beta, \text{ also auch}$$
$$L = 4\lambda = 4{\cdot}980\, b,\ F = L\beta = 4{\cdot}980\, b\beta \text{ und}$$
$$T = 1{\cdot}0552\, b^3 \beta.$$

Setzt man noch die ganze Höhe $\overline{AF} = 2c = H$, und beachtet, dass wegen $F = 4{\cdot}980\, b\beta$ und $H = 2c = nb = \frac{4}{3} b$, zunächst $\beta = \frac{F}{4{\cdot}980\, b}$ und $b = \frac{3}{4} H$, ferner $b^3 \beta = \frac{F}{4{\cdot}980} \cdot \frac{9}{16} H^2 = 0{\cdot}1129\, FH^2$ wird, so erhält man statt des obigen Werthes für T auch

$$T = 0{\cdot}1191\, FH^2.$$

An den Coefficienten in dieser Formel (0·1191) lässt sich nunmehr die Berurtheilung über die mit dem cannelirten Blechquerschnitte zu erreichende Steifigkeit im Vergleiche zu dem Materialaufwande leicht anknüpfen. Man darf nämlich nur diesen Querschnitt mit einem Rechtecke von einerlei Höhe und Flächenraum vergleichen, und sich vergegenwärtigen, dass für das Rechteck jener Coefficient bloss den Werth von $\frac{1}{12} = 0{\cdot}0833$ annimmt, woraus ersichtlich wird, dass die Steifigkeit der Cannelirung nach der Höhenrichtung des Querschnittes bedeutend grösser ist. Zugleich gewährt dieselbe den besonderen Vortheil, dass sie leichter in der Form erhalten werden kann.

II. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein Tragvermögen unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll.

§ 142.

Hauptsatz. Das Tragvermögen eines Trägers steht unter sonst gleichen Umständen im geraden Verhältnisse zu dem Tragmomente M des Querschnittes, welches aus der Relation (95)

*) In der k. k. landesbefugten Fabrik von Winiwarter und Gersheim zu Gumpoldskirchen in Nieder-Oesterreich werden cannelirte Bleche erzeugt, welchen das Verhältniss $n = \frac{4}{3}$ entspricht. Bei jenen Blechen ist nämlich $\overline{AO} = c = \frac{1}{2}''$ und $\overline{BO} = b = \frac{3}{4}''$, also in der That

$$n = \frac{2c}{b} = \frac{1''}{(\frac{3}{4})''} = \frac{4}{3}.$$

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \frac{aT}{h'} \\ \text{oder } \frac{rT}{h''} \end{cases}$$

derart zu bestimmen ist, dass man von den beiden Alternativ-Werthen den kleineren wählt.

Eine Querschnittsform erscheint daher bezüglich des Tragvermögens desto zweckmässiger, je grösser bei einer gegebenen Höhe der kleinere von jenen Alternativ-Werthen ist.

§. 143.

Folgerung. Um die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform in dem obigen Sinne kennen zu lernen, bemerke man, dass nach dem §. 77 das Tragmoment stets auf die Form

$$M = \begin{cases} \text{entweder } C \,.\, aFH \\ \text{oder } C' \,.\, rFH \end{cases}$$

gebracht werden kann, wobei die Coefficienten C und C' nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Der massgebende Werth für das Tragmoment wird daher bei einem gegebenen Flächenraum F und bei einer gegebenen Materialgattung desto grösser, je grösser die Höhe H und der betreffende Coefficient sind. Ueberdiess hat man nach dem zweiten Kapitel dieses Abschnittes in Erwägung zu ziehen, ob die Biegungscurve nur nach einer Seite gekrümmt ist, oder ob dieselbe auch Wendepuncte besitzt, weil von diesem Umstande die Lage des gefährlichen Querschnittes, von dieser Lage aber das Tragmoment abhängt.

§. 144.

Zweckmässigste Höhe H. Hinsichtlich der Wahl der Höhe für einen Querschnitt behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens gilt der Hauptsache nach dasselbe, was bereits im § 132 angeführt wurde. Auch hat man in dem Falle, wenn die Anspruchsnahme des Trägers nach mehreren Richtungen eintreten kann, darauf Bedacht zu nehmen, dass das Tragvermögen nach allen solchen Richtungen entsprechend gross werde. In dieser Hinsicht können z. B. für rotirende Wellen regelmässige Polygone eine zweckmässige Anwendung finden.

§. 145.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens, wenn die Biegungscurve keinen Wendepunct hat. Kehrt man zu den Betrachtungen im §. 133 zurück, so leuchtet ein, dass bei einer gegebenen Höhe des Querschnittes auch das Maximum des Tragmomentes auf die dort angegebene Weise erreicht würde, wenn man nämlich im Stande wäre, die Fläche des Querschnittes an den beiden Enden der Höhe in zwei gerade Linien $\overline{A'A''}$ und $\overline{B'B''}$ (Fig. 178) zu drängen. Nur kömmt hier neuerdings zu erörtern, welches Verhältniss zwischen den Flächentheilen f' und f'' als das zweckmässigste anzusehen ist. Es wurde bereits im §. 133 gesagt, dass dieser Fall ein imaginärer sei, dass aber die demselben entsprechenden Resultate als Anhaltspuncte benützt werden können, um die Bedingungen zu erfahren, welche man bei der zweckmässigsten Vertheilung des Flächenraumes in einem Querschnitte zu erfüllen hat. Hiernach ist zu untersuchen, für welche Werthe von f' und f'' das Tragmoment des Querschnittes ein Maximum wird. Zu diesem Behufe beachte man, dass nach der Gleichung (228) das Trägheitsmoment $T = h'h''F$, also das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entweder } \dfrac{aT}{h'} = aFh'' \\ \text{oder } \dfrac{rT}{h''} = rFh' \end{cases}$$

zu setzen, von diesen beiden Werthen aber stets der kleinere zu wählen ist. Da nun $h' + h'' = H$ eine constante Grösse ist, daher von den beiden Werthen aFh'' und rFh' der eine zunimmt, wenn der andere abnimmt, und umgekehrt, so begreift man, dass das grösste Tragmoment in dem Augenblicke erreicht wird, wenn diese beiden Werthe einander gleich werden, d. i. wenn die Relation

$$ah'' = rh' \text{ oder } \frac{a}{h'} = \frac{r}{h''} \text{ oder auch } h' : h'' = a : r$$

vorhanden ist. Dieser Bemerkung gemäss findet man einerseits wegen $h' + h'' = H$

$$h' = \left(\frac{a}{a+r}\right) H \text{ und } h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right) H \quad . \quad . \quad (250),$$

und andererseits wegen $f' : f'' = h'' : h' = r : a$ und $f' + f'' = F$

$$f' = \left(\frac{r}{a+r}\right) F \text{ und } f'' = \left(\frac{a}{a+r}\right) F \quad . \quad . \quad (251),$$

endlich das grösste Tragmoment selbst

$$M = af'H = rf''H = rFh' = aFh'' = \left(\frac{ar}{a+r}\right) FH \quad (252).$$

Aus diesen Resultaten geht hervor, dass das Tragvermögen eines Trägers bei einem gegebenen Flächenraume seines Querschnittes und bei einer gegebenen Höhe desselben desto grösser wird:

1. Je weiter die einzelnen Querschnittstheile von der neutralen Axe entfernt liegen, und

2. je näher zugleich das Verhältniss zwischen den beiden Flächentheilen f' und f'' demjenigen kommt, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung r und der grössten zulässigen Spannung a stattfindet.

Der ersten Bedingung kann, wie schon im §. 133 gesagt wurde, nur bis zu einem gewissen Grade entsprochen werden. Die zweite Bedingung hängt offenbar mit der Materialgattung zusammen, führt aber immer auf die Gleichung $af' = rf''$, wornach zur Erreichung des Maximal-Tragmomentes die grösste zulässige Spannung des Querschnittes f' in $\overline{A'A''}$ eben so gross, wie die grösste zulässige Pressung des Querschnittes f'' in $\overline{B'B''}$, also in beiden Flächentheilen $\overline{A'A''}$ und $\overline{B'B''}$ die Elasticitätsgränze gleichzeitig erreicht werden muss.

Bei der Anwendung, wo man sich vor Allem über die zu Grunde zu legenden Grössen a und r zu einigen hat, ist vorzugsweise zu berücksichtigen, dass die grösste zulässige Pressung pr. □'' (r) nicht immer nach dem Widerstande kurzer Stücke bemessen werden darf. Wenn nämlich die der Zusammendrückung ausgesetzte Fläche f'' in $\overline{B'B''}$ verhältnissmässig nur geringe Dimensionen hat, so muss man darauf sehen, dass diese Fläche auch in ihrer Form sich erhalte, und nicht etwa ein Verbiegen oder Ausweichen derselben nach der Seite zu besorgen sei. Aus diesem Grunde wird es in den meisten Fällen nothwendig sein, die Pressung r pr. □'' in jener Fläche $\overline{B'B''}$ nicht so weit zu treiben, als sie mit Rücksicht auf den eigentlichen Widerstand gegen das Zusammendrücken zulässig wäre, so dass z. B. für

Schmiedeeisen das Verhältniss $\frac{a}{r}$ je nach Umständen $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$ u. s. w. werden kann, obgleich dasselbe in der Regel der Einheit näher liegt, wenn man die Pressung nur auf ganz kurze Stücke bezieht. Die Feststellung des Werthes von r hängt somit auch von dem Grade der Steifigkeit des Querschnittstheiles $\overline{B'B''}$ ab, auf welche durch geeignete Massregeln möglichst hinzuwirken ist. Diess kann auf verschiedene Weise geschehen. Verstrebungen und Rippen werden jedenfalls nützliche Dienste leisten. Ausserdem aber stellt sich die Anwendung der Zellenform (Fig. 200) als sehr vortheilhaft dar; denn man hat im §. 136 gesehen, dass diese eine bedeutende Steifigkeit besitzt. In der Figur 200 ist der gespannte Querschnittstheil $\overline{A'A''}$ unten, der gepresste zellenförmige Theil aber oben angenommen, wie in dem Falle, wenn der Träger an den beiden Enden aufliegt. Beabsichtigt man auch dem gespannten Querschnittstheile $\overline{A'A''}$ eine erhöhte Steifigkeit zu geben, so kann man denselben gleichfalls zellenförmig construiren (Fig. 201).

Fig. 200. *Fig. 201.*

Diese Bemerkungen stimmen mit der Erfahrung vollkommen überein. Der Engländer Fairbairn hat in der That durch seine Versuche mit schmiedeeisernen Röhren die Zweckmässigkeit der in den Figuren 200 und 201 dargestellten Querschnittsformen, und zugleich nachgewiesen, dass die vortheilhafteste Vertheilung der Querschnittsfläche F in die beiden Theile f' und f'' nach dem Verhältnisse der pr. $\square''$ anzuhoffenden Widerstände gegen Zusammendrückung und gegen Ausdehnung geschehen muss, wenn das Maximum des Tragvermögens erreicht werden soll, also gerade so, wie diess die Formeln (251) lehren. Für das Verhältniss $\frac{f'}{f'}$ haben die Versuche Fairbairn's beiläufig $\frac{5}{4}$ ergeben, was gleichfalls mit den obigen Bemerkungen im Einklange steht. Man wird in der Folge bei der Berechnung der sogenannten Röhrenbrücken, wo Fairbairn die Querschnittsform (Fig. 201) in Anwendung gebracht hat, auf diese besondere Construction zurückkommen.

Anmerkung 1. Dass die oben gefundenen Resultate für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in dem Querschnitte zur Erreichung des grössten Tragvermögens richtig sind, folgt auch aus einer ganz einfachen Anschauung. Soll nämlich das Materiale im Querschnitte an beiden Enden der Höhe angebracht werden, und dabei die zweckmässigste Vertheilung stattfinden, so dürfen die Querschnittstheile f' und f'' nicht grösser sein, als es absolut nothwendig erscheint, woraus zu schliessen ist, dass in diesem Falle in beiden Theilen die Elasticitätsgränze gleichzeitig erreicht, dass also in dem Querschnittstheile f' die Totalspannung $S = af'$, in dem Querschnittstheile f'' aber die Totalpressung $P = rf''$ hervorgerufen wird. Diese Ansprucbsnahmen kommen selbstverständlich nur in dem gefährlichen Querschnitte vor; für diesen ist aber der in der Gleichung (29) ad §. 43 bezeichnete Winkel φ entweder wirklich gleich Null, oder doch wegen der jedenfalls nur geringen Biegung so klein, dass er vernachlässigt, und in Folge dessen $S = P$ gesetzt werden kann. Dann aber erhält man $af' = rf''$, also dieselbe Relation, wie sie oben aus der allgemeinen Betrachtung gefunden wurde. Zugleich ist das statische Widerstandsmoment (Tragmoment) übereinstimmend mit der Formel (252)

$$M = Sh' + Ph'' = S(h' + h'') = SH = PH = af'H = rf''H.$$

Offenbar hat in diesem Falle die Lage der neutralen Axe im Querschnitte auf die Grösse des Tragmomentes keinen Einfluss, weil dasselbe nur von der Summe $h' + h''$ abhängt, diese aber stets der ganzen Querschnittshöhe H gleich ist.

Diese Darstellung, vereint mit den Resultaten der im Grossen angestellten Versuche Fairbairn's bestätigen die Richtigkeit der im §. 77 aufgestellten Berechnungsmethode für das Tragmoment eines Querschnittes mittelst Anwendung von Alternativwerthen; denn es leuchtet ein, dass nur auf diese Weise die Relationen (250), (251) und (252) gefunden werden konnten.

Die nicht allgemeine Giltigkeit der den Theorien Redtenbacher's und Navier's entsprechenden Formeln für das Tragvermögen zeigt sich hier auf eine unzweideutige Weise.

Nach Redtenbacher wäre nämlich das Tragmoment stets durch die Formel $M = \frac{aT}{h'}$ auszudrücken, wenn man, wie bisher, a die grösste Spannung des Materiales per □'', und h' den Abstand der gespanntesten Fasern von der neutralen Axe bezeichnen lässt. Wegen $T = Fh'h''$ würde daher das Tragmoment $M = aFh''$ am grössten für $h'' = H$ und $h' = o$, d. h. in dem Falle, wenn der ganze Querschnitt lediglich auf der gespannten Seite in $\overline{A'A''}$ concentrirt, sonach auf der anderen Seite keiner vorhanden wäre. Dieses Resultat widerspricht nicht nur den Versuchen, sondern schon der einfachen Anschauung, und erklärt sich dadurch, weil nach dieser Berechnung auf den grössten zulässigen Widerstand gegen Zusammendrückung

keine Rücksicht genommen wird. (Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 122 und 123.) Man bemerkt zugleich, dass das nach der Theorie Redtenbacher's entstehende Resultat $f' = F$ und $f'' = o$ aus den Formeln (251) für $r = \infty$ folgt, welche Bemerkung mit der auf Seite 132 im Einklange steht.

Betreffend die Theorie Navier's, so wäre nach dieser in der Formel für das Tragmoment auch nur die Spannung a einzuführen, hingegen stets durch den Abstand der entferntesten Fasern von der neutralen Axe zu dividiren, welches Verfahren zu Folge der Anmerkung auf Seite 125 mit der Bedingung $a = r$ correspondirt. In diesem Falle würde das grösste Tragvermögen immer für $f' = f'' = \frac{F}{2}$ zum Vorschein kommen, was zwar unter besonderen Umständen richtig sein, im Allgemeinen aber nicht zugelassen werden kann.

Anmerkung 2. Würde man statt dem Tragmomente das Bruchmoment betrachten, und dieses durch die zweckmässigste Vertheilung des Querschnittes zu einem Maximum machen wollen, so hätte man in der obigen Untersuchung statt den Elasticitätsgränzwerthen a und r die absolute und rückwirkende Festigkeit A und R des Materiales einzuführen. In diesem Falle wäre das zweckmässigste Verhältniss zwischen f' und f'' nach dem Verhältnisse $R : A$ zu bestimmen, somit $Af' = Rf''$, d. i. die absolute Festigkeit des gezogenen Theiles in $\overline{A'A''}$ gleich der rückwirkenden Festigkeit des gepressten Theiles in $\overline{B'B''}$ zu setzen. Da es sich jedoch in der Praxis nicht um den Bruch, sondern vielmehr um die vollkommene Sicherheit des Trägers handelt, so darf man sich bei der Feststellung der Bedingung für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte nur zwischen den Elasticitätsgränzen bewegen, wesshalb man in der Anwendung jedenfalls das Verhältniss $\frac{a}{r}$, nicht aber jenes zwischen A und R, als massgebend zu betrachten hat.

Nachdem man die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung zur Erreichung des grössten Tragvermögens kennen gelernt hat, werden nunmehr die vorzüglichsten der in dieser Beziehung zweckmässigen Querschnitte betrachtet werden.

§. 146.

Querschnittsform Fig. 202. Diese Querschnittsform ist dieselbe, wie die im § 134 betrachtete, und es entspricht ihr das Trägheitsmoment $T = \frac{(1 + n + n^2)}{12} F H^2$. Das Tragmoment M dieser Figur ist daher wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H$

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}(1+n+n^2)\,a\,F\,H \\ \text{oder } \frac{1}{6}(1+n+n^2)\,r\,F\,H. \end{cases}$$

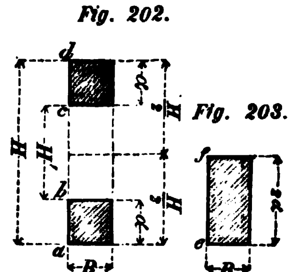


Fig. 202.

Für ein Rechteck von gleicher Höhe H und gleichem Inhalte F (Fig. 203) wäre das Tragmoment M' nach der Relation (96)

$$M' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\,a\,F(2\,\alpha) \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,r\,F(2\,\alpha). \end{cases}$$

Vergleicht man die Tragmomente der Figuren 202 und 203, und lässt man in beiden Fällen die Pressung r in gleicher Intension zu, so erhält man die Proportion

$$M' : M = 2\alpha : (1+n+n^2)H,$$

welche, wenn (wie im §. 134) $\frac{2\alpha}{H} = x$ und $n = (1-x)$ gesetzt wird, in folgende übergeht:

$$M' : M = x : (3 - 3x + 3x^2) \quad . \quad . \quad (253).$$

Insbesondere ist

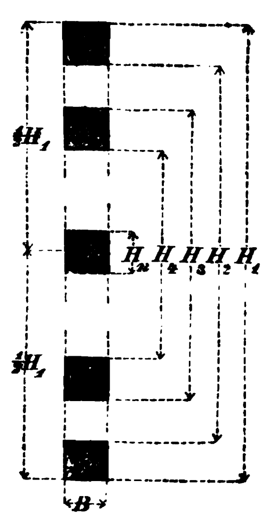
für	$x = 1$,	$\alpha = 0{\cdot}50\,H$	und $M' : M$	$= 1 : 1$
„	$x = 0{\cdot}9$,	$\alpha = 0{\cdot}45\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}233$
„	$x = 0{\cdot}8$,	$\alpha = 0{\cdot}40\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}549$
„	$x = 0{\cdot}7$,	$\alpha = 0{\cdot}35\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}986$
„	$x = 0{\cdot}6$,	$\alpha = 0{\cdot}30\,H$	„ „	$= 1 : 2{\cdot}6$
„	$x = 0{\cdot}5$	$\alpha = 0{\cdot}25\,H$	„ „	$= 1 : 3{\cdot}5$
„	$x = 0{\cdot}4$,	$\alpha = 0{\cdot}20\,H$	„ „	$= 1 : 4{\cdot}9$
„	$x = 0{\cdot}3$,	$\alpha = 0{\cdot}15\,H$	„ „	$= 1 : 7{\cdot}3$.

Das Verhältniss (253) gestaltet sich für die Querschnittsform 202 desto günstiger, d. h. das Tragvermögen wird desto bedeutender je kleiner x, also je grösser der leere Raum zwischen den vollen Flächentheilen im Vergleiche zu diesen selbst ist. Die Vergrösserung des leeren Raumes hat jedoch, wie schon im §. 134 bemerkt wurde, in jedem besonderen Falle eine practische Gränze, die an die Bedingungen im §. 41 gebunden ist.

Die Anordnung von gleich grossen Querschnittstheilen oben und unten, wie in der Figur 202, ist übrigens nicht immer die vortheilhafteste. Aus dem Inhalte des vorigen §. geht nämlich hervor, dass zur möglichsten Vermehrung des Tragvermögens das Grössenverhältniss zwischen dem gespannten und dem gepressten Querschnitts-

theile nach dem Verhältnisse der Elasticitätsgränzwerthe r und a angeordnet werden soll. Dadurch erhält man im Allgemeinen oben und unten ungleich grosse Querschnittstheile, und es ist sodann das Tragmoment mit Benützung der Formeln (188) nach Anleitung des §. 77 zu bestimmen.

Fig. 204.



§. 147.

Querschnittsform Fig. 204. Diese Querschnittsform ist mit der im §. 135 betrachteten identisch. Für dieselbe wird wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H_1$ das Tragmoment

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \ \frac{2aT}{H_1} \\ \text{oder} \ \frac{2rT}{H_1} \end{array} \right\} \quad . \quad (254),$$

wobei man das Trägheitsmoment T nach der Gleichung (234) zu berechnen hat.

Für den besonderen Fall, in welchem alle vollen und alle leeren Räume die gleiche Höhe a besitzen, wird nach der Gleichung (235)

$$M = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \ \frac{(4n^2 - 3)}{6(2n-1)^2} a F H_1 \\ \text{oder} \ \frac{(4n^2 - 3)}{6(2n-1)^2} r F H_1 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (255).$$

Setzt man in diese Relation $n = 2, 3, 4$, etc., so erhält man für den Coefficienten $\frac{(4n^2 - 3)}{6(2n-1)^2}$ die entsprechenden Werthe, welche das Doppelte von jenen betragen, die für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes im §. 135 gefunden wurden. Die dortige Schlussbemerkung gilt auch gegenwärtig.

§. 148.

Iförmiger Querschnitt. Mit Rücksicht auf den §. 145 ist es zweckmässig, das die beiden Flanschen verbindende Mittelstück nach Zulässigkeit dünn zu machen, und den Querschnitt f' der gespannten Flansche zu dem Querschnitte f'' der gepressten Flansche

in ein solches Verhältniss zu bringen, welches zwischen den Elasticitätsgränzwerthen r und a stattfindet. Von diesen Werthen wird die grösste zulässige Pressung r desto kleiner anzunehmen sein, je geringer die Flanschendicke im Vergleiche zur ganzen Querschnittshöhe ist, und je weniger durch künstliche Mittel (Verstrebnungen, Rippen) der Formveränderung des Querschnittes entgegengewirkt wird.

Fig. 205.

Bei dem Schmiedeeisen wird daher die Gleichheit der Flanschen (Fig. 205) nur dann der zweckmässigsten Vertheilung des Materiales entsprechen, wenn die Elasticitätsgränzwerthe a und r als gleich angenommen werden können. Sonst aber sind ungleiche Flanschen vortheilhafter, wobei der gepresste Querschnittstheil f'' im Vergleiche zu dem gespannten Theile f', in dem Verhältnisse wie $r:a$ zu vergrössern ist. Dieses Verhältniss pflegt je nach dem Grade der Steifigkeit des Querschnittes (insbesondere der gepressten Flansche) und je nach der Materialqualität in der Nähe der Werthe $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, zu liegen.

Bei dem Gusseisen weichen für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den beiden Flanschen diese letzteren in ihrer Grösse weit mehr von einander ab, als bei dem Schmiedeeisen, weil bei jenem das Verhältniss $\frac{r}{a}$ viel grösser ist. Dieses Verhältniss wird nämlich bei dem Gusseisen je nach der Materialqualität und je nach dem Grade der Steifigkeit der Querschnittsform in der Nähe der Zahlen 2, 3, 4 liegen, wesshalb die der Spannung ausgesetzte Flansche f' (Fig. 206) $\frac{r}{a}$ (beispielsweise 2, 3, 4) mal so gross zu machen ist, wie die gepresste Flansche f'' *).

Fig. 206.



*) Zahlreiche Versuche des Engländers Hodgkinson haben gezeigt, dass bei gusseisernen Trägern mit I förmigen Querschnitten zur Erreichung der grössten relativen Festigkeit (Bruchbelastung) das zweckmässigste Verhältniss zwischen den beiden Flanschen f' und f'' ungefähr jenes sei, welches zwischen der rückwirkenden Festigkeit R und der absoluten Festigkeit A des Gusseisens existirt. Dieses Resultat, obgleich sich dasselbe auf den Bruch bezieht, bestätigt doch neuerdings die Richtigkeit der im §. 145

Die Bestimmung des Tragvermögens für I förmige Träger mit ungleichen Flanschen unterliegt nach der im §. 77 gegebenen Regel keinem Anstande, weil das Trägheitsmoment eines derartigen Querschnittes mit Hilfe der betreffenden Gleichung (186) berechnet werden kann.

Die Betrachtungen in diesem §. sind geeignet, auf ähnliche Weise, wie im §. 136, die Zweckmässigkeit des Zertheilens eines gegebenen Flächenraumes in mehrere gleiche I Formen auch rücksichtlich des Tragvermögens nachzuweisen.

§. 149.

┬ förmiger Querschnitt. Mit Beziehung auf die §§. 137 und 145 ist man berechtigt, unter gewissen Umständen auch den ┬ förmigen Querschnitt behufs des zu erreichenden Tragmomentes als zweckmässig zu erklären. Ueber den Grad dieser Zweckmässigkeit kann jedoch nur eine nähere Untersuchung Aufschluss geben. So

---

gegebenen Regeln für die vortheilhafteste Querschnittsvertheilung, wenn man die dortige Anmerkung 2 berücksichtigt. Das von Hodgkinson aus seinen Versuchen ermittelte zweckmässigste Verhältniss zwischen f' und f'' war 6 : 1. Hieraus darf man aber nicht schliessen, dass in der Praxis dieses Resultat als Norm zu dienen habe, und zwar aus folgenden Gründen:

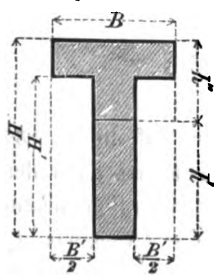
1. Ist das Verhältniss $\frac{R}{A}$ nicht immer $= 6$, indem dasselbe nach der Qualität des Gusseisens variirt;

2) ist jenes Verhältniss selbst bei einer gewissen Qualität des Gusseisens noch mit der näheren Gestalt und Grösse des I förmigen Querschnittes insoferne veränderlich, als der Werth für R nicht immer nach der Festigkeit kurzer Stücke bemessen werden darf, sondern nach der geringeren oder grösseren Steifigkeit der Flanschen mehr oder weniger herabzumindern ist, um kein Verbiegen derselben besorgen zu dürfen;

3. endlich ist, wie schon in der Anmerkung 2 ad §. 145 angeführt wurde, für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens nicht das Verhältniss zwischen den Festigkeiten A und R, sondern jenes zwischen den betreffenden Elasticitätsgränzwerthen a und r massgebend, daher in der Praxis dieses, und nicht das von $A : R$, als Anhaltspunct zu dienen hat, nachdem dieselbe das grösste sichere Tragvermögen, nicht aber die grösste Bruchfestigkeit beabsichtigt.

viel ist übrigens vorauszusehen, dass die Formverhältnisse der Materialgattung anzupassen sein werden. Indem nämlich das Tragmoment des Querschnittes im Allgemeinen mittelst Alternativwerthen auszudrücken ist, kann es geschehen, dass zur Erreichung des grössten Tragmomentes bald der eine, bald der andere jener Alternativwerthe zu einem Maximum gemacht werden muss, je nachdem einer von beiden nach Verschiedenheit der Materialgattung das Tragmoment vorstellt. Diese zwei Fälle sind daher abgesondert zu betrachten.

Fig. 207.



1. Ist bei dem zu verwendenden Materiale $r \gtreqless a$ (wie z. B. bei dem Schmiedeeisen), so wird diejenige Stellung des Querschnittes (Fig. 207) die vortheilhaftere sein, wo die Fasern an der schmalen Seite der ⊤ Form ausgedehnt, und jene an der breiten Seite zusammengedrückt werden. Sodann wird das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{aT}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{aT}{h''}. \end{cases}$$

Ist ferner, wie in der Regel für Schmiedeeisen, $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, also der erste Alternativwerth der kleinere, so hat man das Tragmoment

$$M = \frac{aT}{h'}, \text{ oder}$$

$$M = \frac{4(1-mn)(1-mn^2) - 3(1-mn^2)^2}{6(1-mn)(1-mn^2)} aFH \quad . \quad (256),$$

zu setzen, wenn man die Relationen (187) für h' und T berücksichtigt, und die dort mit m und n bezeichneten Verhältnisszahlen beibehält.

Es entsteht nunmehr die Frage, für welche Werthe von m und n das grösste Tragmoment des Querschnittes erreicht werden kann, wenn seine grösste Breite B, seine grösste Höhe H und sein Flächenraum F gegeben ist. Zur Beantwortung dieser Frage hat man, wie im §. 137, die Grössen B, H und F als constant, m und n aber als variabel zu betrachten. Setzt man auch hier, wie in jenem §.,

$mn = \gamma = 1 - \frac{F}{BH}$, so wird zunächst das Tragmoment

$$M = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2}{6(1-\gamma)(1-\gamma n)} a F H$$

und dasselbe ein Maximum für

$$\frac{dM}{dn} = \frac{\gamma a F H}{6(1-\gamma)(1-\gamma n)^2}\left[(7-4\gamma) - 2(4-\gamma)n + \gamma(4-\gamma)n^2\right] = 0,$$

daher für

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{2(1-\gamma)}{\sqrt{4-\gamma}}\right] \\ \text{und } m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma}{(7-4\gamma)}\left[4-\gamma+2(1-\gamma)\sqrt{4-\gamma}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (257),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2 M}{dn^2}$ negativ ausfällt.

Mit Hilfe dieses besonderen Werthes von n erhält man das gesuchte Maximal-Tragmoment

$$M = \frac{2}{3}\left(\frac{2-\sqrt{4-\gamma}}{\gamma}\right) a F H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258).$$

Auch ist $H' = nH$ und $B' = mB$, ferner die Dicke des horizontalen Stückes

$$\left.\begin{aligned} (H-H') &= (1-n)H = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right)H \\ &\text{und jene des verticalen} \\ (B-B') &= (1-m)B = \left(\frac{1-\gamma}{7-4\gamma}\right)(7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma})B, \end{aligned}\right\} \quad (259),$$

so wie das Verhältniss beider Dicken

$$(H-H'):(B-B') = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right)H : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right)B.$$

Endlich hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Gleichungen

$$h' = \frac{1}{\sqrt{4-\gamma}} H \text{ und } h'' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4-\gamma}}\right)H \quad . \quad (260).$$

Wird nach diesen Werthen die ⊤ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen H, B und F das grösste Tragvermögen, wenn unter diesen Umständen das Tragmoment M in der That durch den Ausdruck $\frac{aT}{h'}$ vorgestellt wird.

Sei z. B., wie im §. 137, $B = 4''$, $H = 6''$, $F = 8 \square''$, $mn = 1 - \frac{F}{BH} = \gamma = \frac{2}{3}$, so findet man aus den obigen Formeln

$n = 0{\cdot}9524$	$H' = 5{\cdot}714''$	$(H - H') = 0{\cdot}286''$	$h' = 0{\cdot}548\,H$
$m = 0{\cdot}7000$	$B' = 2{\cdot}8''$	$(B - B') = 1{\cdot}2''$	$h'' = 0{\cdot}452\,H$

und

$$M = 0{\cdot}1743\,a\,F\,H.$$

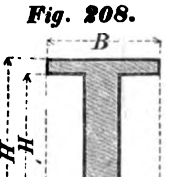


Fig. 208.

Diese beispielsweisen Formverhältnisse, welche in der Fig. 208 anschaulich gemacht sind, erscheinen als die zweckmässigsten für einen schmiedeeisernen Träger, wenn hierbei $\frac{aT}{h'}$ nicht grösser, als $\frac{rT}{h''}$, daher $\frac{a}{0{\cdot}548} \overline{\overline{<}} \frac{r}{0{\cdot}452}$ wird, was in der Regel der Fall ist.

Da γ zwischen den Gränzen 0 und 1 variiren kann, so ergeben sich für die vortheilhaftesten Formverhältnisse gewisse Gränzen. Es wird nämlich

für $\gamma = 0$ . . . $(H - H') : (B - B') = \frac{1}{8} H : B$
und $h' : h'' = 1 : 1$,

für $\gamma = 1$ aber $(H - H') : (B - B') = H : 2(1 + \sqrt{3})\,B$
$= H : 5{\cdot}4641\,B$,
und $h' : h'' = 1 : (\sqrt{3} - 1)$
$= 1 : 0{\cdot}7321$.

Die Formeln (259) zeigen, dass bei der zweckmässigsten Anordnung einer $\top$ Form die Dicke der horizontalen und jene der verticalen Wand im Allgemeinen ungleich ausfällt. Verlangt man jedoch, dass diese Dicken gleich werden sollen, so ist das Verhältniss zwischen der Breite B und der Höhe H nicht mehr willkürlich. Man hat sodann wegen $(B - B') = (H - H')$ allgemein

$$B : H = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right),$$

und dieses Verhältniss variirt je nach den verschiedenen Werthen von γ zwischen den Gränzen

$$1 : 8 \text{ und } 1 : 2\,(1 + \sqrt{3}) = 1 : 5{\cdot}4641.$$

So z. B. wäre für $\gamma = \frac{2}{3}$ $B : H = 0{\cdot}048 : 0{\cdot}3 = 1 : 6{\cdot}25$.

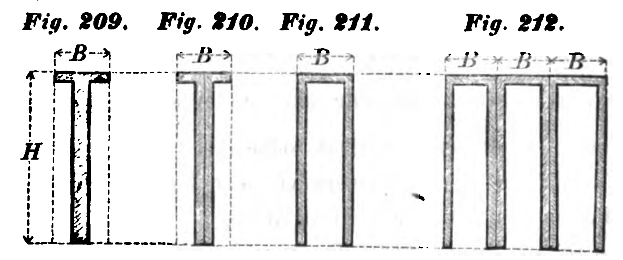
Verlangt man hingegen, dass die Dicke der horizontalen Wand nur halb so gross, als jene der verticalen sein soll, so ist wegen

$(B - B') = 2\,(H - H')$ allgemein zu setzen

$$B : H = \frac{2}{\gamma}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\gamma}} - 1\right) : \left(\frac{7-\gamma-2\gamma\sqrt{4-\gamma}}{7-4\gamma}\right).$$

So z. B. wäre für $\gamma = \frac{1}{2}$ dieses Verhältniss $B : H = 1 : 3{\cdot}125$ (Fig. 209).

Fig. 209. *Fig. 210.* *Fig. 211.* *Fig. 212.*



Durch die Theilung der verticalen Wand in zwei gleiche Theile wird man auch auf die Querschnittsformen Fig. 210 und 211 geführt, wenn man sich in der letzten Figur die beiden verticalen Theile auseinander geschoben vorstellt. Diese Querschnittsformen sind darum bemerkenswerth, weil die betreffenden Träger aus gleich dicken Eisenstücken construirt werden können. Auch die Aneinanderreihung mehrerer solcher Querschnitte (Fig. 212) kann mit Vortheil geschehen. Werden die Wände sehr dünn, so geht das obige Verhältniss zwischen B und H über in $1 : (1 + \sqrt{3}) = 1 : 2{\cdot}7321$.

2. Ist das Materiale des ┬ förmigen Trägers Gusseisen, so ist diejenige Querschnittslage die vortheilhaftere, wo die Ausdehnung an der breiten Seite der ┬ Form und die Zusammendrückung an der schmalen Seite stattfindet. Sodann ist das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{aT}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{rT}{h''}, \end{cases}$$

und dabei mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in den Relationen (187)

$$h' = \frac{(1 - 2mn + mn^2)}{2\,(1 - mn)} H,\quad h'' = \frac{(1 - mn^2)}{2\,(1 - mn)} H,$$

$$\text{und } T = \frac{4\,(1 - mn)\,(1 - mn^3) - 3\,(1 - mn^2)^2}{12\,(1 - mn)^2} F H^2.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass in diesem Falle der erste Alternativwerth $\frac{aT}{h'}$ zu einem Maximum zu machen ist,

wenn man die Frage zu beantworten hat, welche Formverhältnisse als die zweckmässigsten zur Erreichung des grössten Tragvermögens anzusehen sind. Denn das Maximum des zweiten Alternativwerthes $\frac{rT}{h''}$ würde wieder auf die Formverhältnisse führen, welche vorhin für Schmiedeeisen gefunden wurden; nur wären die Werthe (260) für h' und h'' mit einander zu verwechseln. Bei diesen Formverhältnissen könnte aber der Werth $\frac{rT}{h''}$ nicht mehr das Tragmoment vorstellen, weil derselbe bei dem Gusseisen (wegen $r \gtreqless 2a$) nicht mehr der kleinere von den beiden Alternativwerthen in der Formel für das Tragmoment wäre.

Um daher das grösste Tragvermögen für ┬ förmige Träger aus Gusseisen zu erhalten, drücke man dieses Moment durch die Formel

$$M = \frac{aT}{h'}$$

aus, und treffe eine solche Wahl in den Verhältnissen der ┬ Form, dass jener Ausdruck ein Maximum wird. Dem gemäss hat man

$$M = \frac{4(1-mn)(1-mn^2)-3(1-mn^2)^2}{6(1-mn)\,(1-2mn+mn^2)}\,aFH\ . \quad (261),$$

und, wenn man wie früher $\gamma = mn = 1 - \frac{F}{BH}$ setzt, auch

$$M = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2)-3(1-\gamma n)^2}{6(1-\gamma)\,(1-2\gamma+\gamma n)}\,aFH$$

$$= \frac{(1-4\gamma+6\gamma n-4\gamma n^2+\gamma^2 n^2)}{6(1-\gamma)\,(1-2\gamma+\gamma n)}\,aFH.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{dM}{dn} = \frac{\gamma aFH}{6(1-\gamma)}\left[\frac{(5-8\gamma)-2(1-2\gamma)(4-\gamma)n-\gamma(4-\gamma)n^2}{(1-2\gamma+\gamma n)^2}\right] = 0,$$

also für

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{\gamma}\left[-1+2\gamma+2(1-\gamma)\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right] \text{ und} \\ m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma(4-\gamma)}{(-5+8\gamma)}\left[-1+2\gamma-2(1-\gamma)\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (262),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2M}{dn^2}$ negativ wird.

Mittelst des gefundenen Werthes für n erhält man nun das **Maximal-Tragmoment**

$$M = \frac{2}{3\gamma}\left(2-\gamma-\sqrt{(1-\gamma)(4-\gamma)}\right) a F H \quad . \quad (263).$$

Zugleich ist die Dicke der horizontalen Wand

$$(H-H') = (1-n) H = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right) H$$

jene der verticalen aber

$$(B-B') = (1-m) B = \frac{(1-\gamma)^2}{(-5+8\gamma)}\left[-5+2\gamma+2\gamma\sqrt{\frac{4-\gamma}{1-\gamma}}\right] B \quad (264)$$

endlich das Verhältniss beider Wanddicken

$$(H-H') : (B-B') =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[1-2\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right] H : \left(\frac{1-\gamma}{-5+8\gamma}\right)\left[-5+2\gamma+2\gamma\sqrt{\frac{4-\gamma}{1-\gamma}}\right] B.$$

Noch hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Werthe

$$h' = \sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\, H \text{ und } h'' = \left(1-\sqrt{\frac{1-\gamma}{4-\gamma}}\right) H. \quad (265).$$

Wird hiernach die $\top$ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen B, H und F das grösste Tragvermögen. Dabei muss aber gleichzeitig $\frac{a}{h'} \overline{\gtrless} \frac{r}{h''}$, d. i. $\frac{h''}{h'} \overline{\gtrless} \frac{r}{a}$ sein, also auch wegen der Gleichungen (265)

$$\gamma \overline{\gtrless} \frac{(r-a)(r+3a)}{r(r+2a)} = \left(\frac{r^2+2ar-3a^2}{r^2+2ar}\right) = 1 - \frac{3a^2}{r(r+3a)}$$

und

$$F \overline{\gtrless} \frac{3a^2}{r(r+2a)} B H.$$

Der Gebrauch der vorigen Gleichungen zur Ausmittlung der zweckmässigsten Eormverhältnisse des $\top$ förmigen Querschnittes für gusseiserne Träger erscheint somit an die Bedingung geknüpft, dass der Flächenraum der $\top$ Form nicht kleiner als $\frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$ sein darf, Der Gegenfall erfordert eine besondere Untersuchung. Man wird desshalb zwischen folgenden drei Fällen unterscheiden:

$$A)\ F > \frac{3a^2}{r(r+2a)} B H,$$

$$B)\ F = \frac{3a^2}{r(r+2a)} B H$$

$$\text{und } C)\ F < \frac{3a^2}{r(r+2a)} B H.$$

Der Werth von $\frac{3a^2}{r(r+2a)} = \frac{3}{\frac{r}{a}\left(\frac{r}{a}+2\right)}$, welcher diese Fälle gruppirt, variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{r}{a}$. So z. B. wird für

$$\frac{r}{a} = 2 \text{ jener Werth } = \tfrac{3}{8},$$
$$\frac{r}{a} = 3 \quad „ \quad „ \quad = \tfrac{1}{5},$$
$$\frac{r}{a} = 4 \quad „ \quad „ \quad = \tfrac{1}{40}.$$

Bei der Wahl des Verhältnisses $\frac{r}{a}$ ist übrigens in Erwägung zu ziehen, dass dasselbe nicht nur von der Qualität des Gusseisens, sondern auch von dem Grade der Steifigkeit des ganzen Querschnittes, vorzüglich der verticalen Wand abhängt. Aus diesem Grunde wird das erwähnte Verhältniss nicht selten, namentlich bei dünnen Wänden, weit kleiner sein, als jenes, welches mit Rücksicht auf den eigentlichen Widerstand gegen Zusammendrückung zugelassen werden könnte. So z. B. kann es geschehen, dass man sich bestimmt findet, in die obigen Formeln für das Verhältniss $\frac{r}{a}$ nur den Werth 2 einzuführen, obgleich dasselbe, wenn die Pressung bloss auf ganz kurze Stücke bezogen wird, vielleicht bis 4 gesteigert werden dürfte.

A) Ist $F > \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so dienen die Formeln (262), (263), (264) und (265) zur Basis für die Ausmittlung der vortheilhaftesten Verhältnisse der ⊤ Form.

Ex. Es sei $\frac{r}{a} = 2$, der Flächenraum $F = \frac{1}{2} BH$, daher in der That grösser, als $\frac{3a^2}{r(r+2a)} BH = \frac{3}{8} BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{2}$

$n = 0{\cdot}7560$	$h' = 0{\cdot}3780\,H$	$H' = 0{\cdot}7560\,H$	$(H - H') = 0{\cdot}2440\,H$
$m = 0{\cdot}6614$	$h'' = 0{\cdot}6620\,H$	$B' = 0{\cdot}6614\,B$	$(B - B') = 0{\cdot}3386\,B$,

$$(H - H') : (B - B') = H : 1{\cdot}388\,B \text{ und}$$

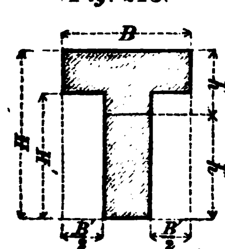
$$M = \tfrac{2}{3}(3 - \sqrt{7})\,aFH = 0{\cdot}2362\,aFH.$$

Soll $(H - H') = (B - B')$, d. i. die Dicke der horizontalen Wand eben so gross, wie jene der verticalen werden, so muss überdiess

$$B : H = 1 : 1{\cdot}388$$

sein. In der Figur 213 sind diese speciellen Formverhältnisse anschaulich gemacht.

Fig. 213.



Im vorliegenden Falle ist offenbar $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, es wird somit für die zweckmässigste Materialvertheilung in der ⊤ Form des Trägers bei der Biegung die Elasticitätsgränze nur in den gespanntesten Querschnittstheilen erreicht.

B) Ist $F = \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so lassen sich die vorigen Gleichungen noch immer anwenden.

Ex. Es sei wieder $\frac{r}{a} = 2$ und der Flächenraum

$$F = \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH = \tfrac{3}{8} BH.$$

In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{5}{8}$

$$\begin{array}{l|l|l|l} m = 0{\cdot}8 & h' = \frac{1}{3} H & H' = 0{\cdot}8\, H & (H - H') = 0{\cdot}2\, H \\ m = \frac{25}{32} & h'' = \frac{2}{3} H & B' = \frac{25}{32}\, H & (B - B') = \frac{7}{32}\, H, \end{array}$$

$$(H - H') : (B - B') = 32\, H : 35\, B \quad \text{und}$$

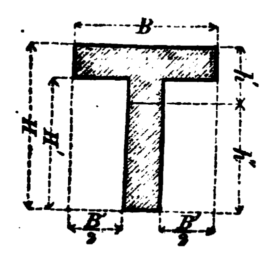
$$M = \tfrac{4}{15}\, a F H = 0{\cdot}2667\, a F H.$$

Für gleiche Wanddicken muss ausserdem

$$B : H = 32 : 35 = 1 : 1{\cdot}094$$

sein. Diese besonderen Formverhältnisse sind in der Fig. 214 dargestellt.

Fig. 214.



Hier werden offenbar wegen $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ bei der Biegung des Trägers die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen gleichzeitig erreicht.

C) Ist endlich $F < \frac{3a^2}{r(r+2a)} BH$, so lassen sich, wie bereits bemerkt wurde, die bisherigen Formeln nicht mehr anwenden. Der Werth von $\frac{aT}{h'}$ kann

zwar noch immer zu einem Maximum gemacht werden, allein es würde hiernach h' so klein und $\frac{aT}{h'}$ so gross ausfallen, dass man genöthigt wäre, zu dem Werthe $\frac{rT}{h''}$, als dem kleineren, zurückzukehren. In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{aT}{h'}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass das Tragmoment noch durch diese Formel repräsentirt werden kann. Offenbar geschieht dieser Bedingung Genüge für

$$\frac{aT}{h'} = \frac{rT}{h''},$$

d. h. für $h' = \frac{a}{(a+r)} H$ und $h'' = \frac{r}{(a+r)} H$.

In einem solchen Falle ist also die zweckmässigste ⊤ Form für gusseiserne Träger diejenige, wo bei der Biegung die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen **gleichzeitig** erreicht werden. Die vortheilhaftesten Verhältnisszahlen m und n kann man finden, wenn eine der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h' &= \frac{(1-2\gamma+\gamma n)}{2(1-\gamma)} H = \frac{a}{(a+r)} H \quad . \; . \\ \text{und } h'' &= \frac{(1-\gamma n)}{2(1-\gamma)} H = \frac{r}{(a+r)} H \quad . \; . \end{aligned}\right\} \quad (266)$$

nach n aufgelöset wird. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)}{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma}, \quad . \; . \; . \; . \\ &\text{somit} \\ m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)} \quad . \; . \end{aligned}\right\} \quad (267)$$

und hiernach das Maximal-Tragmoment

$$M = \frac{\gamma r^2 - (r-a)^2}{3(a+r)\gamma} FH = \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{a} - 1\right)^2}{3\left(1+\frac{r}{a}\right)} aFH \quad (268).$$

Ex. Es sei $\frac{r}{a} = 2$, ferner $F = \frac{1}{8} BH$, daher in der That kleiner, als $\frac{2a^2}{r(r+2a)} \cdot BH = \frac{2}{8} BH$. In diesem Falle hat man wegen

$$\gamma = 1 - \frac{F}{BH} = \frac{2}{3},$$

$$n = \tfrac{5}{6} \;\Big|\; h' = \tfrac{1}{3}H \;\Big|\; H' = \tfrac{5}{6}H \;\Big|\; (H - H') = \tfrac{1}{6}H$$

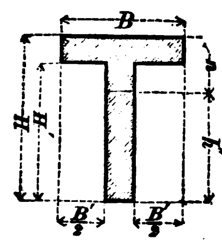
$$m = \tfrac{4}{5} \;\Big|\; h'' = \tfrac{2}{3}H \;\Big|\; B' = \tfrac{4}{5}H \;\Big|\; (B - B') = \tfrac{1}{5}B,$$

$$(H - H') : (B - B') = 5H : 6B \quad \text{und}$$

$$M = \tfrac{5}{18}\,aFH = 0{\cdot}2778\,aFH.$$

Für gleiche Wanddicken wäre ausserdem wegen $(B - B') = (H - H')$ die Anordnung $B : H = 5 : 6$ nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind mittelst der Figur 215 anschaulich gemacht.

Fig. 215.



In den gewählten Beispielen (Fig. 213, 214 und 215) hat man für das Tragmoment M die beziehungsweisen Werthe $0{\cdot}2362\,aFH$, $0{\cdot}2667\,aFH$ und $0{\cdot}2778\,aFH$ gefunden. Einem Rechtecke von einerlei Höhe und Flächenraum würde nach der Relation (96), weil für Gusseisen $a < r$ ist, nur das Tragmoment $\frac{1}{6}aFH = 0{\cdot}1667\,aFH$ entsprechen. Der Vergleich zwischen diesem und jenen obigen Werthen lässt die verhältnissmässig grosse Stärke gusseiserner Träger mit ┬ förmigen Querschnitten erkennen, obgleich dieselbe gegen diejenige zurückbleibt, welche durch die Anwendung der I Form mit ungleichen Flanschen erreicht werden kann.

Aus diesen Resultaten kann man wieder auf ähnliche Weise, wie zuvor für Schmiedeeisen, auch für Gusseisen die Zweckmässigkeit des Zertheilens eines gegebenen Flächenraumes in mehrere gleiche ┬ Formen nachweisen.

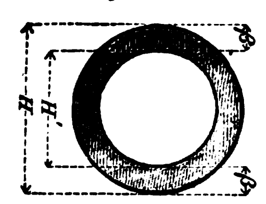
§. 150.

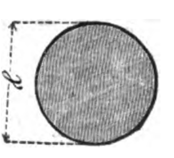
Röhrenquerschnitte. Mit Bezug auf die Bezeichnungen und die Resultate im §. 138 kann man das Tragmoment eines ringförmigen Querschnittes (Fig. 216) durch die Formel ausdrücken

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{aT}{h'} = \frac{1}{8}(1+n^2)\,aFH = \frac{1}{8}(2-2x+x^2)\,aFH \\ \text{oder } \dfrac{rT}{h''} = \frac{1}{8}(1+n^2)\,rFH = \frac{1}{8}(2-2x+x^2)\,rFH. \end{cases}$$

Für einen vollen Kreis (Fig. 217), welcher den gleichen Flächenraum wie die Ringform hat, ist der Durchmesser

Fig. 216. Fig. 217.





$$\gamma = H\sqrt{1-n^2} = H\sqrt{2x-x^2}$$

und das Tragmoment

$$M' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{8} a F\gamma = \frac{1}{8}\sqrt{1-n^2} \,.\, aFH = \frac{1}{8}\sqrt{2x-x^2} \,.\, aFH \\ \text{oder } \frac{1}{8} r F\gamma = \frac{1}{8}\sqrt{1-n^2} \,.\, rFH = \frac{1}{8}\sqrt{2x-x^2} \,.\, rFH. \end{cases}$$

Demnach findet man durch Vergleichung

$$M' : M = \sqrt{1-n^2} : (1+n^2) = \sqrt{2x-x^2} : (2-2x+x^2) \quad . \quad (269).$$

Insbesondere wird

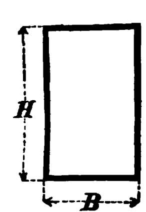
für $x = 1$,	$\beta = 0{\cdot}50\,H$	u. $M' : M$	$= 1 : 1$,
„ $x = 0{\cdot}9$,	$\beta = 0{\cdot}45\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}015$,
„ $x = 0{\cdot}8$,	$\beta = 0{\cdot}40\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}062$,
„ $x = 0{\cdot}7$,	$\beta = 0{\cdot}35\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}143$,
„ $x = 0{\cdot}6$,	$\beta = 0{\cdot}30\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}266$,
„ $x = 0{\cdot}5$,	$\beta = 0{\cdot}25\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}443$,
„ $x = 0{\cdot}4$,	$\beta = 0{\cdot}20\,H$	„ „	$= 1 : 1{\cdot}700$,
„ $x = 0{\cdot}3$,	$\beta = 0{\cdot}15\,H$	„ „	$= 1 : 2{\cdot}087$,
„ $x = 0{\cdot}2$,	$\beta = 0{\cdot}10\,H$	„ „	$= 1 : 2{\cdot}733$.

Der Relation (269) zu Folge wird eine cylindrische Röhre desto stärker, je grösser bei einem gegebenen Materialquantum der Röhrendurchmesser ist. Die Vergrösserung dieses Durchmessers auf Kosten der Röhrenwanddicke hat übrigens eine practische Gränze, wie man diess bereits im §. 138 bemerkt hat.

§. 151.

Blechröhrenquerschnitte. Mit Rücksicht auf den § 139 und unter Beibehaltung der dort eingeführten Näherungen hat man zuerst für eine Blechröhre mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 218) wegen $T = \frac{1}{12}\frac{(H+3B)}{(H+B)} FH^2$ und $h' = h'' = \frac{1}{2} H$ für das Tragmoment

Fig. 218.



$$M = \frac{1}{6}\frac{(H+3B)}{(H+B)} r F H \quad . \quad . \quad . \quad (270),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtreqless a$, also von den betreffenden Alternativwerthen für das Tragmoment wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H$ jener mit dem Factor r zu nehmen ist.

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient

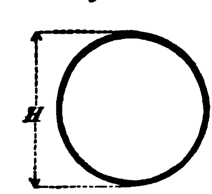
$$\frac{1}{6}\frac{(H+3B)}{(H+B)} = \frac{1}{6}\frac{\left(1+3\frac{B}{H}\right)}{\left(1+\frac{B}{H}\right)}$$

variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die Gränzen für diesen Coefficienten findet man, die eine für $B = o$ mit $\frac{1}{6}$, und die andere für $H = o$ mit $\frac{1}{2}$. Ist $B = H$, so geht das Rechteck in ein Quadrat über, und es wird

$$M = \frac{1}{3} r F H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (271).$$

In diesem Falle ist der fragliche Coefficient ($\frac{1}{3}$) das arithmetische Mittel zwischen jenen Gränzwerthen, und doppelt so gross, wie bei einem vollen Quadrate ($\frac{1}{6}$).

Fig. 219.



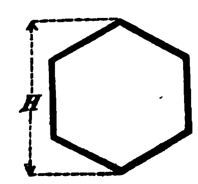
Für eine cylindrische Blechröhre (Fig. 219) hat man mit Rücksicht auf die Formel (243) $T = \frac{1}{8} F H^2$, man findet daher, weil $h' = h'' = \frac{1}{2} H$ ist, das Tragmoment

$$M = \frac{1}{4} r F H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (272).$$

Auch hier ist der Coefficient ($\frac{1}{4}$) doppelt so gross, wie für den vollen Kreisquerschnitt ($\frac{1}{8}$).

Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein regelmässiges Polygon (Fig. 220), so hat man das Tragmoment mit Benützung der Formel (241) auf analoge Weise, wie für die vollen Polygone (§. 123) aufzusuchen. Wie dort, so wird auch hier das Tragmoment mit den verschiedenen Polygonstellungen variiren, und für dasselbe stets ein Maximal- und ein Minimal-Werth vorhanden sein.

Fig. 220.



§. 152.

Vergleichung des Tragvermögens von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren. Zur Durchführung einer solchen Vergleichung behalte man die im §. 140 gewählte Bezeichnungsweise bei, und benütze die betreffenden Formeln aus dem vorigen §.

Hiernach findet man für den rechteckigen Querschnitt

die Fläche . . . . $F_1 = 2(H_1 + B_1)\beta_1$,

und das Tragmoment . . . . . . $M_1 = \frac{1}{3}(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1$,

ferner für den kreisrunden Querschnitt

die Fläche . . . . $F_2 = \pi H_2 \beta_2$

und das Tragmoment . . . . . . $M_2 = \frac{\pi}{4}\beta_2 H_2^2$,

also durch Vergleichung

$$M_1 : M_2 = 4(H_1 + 3B_1)\beta_1 H_1 : 3\pi\beta_2 H_2^2 \quad . . . \quad (273).$$

1. Nimmt man für beide Querschnitte gleiche Wanddicken, gleiche Höhen und gleiche Blechmengen an, d. i. $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$ und $F_1 = F_2$, so wird zunächst, wie im §. 140

$$B_1 = \frac{(\pi - 2)}{2} H_1 = 0{\cdot}5708 H_1$$

und hiernach

$$\left.\begin{aligned} M_1 : M_2 &= 4(H_1 + 3B_1) : 3\pi H_2 \\ &= 2(3\pi - 4) \quad : 3 \\ &= 1{\cdot}151 \quad : 1 \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad (274).$$

Dieses Verhältniss stimmt mit dem sub (246) Angegebenen überein.

Die vierkantige Röhre ist daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Höhe und gleicher Blechmenge stärker, als die cylindrische.

2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$, und setzt man auch in diesem Falle $\beta_1 = \beta_2$ und $F_1 = F_2$, also $4H_1 = \pi H_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (273) auf

$$\left.\begin{aligned} M_1 : M_2 &= 16 H_1^2 : 3\pi H_2^2 \\ &= \quad \pi \quad : 3 \\ &= 1{\cdot}047 : 1 \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad (275).$$

Bei gleicher Wanddicke und gleicher Blechmenge ist also die vierkantige Röhre auch dann stärker, als

die cylindrische, wenn jene einen quadratischen Querschnitt hat.

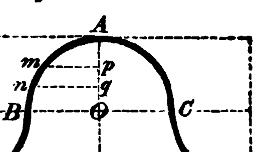
Dieses Resultat ist in soferne bemerkenswerth, als zu Folge der Relation (247) die Steifigkeit der verglichenen Röhren in umgekehrter Weise zu beurtheilen ist.

§. 153.

Cannelirtes Blech (Fig. 221). Mit Bezug auf die im §. 141 eingeführten Bezeichnungen wird das Tragmoment M einer Cannelirung (Fig. 222)

Fig. 221.

Fig. 222.



$$M = \frac{rT}{h'} = \frac{4rt}{c} = \frac{r\beta b^2}{2c}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right]$$

$$= \frac{rb\beta}{n}\left[\left(2n^2+1+\frac{1}{4n^2}\right)\lambda - (1+n^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4n^2}\right)b\right] \quad . \quad (276),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtrless a$, also von den beiden Alternativwerthen für das Tragmoment wegen $h' = h'' = c$ jener mit dem Factor r als der kleinere anzunehmen ist.

Für $n = \frac{4}{3}$ wurde z. B. im §. 141 $T = 0{\cdot}1191\, FH^2$ gefunden. In diesem Falle ist daher das Tragmoment

$$M = 0{\cdot}2382\, r\, F\, H.$$

Einem Rechtecke von einerlei Höhe und Querschnittsgrösse würde nur das Tragmoment

$$M' = \tfrac{1}{6}\, r\, FH = 0{\cdot}1667\, r\, FH$$

entsprechen.

Aus der Vergleichung der Werthe für M und M' ergibt sich nunmehr die Proportion

$$M : M' = 0{\cdot}2382\, rFH : 0{\cdot}1667\, rFH = 1{\cdot}4292 : 1$$

und hieraus der Schluss, dass das cannelirte Blech eine bedeutende Stärke besitzt.

§. 154.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens, wenn die Biegungscurve Wendepuncte hat. In dem §. 145 hat man die Bedingungen für die zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Höhe behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens kennen gelernt, wenn die Biegungscurve keinen Wendepunct hat. Es erübriget daher noch den Fall zu untersuchen, wenn in der Biegungscurve Wendepuncte vorhanden sind. Dass dieser Umstand auf die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen einen Einfluss hat, leuchtet aus dem 2. Kapitel dieses Abschnittes, welcher die Lage des gefährlichen Querschnittes behandelt, ein, indem von der Art und Weise der entgegengesetzten Krümmungen der Biegungscurve die Lage des gefährlichen Querschnittes, von dieser Lage aber das Tragmoment, also auch das Tragvermögen abhängt.

Um die Bedingungen für die zweckmässigste Materialvertheilung in einem Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens zu erfahren, wenn die Biegungscurve Wendepuncte enthält, nehme man die allgemeine Untersuchung in den §§. 133 und 145 wieder auf, bezeichne aber die Höhenabschnitte h' und h'' in der Figur 178 gegenwärtig mit α und β, so dass das Trägheitsmoment des Querschnittes nach der Formel (228) durch

$$T = \alpha \beta F$$

ausgedrückt ist.

In jenen citirten §§. hat man sich vorgestellt, dass bei der Biegung die Querschnittstheile in $\overline{A' A''}$ (Fig. 178) ausgedehnt, jene in $\overline{B' B''}$ aber zusammengedrückt werden.

Wäre nun der gefährliche Querschnitt in der That an einer Stelle vorhanden, wo eine solche Anspruchsnahme stattfindet (wie z. B. in N_1 Fig. 169), so hätte man das Tragmoment M_1 durch die Formel auszudrücken

$$M_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{a T}{\alpha} = a \beta F \\ \text{oder } \frac{r T}{\beta} = r \alpha F \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (277).$$

Wäre hingegen der gefährliche Querschnitt in einem entgegengesetzt gekrümmten Theile des Trägers vorhanden, wo also die Anspruchsnahme im Querschnitte in verkehrter Weise stattfindet (wie z. B. in N_2 Fig. 169), so würde das Tragmoment aus der Formel

$$M_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{a\,T}{\beta} = a\,\alpha\,F \\ \text{oder } \frac{r\,T}{\alpha} = r\,\beta\,F \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (278)$$

zu bestimmen sein.

Das Verhältniss zwischen M_1 und M_2 kann mit Rücksicht auf den §. 81 dargestellt werden; denn diese beiden Tragmomente beziehen sich auf einen und denselben Querschnitt, wobei die Anspruchsnahme in dem einen Falle gegen jene in dem anderen Falle in verkehrter Weise stattfindet. Das Verhältniss $\frac{M_1}{M_2}$ wird daher entweder den Werth von $\frac{\beta}{\alpha}$, oder den von $\frac{a}{r}$ annehmen, je nachdem sich der erste oder zweite mehr der Einheit nähert. Aus dem §. 81 geht übrigens hervor, dass diese Verhältnisswerthe unter gewissen Umständen sich auch verkehren, nämlich in $\frac{\alpha}{\beta}$ und beziehungsweise $\frac{r}{a}$ übergehen.

Hiernach unterscheide man, ob das Verhältniss zwischen M_1 und M_2 nach dem Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$ oder nach jenem von $\frac{a}{r}$ zu bemessen kommt. Zugleich bezeichne man, wie im §. 124, die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente mit $R_1\,z_1$ und $R_2\,z_2$.

1. Verhält sich $M_1 : M_2$ wie $\beta : \alpha$, so ist die zweckmässigste Vertheilung der gegebenen Fläche (Fig. 178) behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens diejenige, bei welcher der gefährliche Querschnitt in den beiden entgegengesetzten Krümmungen des Trägers zugleich (wie z. B. in N_1 und N_2 Fig. 169) zu liegen kommt.

Dieser Bedingung entsprechen zu Folge der Gleichung (225) die Relationen

$$\left. \begin{array}{r} \beta : \alpha = R_1\,z_1 : R_2\,z_2 \\ \text{und } f' : f'' = R_1\,z_1 : R_2\,z_2 \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (279),$$

wornach sowohl die Höhe $H = \alpha + \beta$, als auch die Fläche $F = f' + f''$ derart zertheilt wird, dass sich die einzelnen Theile zu einander immer wie die bezüglichen Maximal-Kraftmomente verhalten.

Hiervon ist der Grund leicht einzusehen, wenn man in Erwägung zieht, dass — nachdem $\alpha + \beta = H$ eine constante Grösse ist — durch eine anders vorgenommene Theilung zwar das eine Tragmoment (z. B. M_1) grösser werden könnte, gleichzeitig aber das andere Tragmoment (also M_2) kleiner würde, so dass jedenfalls an Tragvermögen verloren ginge. Statt den Kraftmomenten $R_1 x_1$ und $R_2 x_2$ können auch die correspondirenden Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 eingeführt werden, da bekanntlich

$$R_1 x_1 : R_2 x_2 = \frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} = \varrho_2 : \varrho_1 \text{ ist.}$$

Hiernach gehen die vorigen Bedingungsgleichungen auch in folgende über

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \beta = \varrho_1 : \varrho_2 \\ f' : f'' = \varrho_2 : \varrho_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280).$$

Die Proportion $f' : f'' = \varrho_2 : \varrho_1$ enthält die Regel, dass die ganze Querschnittsfläche F in zwei solche Theile f' und f'' zu theilen ist, welche sich der Grösse nach, wie umgekehrt die kleinsten numerischen Werthe beziehungsweise von den positiven und von den negativen Krümmungshalbmessern der Biegungscurve verhalten, und dass diese Theile nach Zulässigkeit oben und unten an den Enden der Querschnittshöhe anzubringen sind, wenn in dem hier betrachteten Falle, wo die Biegungscurve entgegengesetzte Krümmungen hat, und zugleich $\frac{M_1}{M_2} = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, das grösste Tragvermögen angestrebt wird.

Da nun die fraglichen Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 mit der Gestalt der Biegungscurve, und diese wieder mit der Art und Intensität der einwirkenden Kräfte veränderlich sind, so leuchtet ein, dass die der obigen Regel entsprechenden Resultate für die zweckmässigste Materialvertheilung in dem Querschnitte eines prismatischen Trägers nicht nur je nach der Materialgattung, sondern auch je nach der Art und Weise der Anspruchsnahme des Trägers verschieden sein werden *).

*) Wäre nicht $M_1 : M_2 = \beta : \alpha$, sondern umgekehrt $M_1 : M_2 = \alpha : \beta$, so hätte man in den Relationen (280) ϱ_1 mit ϱ_2 zu verwechseln, wodurch sich nur das Verhältniss $f' : f''$ umkehrt, ohne dass das Theilungsgesetz verändert wird.

Da in dem behandelten Falle das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{oder eventuell } \frac{\alpha}{\beta}\right)$ der Einheit näher liegt, als jenes zwischen a und r, so differiren offenbar die Querschnittstheile f' und f'' im Allgemeinen weniger von einander, als in dem im §. 145 behandelten Falle, wo die Biegungscurve keinen Wendepunct hatte. Nur die Gleichheit der besagten Verhältnisse knüpft die beiderseitigen Theilungsgesetze an einander, indem sie sodann identisch werden.

2. Das zuvor gefundene Theilungsgesetz gilt nur so lange, als das nach den Gleichungen (280) erhaltene Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ von der Einheit nicht mehr abweicht, als jenes zwischen den Elasticitätsgränzwerthen a und r. Im entgegengesetzten Falle, wo offenbar das Verhältniss $M_1 : M_2$ nach jenem zwischen a und r zu beurtheilen ist, hat man jedoch — wie man nach einiger Ueberlegung erkennt — statt den Gleichungen (280) die folgenden

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \beta = a : r \\ f' : f' = r : a \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (281)$$

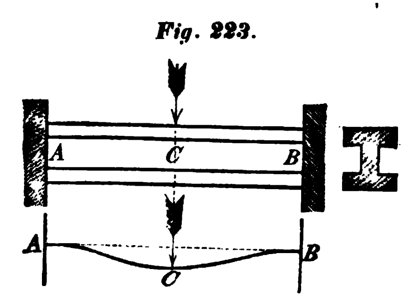
zu wählen, wenn auch jetzt die zweckmässigste Materialvertheilung im Querschnitte behufs der Erreichung des grössten Tragvermögens angestrebt wird. Diese Gleichungen sind übereinstimmend mit den im §. 145 gefundenen. Es ist daher in diesem Falle das Gesetz für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung dasselbe, wie in jenem §., d. h. es ist dann bezüglich des Tragvermögens gerade so, als ob nur die grösste Krümmung der Biegungscurve vorhanden wäre.

§. 155.

Anwendung der im vorigen §. gegebenen Regeln für schmiedeeiserne Träger. Kann man für Schmiedeeisen mit Rücksicht auf die Qualität und die anderweitigen Umstände die Gleichheit der Elasticitätsgränzwerthe a und r zulassen, so tritt der im vorigen §. ad 2 erörterte Fall ein. Wie dann auch die Form der Biegungscurve ist, so wird es für prismatische Träger stets das Zweckmässigste sein, im Querschnitte oben und unten gleiche Flächentheile anzubringen, so dass z. B. für I Formen gleiche Flanschen einen grösseren Vortheil, als ungleiche gewähren werden. Ist aber,

wie in vielen Fällen, $r < a$ anzunehmen, so kommt es darauf an, wie sich das numerische Verhältniss des grössten positiven zum grössten negativen Krümmungshalbmesser ($\varrho_1 : \varrho_2$) gestaltet. Sind diese Krümmungshalbmesser einander gleich, ist also $\varrho_1 = \varrho_2$, somit das Verhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = 1$, so erscheint nach der im vorigen §. ad 1 gegebenen Regel die Anwendung von gleichen Flächentheilen oben und unten im Querschnitte wieder die zweckmässigste. Es ist desshalb auch in diesem Falle bei der Construction einer I Form die Anordnung mit gleich grossen Flanschen, jener mit ungleich grossen vorzuziehen. Man wird in der Folge sehen, dass der Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ vorhanden wäre, wenn z. B. ein Träger (Fig. 223) an seinen beiden Enden A und B fest vermauert, und nur in der Mitte C belastet, dabei aber von dem eigenen Gewichte abstrahirt wird. Hier könnte also bei der I Form mit gleichen Flanschen das grösste Tragvermögen erreicht werden, wie auch die Elasticitätsgränzwerthe a und r sein mögen.

Fig. 223.



Wenn aber ausser a und r auch ϱ_1 und ϱ_2 von einander verschieden sind, z. B. $\varrho_1 < \varrho_2$ ist, so wird die zweckmässigste Querschnittsvertheilung nach dem Verhältnisse $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, so lange $\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \overline{\gtrless} \frac{a}{r}$ ist, sonst aber nach jenem von $\frac{r}{a}$ vorzunehmen sein.

§. 156.

Anwendung der im §. 154 gegebenen Regeln für gusseiserne Träger. Für Gusseisen ist $r > a$. Demungeachtet wird auch hier für $\varrho_1 = \varrho_2$ die Anordnung von gleichen Flächentheilen oben und unten die vortheilhafteste sein, wenn das grösste Tragvermögen erreicht werden soll, so dass z. B. für den Fall (Fig. 223) die Construction der I Form mit gleichen Flanschen noch immer jener mit ungleichen Flanschen vorzuziehen wäre. Sind aber die numerischen Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 von einander verschieden, so kommt es auch hier, wie bei dem Schmiedeeisen, auf das

Resultat der Vergleichung der beiden Verhältnisse an, wovon das erste zwischen ϱ_1 und ϱ_2, das andere aber zwischen a und r existirt. In diesem Falle erhält man im Querschnitte oben und unten ungleiche Flächentheile, daher auch beispielsweise für die zweckmässigste IForm ungleiche Flanschen, deren Grössenverhältniss je nach der Form der Biegungscurve von $1:1$ bis $r:a$ variiren kann. Bei prismatischen Trägern, deren Längenaxen nach entgegengesetzten Richtungen gebogen sind, kann daher die zweckmässigste Materialvertheilung im Querschnitte zur Erreichung des grössten Tragvermögens von jener bedeutend abweichen, die man im §. 145 kennen gelernt hat.

III. Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform eines Trägers, wenn sein mechanisches Widerstandsmoment unter sonst gleichen Umständen möglichst gross werden soll.

§. 157.

Hauptsatz. Das mechanische Widerstandsmoment, welches ein Träger ohne Gefahr für seinen Bestand entwickeln kann, ist in Gemässheit der Gleichungen (147) und (148) nach dem kleineren der beiden Alternativwerthe

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''} \end{cases}$$

zu bestimmen.

Eine Querschnittsform erscheint daher bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes desto zweckmässiger, je grösser unter sonst gleichen Umständen der kleinere von jenen Alternativwerthen ist.

§. 158.

Folgerung. Um die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsform in dem obigen Sinne kennen zu lernen, bemerke man, dass nach den Gleichungen (159) im §. 109 das mechanische Widerstandsmoment W auf die Form

$$w = \begin{cases} \text{entw. } C \cdot \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } C' \cdot \frac{r^2}{m} K \end{cases}$$

gebracht werden kann, wobei K den Körperraum des Trägers bezeichnet, und die Coefficienten C und C' nur von der Gestalt des Querschnittes abhängen. Der massgebende Werth für das mechanische Widerstandsmoment wird daher bei einem gegebenen Körperraume des Trägers und bei einer gegebenen Materialgattung desto grösser, je grösser der betreffende Coefficient (C oder C') ist.

§. 159.

Einfluss der Körperdimensionen. Der Einfluss der Körperdimensionen auf das mechanische Widerstandsmoment macht sich in einer anderen Weise geltend, als auf die Steifigkeit und auf das Tragvermögen. Während in diesen letzteren zwei Beziehungen die Höhe der Querschnittsfigur einen wesentlichen Einfluss hat, ist hier ausser der Querschnittsgestalt nur der Körperraum des Trägers zu berücksichtigen.

§. 160.

Zweckmässigste Vertheilung eines gegebenen Flächenraumes in einer gegebenen Querschnittshöhe behufs der Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes. Auf die Betrachtungen in den §§. 133 und 145 zurückkehrend, schliesst man, dass bei einer gegebenen Höhe des Querschnittes auch das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes auf die dort angegebene Weise erreicht würde, wenn man nämlich im Stande wäre, die Fläche des Querschnittes an den beiden Enden der Höhe, in zwei gerade Linien $\overline{A'A''}$ und $\overline{B'B''}$ (Fig. 178) zu drängen. Nur kömmt hier wiederholt die Frage zu erörtern, welches Verhältniss zwischen den Flächentheilen f' und f'' als das zweckmässigste anzusehen ist. Die bezüglichen Resultate, obgleich einem imaginären Falle angehörig, werden hierauf wieder, wie in den citirten §§. geeignet sein, um daran die Bedingungen zu knüpfen, welche man bei der zweckmässigsten Vertheilung des Flächenraumes in einem

Querschnitte zu erfüllen hat. In dieser Absicht untersuche man, für welche Werthe von f' und f'' das mechanische Widerstandsmoment, welches sich mit Hilfe der Gleichung (228) $T = h'h''F$ auf die Form

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{h'}{h'}Fl = \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{h''}{h'}.K \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{h'}{h''}Fl = \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{h'}{h''}.K \end{cases}$$

bringen lässt, ein **Maximum** wird.

Da von diesen Alternativwerthen niemals der grössere gilt, da ferner $h' + h'' = H$ eine constante Grösse ist, somit von jenen Werthen der eine zunimmt, wenn der andere abnimmt, und umgekehrt, so leuchtet ein, dass das grösste mechanische Widerstandsmoment in dem Augenblicke erreicht wird, wenn die beiden Alternativwerthe einander **gleich** werden, d. i. wenn

die Gleichung $\frac{a^2h''}{h'} = \frac{r^2h'}{h''}$, oder

die Proportion $h' : h'' = a : r$

vorhanden ist.

Diese Bedingung steht in Uebereinstimmung mit derjenigen, welche im §. 145 bezüglich des Maximal-Tragmomentes gefunden wurde. Hiernach ist auch hier, wie dort,

$$h' = \left(\frac{a}{a+r}\right)H \quad\Bigg|\quad f' = \left(\frac{r}{a+r}\right)F$$

$$h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right)H \quad\Bigg|\quad f'' = \left(\frac{a}{a+r}\right)F,$$

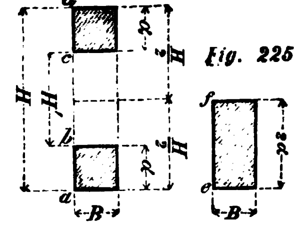
somit das **Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes**

$$W = \frac{1}{6}\frac{ar}{m}K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282).$$

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass die im §. 145 enthaltenen Regeln und Bemerkungen über die Zweckmässigkeit der Querschnittsformen bezüglich des Tragvermögens, auch bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes Anwendung finden.

Der Werth für W in der Formel (282) ist zwar eine Function des Körperraumes, sonst aber unabhängig von der Querschnittshöhe H, was mit der Bemerkung im §. 159 übereinstimmt.

Nachdem man die Bedingungen für die zweckmässigste Querschnittsvertheilung zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes kennen gelernt hat, betrachte man die vorzüglichsten der in dieser Beziehung zweckmässigen Querschnitte.


Fig. 224. Fig. 225.

§. 161.

Querschnittsform Fig. 224. Diese Querschnittsform ist dieselbe, wie die in dem §§. 134 und 146 betrachtete, und es entspricht ihr das Trägheitsmoment $T = \frac{(1+n+n^2)}{12} F H^2$. Das mechanische Widerstandsmoment W ist daher wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H$

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{T l}{h'^2} = \frac{1}{18} (1+n+n^2) \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{T l}{h''^2} = \frac{1}{18} (1+n+n^2) \frac{r^2}{m} K, \end{cases}$$

wenn der Körperraum $F l$ des Prismas mit K bezeichnet wird.

Für ein vierkantiges Prisma (Fig. 225) von demselben Körperraume unter sonst gleichen Umständen wäre das mechanische Widerstandsmoment W' nach der Relation (149)

$$W' = \begin{cases} \text{entweder } \frac{1}{18} \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{18} \frac{r^2}{m} K. \end{cases}$$

Vergleicht man jetzt die mechanischen Widerstandsmomente W und W', und lässt für beide die Pressung r in gleicher Intension zu, so erhält man die Proportion

$$W' : W = 1 : (1 + n + n^2),$$

welche, wenn (wie in den §§. 134 und 146) $\frac{2\alpha}{H} = x$ und $n = (1 - x)$ gesetzt wird, in folgende übergeht

$$W' : W = 1 : (3 - 3x + x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (283).$$

Insbesondere ist

für $x = 1$, $\alpha = 0{\cdot}50\,H$ und $W' : W = 1 : 1$
„ $x = 0{\cdot}9$, $\alpha = 0{\cdot}45\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}11$
„ $x = 0{\cdot}8$, $\alpha = 0{\cdot}40\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}24$
„ $x = 0{\cdot}7$, $\alpha = 0{\cdot}35\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}39$
„ $x = 0{\cdot}6$, $\alpha = 0{\cdot}30\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}56$
„ $x = 0{\cdot}5$, $\alpha = 0{\cdot}25\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}75$
„ $x = 0{\cdot}4$, $\alpha = 0{\cdot}20\,H$ „ „ $= 1 : 1{\cdot}96$
„ $x = 0{\cdot}3$, $\alpha = 0{\cdot}15\,H$ „ „ $= 1 : 2{\cdot}19$.

Diese Zahlenwerthe verglichen mit jenen in den §§. 134 und 146 zeigen, dass der mit dem betrachteten Querschnitte (Fig. 224) zu erreichende Vortheil bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes gegen denjenigen zurückbleibt, welcher bezüglich der Steifigkeit und des Tragvermögens des Prismas erreicht werden kann. Auch hat das Verhältniss $W' : W$ nicht nur eine practische Gränze, weil die Verkleinerung von x aus dem in den §§. 134 und 146 angegebenen Grunde nicht ohne Ende fortgesetzt werden kann, sondern dasselbe ist im vorliegenden Falle auch von theoretischer Seite begränzt, indem für $x = o$ das analytisch grösste Verhältniss $W' : W = 1 : 3$ entsteht, welches natürlich in der Praxis nicht erreicht werden kann.

Die Anordnung von gleich grossen Flächentheilen oben und unten, wie in der Figur 224, ist übrigens nicht immer die vortheilhafteste. Aus dem Inhalte des vorigen §. geht nämlich hervor, dass zur möglichsten Vermehrung des mechanischen Widerstandsmomentes das Grössenverhältniss zwischen dem gespannten und dem gepressten Querschnittstheile nach dem Verhältnisse der Elasticitätsgränzwerthe r und a angeordnet werden soll. Dadurch erhält man im Allgemeinen oben und unten ungleich grosse Querschnittstheile, und es ist sodann das mechanische Widerstandsmoment mit Benützung der Formeln (188) nach Anleitung des §. 107 zu bestimmen.

§. 162.

Querschnittsform Fig. 226. Diese Querschnittsform ist mit der in den §§. 135 und 147 betrachteten identisch. Für

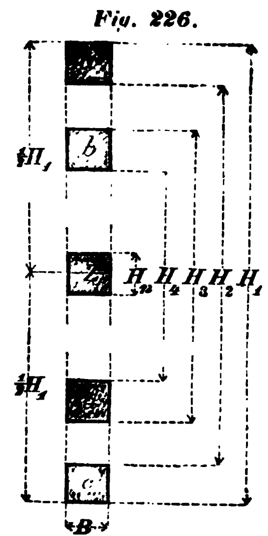


Fig. 226.

dieselbe wird wegen $h' = h'' = \frac{1}{2} H_1$ das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \begin{cases} \text{entw.} \frac{2}{3} \frac{a^2}{m} \frac{T\,l}{H_1^2} \\ \text{oder} \frac{2}{3} \frac{r^2}{m} \frac{T\,l}{H_1^2}, \end{cases}$$

wobei man das Trägheitsmoment T nach der Gleichung (234) zu berechnen hat.

Für den besonderen Fall, in welchem alle vollen und alle leeren Räume die gleiche Höhe a besitzen, wird nach der Gleichung (235)

$$W = \begin{cases} \text{entw.} \frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2} \frac{a^2}{m} K \\ \text{oder} \frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2} \frac{r^2}{m} K \end{cases} \quad (284).$$

Setzt man in diese Formel $n = 2, 3, 4$, etc., so erhält man für den Coefficienten $\frac{1}{18} \frac{(4n^2-3)}{(2n-1)^2}$ die entsprechenden Werthe, welche $\frac{2}{3}$ von jenen betragen, die für den Coefficienten in dem Ausdrucke des Trägheitsmomentes im §. 135 gefunden wurden. Die dortige Schlussbemerkung gilt auch gegenwärtig.

§. 163.

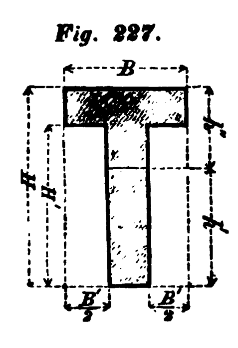
⌶förmiger Querschnitt. Bezüglich dieses Querschnittes wird lediglich auf die Bemerkungen des §. 148 hingewiesen. Da nämlich in Gemässheit des §. 160 die zweckmässigste Vertheilung des Flächenraumes im Querschnitte in Ansehung des mechanischen Widerstandsmomentes an die gleichen Bedingungen zu knüpfen ist, wie in Ansehung des Tragvermögens, so ist es erlaubt, das vortheilhafteste Verhältniss zwischen den beiden Flanschen eines ⌶förmigen Querschnittes auch dann nach den Erörterungen im §. 148 anzuordnen, wenn es sich um das Maximum des mechanischen Widerstandsmomentes handelt.

§. 164.

⊤förmiger Querschnitt. So wie in den §§. 137 und 149, entsteht auch hinsichtlich des zu erreichenden mechanischen

Widerstandsmomentes die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die ┬ Form als zweckmässig zu betrachten sei. Behufs dieser Untersuchung hat man wieder, wie im §. 149, zwischen den Materialien zu unterscheiden, weil nach deren Verschiedenheit in dem Ausdrucke für das mechanische Widerstandsmoment bald der eine, bald der andere Alternativ-Werth massgebend ist.

Fig. 227.



1. Ist bei dem zu verwendenden Materiale $r \overline{\overline{<}} a$ (wie z. B. bei dem Schmiedeeisen), so wird diejenige Stellung der ┬ Form die vortheilhaftere sein, wo die Fasern an der schmalen Seite ausgedehnt, und jene an der breiten Seite zusammengedrückt werden, also gerade so, wie diess bezüglich des Tragvermögens der Fall war. (Siehe §. 149 ad 1, Fig. 207.) Behält man die dortigen Bezeichnungen bei, so hat man (Fig. 227)

$$h' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma n^2}{1-\gamma}\right)H \qquad T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^3)-3(1-\gamma n)^2}{12(1-\gamma)^2} F H^{2*}),$$
$$h'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\gamma+\gamma n^2}{1-\gamma}\right)H$$

und das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2}. \end{cases}$$

Wäre nun der erste Alternativwerth als der kleinere, oder wenigstens nicht als der grössere anzusehen, d. h. wäre $\frac{a}{h'} \overline{\overline{<}} \frac{r}{h''}$, so hätte man wegen $Fl = K$

$$W = \frac{1}{18}\frac{a^2}{m}\left[\frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^3)}{(1-\gamma n^2)^2} - 3\right]K \quad . \quad . \quad (285),$$

*) Zur Unterscheidung des Moduls der Längenveränderung des Materiales (m) von dem mit dem gleichen Buchstaben bezeichneten Verhältnisse $\frac{B'}{B}$, schreibe man jenen Buchstaben für den Modul, wie bisher, liegend, für das fragliche Verhältniss aber stehend, nämlich $\frac{B'}{B} = \mathrm{m}$.

und diesen Ausdruck zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes zu einem Maximum zu machen.

Dieser Absicht wird entsprochen für

$$\frac{dW}{dn} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\gamma(1-\gamma)(1-n)}{(1-\gamma n)^2} = o, \text{ d. i.}$$

für

$$\left.\begin{array}{r} n = 1 \\ \text{und } m = \frac{\gamma}{n} = \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (286),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2 W}{dn^2}$ negativ ausfällt.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei dieser Untersuchung, eben so wie in den §§. 187 und 149, die Breite B, die Höhe H und der Flächenraum F der ┬ Form als constant, hingegen die Verhältnisszahlen m und n als variabel anzusehen sind.

Das Resultat (286) führt offenbar auf einen rechteckigen Querschnitt, so dass für diesen der Charakter einer ┬ Form ganz verloren geht. Auch ist in diesem Falle $h' = h'' = \frac{1}{2} H$, und da vorausgesetzt wurde, dass zur Bestimmung des mechanischen Widerstandsmomentes die Formel $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ die massgebende, daher $\frac{a}{h'} \overline{\gtrless} \frac{r}{h''}$ sein soll, so schliesst man, dass das obige Resultat (286) eigentlich nur dann Anwendung findet, wenn $a = r$, d. i. die Gleichheit der Elasticitätsgränzwerthe vorhanden ist.

Kann diese Gleichheit bei dem Schmiedeeisen zugelassen werden, so wird bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes, welches der Träger entwickeln kann, die Anwendung des rechteckigen Querschnittes vortheilhafter sein, als jene des ┬ förmigen.

Ist jedoch bei dem Schmiedeeisen $r < a$, so kann das Resultat (286) nicht mehr benützt werden, weil die dabei zu Grunde liegende Bedingung $\frac{a}{h'} \overline{\gtrless} \frac{r}{h''}$, wegen $h' = h''$, nicht vorhanden wäre. In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass jener Bedingung Genüge geleistet wird. Diess geschieht offenbar für $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$, d. i. in dem Falle, wo bei der Biegung die Elasticitäts-

gränzen in den am meisten gespannten und gepressten Fasern **gleichzeitig** erreicht werden.

Hiernach finden für die zweckmässigsten Formverhältnisse folgende Relationen statt

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{r} = \frac{h'}{h''},\ h' &= \left(\frac{a}{a+r}\right) H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma n}{1-\gamma}\right) H \\ h'' &= \left(\frac{r}{a+r}\right) H = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-2\gamma+\gamma n}{1-\gamma}\right) H \\ \text{ferner } n &= \frac{\left(1-\frac{a}{r}+2\gamma\frac{a}{r}\right)}{\gamma\left(1+\frac{a}{r}\right)} \\ \text{und } m &= \frac{\left(1+\frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(1-\frac{a}{r}+2\gamma\frac{a}{r}\right)} = \frac{\gamma}{n} \end{aligned}\right\} \quad (287).$$

Endlich wird das **Maximum** des mechanischen Widerstandsmomentes selbst

$$W = \tfrac{1}{18}\frac{a^2}{m}\left[1-\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{r}{a}\right)^2\right] K \quad . \quad . \quad (288).$$

Ex. Es sei $\frac{a}{r} = \frac{5}{4}$, ferner $F = \frac{2}{3} B H$, also $\gamma = \frac{1}{3}$. In diesem Falle hat man

$$\begin{array}{l|l|l|l} n = \frac{7}{9} & h' = \frac{5}{9} H & H' = \frac{7}{9} H & (H - H') = \frac{2}{9} H \\ m = \frac{3}{7} & h'' = \frac{4}{9} H & B' = \frac{3}{7} B & (B - B') = \frac{4}{7} B \end{array}$$

$$(H - H') : (B - B') = 7 H : 18 B$$

und

$$W = \tfrac{11}{225} \cdot \frac{a^2}{m} K.$$

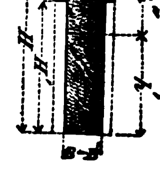
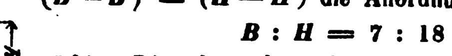


Fig. 228.

Für gleiche Wanddicken wäre ausserdem wegen $(B - B') = (H - H')$ die Anordnung.



$$B : H = 7 : 18$$

nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind mittelst der Fig. 228 anschaulich gemacht.

Hätte der Träger einen rechteckigen Querschnitt von dem gleichen Flächenraume F, so wäre sein mechanisches Widerstandsmoment nach der Relation (149)

$$W' = \tfrac{1}{18}\frac{r^2}{m} K.$$

Der Vergleich zwischen den beiden Werthen W und W' ergibt wegen $\frac{a}{r} = \frac{5}{4}$ die Proportion

$$W : W' = \tfrac{11}{225} a^2 : \tfrac{1}{18} r^2 = 11 : 8,$$

welche in der That zu Gunsten der ⊤ Form spricht, obwohl der Vortheil gegen denjenigen weit zurückbleibt, welcher durch die Anwendung der ⌶ Form erreicht werden kann.

2. Ist das Materiale des ⊤ förmigen Trägers Gusseisen, so ist diejenige Querschnittslage die vortheilhaftere, wo die Fasern an der breiten Seite der ⊤ Form ausgedehnt, und jene an der schmalen Seite zusammengedrückt werden. Sodann ist das mechanische Widerstandsmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \cdot \frac{Tl}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \cdot \frac{Tl}{h''^2}, \end{cases}$$

und mit Rücksicht auf die Bezeichnungen im §. 149 ad 2

$$h' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 - 2\gamma + \gamma n}{1 - \gamma}\right) H, \quad h'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1 - \gamma n}{1 - \gamma}\right) H$$

$$\text{und } T = \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1 - n\gamma)^2}{12(1-\gamma)^2} F H^2.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass in diesem Falle der erste Alternativwerth $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ zu einem Maximum zu machen ist, wenn man die Frage zu beantworten hat, welche Formverhältnisse als die zweckmässigsten zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes anzusehen sind. Denn das Maximum des zweiten Alternativwerthes $\frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{Tl}{h''^2}$ würde wieder auf die Gleichungen (286) führen, welche für gusseiserne Träger nicht angewendet werden dürfen, weil sonst $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2} < \frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{Tl}{h''^2}$ wäre, sonach der letzte Werth, den man zu einem Maximum gemacht hätte, nicht mehr das mechanische Widerstandsmoment vorstellen könnte. Um daher das grösste mechanische Widerstandsmoment für ⊤ förmige Träger aus Gusseisen zu erhalten, drücke man dieses Moment durch die Formel

$$W = \tfrac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$$

aus, und treffe eine solche Wahl in den Verhältnissen der ┬ Form, dass jener Ausdruck ein **Maximum** wird. Demgemäss hat man nach den obigen Bezeichnungen, wenn zugleich der Körperraum $Fl = K$ gesetzt wird.

$$W = \frac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{4(1-\gamma)(1-\gamma n^2) - 3(1-\gamma n)^2}{(1-2\gamma+\gamma n)^2} K$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{a^2}{m} \cdot \frac{(1-4\gamma+6\gamma n-4\gamma n^2+\gamma^2 n^2)}{(1-2\gamma+\gamma n)^2} K \quad (289).$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{dW}{dn} = \frac{2}{9} \frac{a^2}{m} \cdot \frac{\gamma(1-\gamma)}{(1-2\gamma+\gamma n)^3} \left[1-(2-\gamma)n\right] K = 0,$$

also für

$$n = \frac{1}{(2-\gamma)} \text{ und } m = \gamma\,(2-\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (290),$$

da in diesem Falle $\frac{d^2 W}{dn^2}$ negativ ausfällt. Hiernach erhält man das **Maximum** des mechanischen Widerstandsmomentes

$$W = \frac{1}{18(1-\gamma)} \frac{a^2}{m} K \quad \ldots\ldots \quad (291).$$

Zugleich ist die Dicke der horizontalen Wand

$$(H-H') = (1-n)\,H = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right) H$$

und jene der verticalen

$$(B-B') = (1-m)\,B = (1-\gamma)^2\,B \quad \ldots \quad (292),$$

endlich das Verhältniss beider Wanddicken

$$(H-H') : (B-B') = H : (1-\gamma)(2-\gamma)\,B.$$

Noch hat man zur Bestimmung der neutralen Axe die Werthe

$$h' = \left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma}\right) H \text{ und } h'' = \left(\frac{1}{2-\gamma}\right) H \quad . \quad . \quad (293).$$

Wird hiernach die ┬ Form construirt, so entsteht für die gegebenen Grössen B, H und F das grösste mechanische Widerstandsmoment. Dabei muss aber gleichzeitig $\frac{a}{h'} \leqq \frac{r}{h''}$, d. i. $\frac{h''}{h'} \leqq \frac{r}{a}$ sein, also auch wegen der Gleichungen (293)

$$\gamma \leqq \left(1-\frac{a}{r}\right) \text{ und } F \geqq \frac{a}{r} BH.$$

Der Gebrauch der vorigen Gleichungen zur Ausmittlung der zweckmässigsten Formverhältnisse des ⊤ förmigen Querschnittes für gusseiserne Träger erscheint somit an die Bedingung geknüpft, dass der Flächenraum der ⊤ Form nicht kleiner als $\frac{a}{r}BH$ sein darf. Der Gegenfall erfordert eine besondere Untersuchung. Man wird desshalb zwischen folgenden drei Fällen unterscheiden:

$$A)\ F > \frac{a}{r}BH,$$

$$B)\ F = \frac{a}{r}BH$$

$$\text{und } C)\ F < \frac{a}{r}BH.$$

Der Werth von $\frac{a}{r}$, welcher diese Fälle gruppirt, variirt, wie man sieht, mit den Elasticitätsgränzwerthen a und r. Bezüglich der Wahl jenes Werthes gilt dasselbe, was bereits im §. 149 ad 2 gesagt wurde.

A) Ist $F > \frac{a}{r}BH$, so dienen die Formeln (290), (291), (292) und (293) zur Basis für die Ausmittlung der vortheilhaftesten Verhältnisse der ⊤ Form.

Ex. Es sei $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$, ferner der Flächenraum $F = \frac{2}{3}BH$ daher in der That grösser, als $\frac{a}{r}BH = \frac{1}{2}BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{3}$

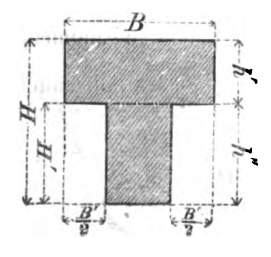
$$n = \tfrac{3}{5} \;\Big|\; h' = \tfrac{2}{5}H \;\Big|\; H' = \tfrac{3}{5}H \;\Big|\; (H-H') = \tfrac{2}{5}H$$

$$m = \tfrac{5}{9} \;\Big|\; h'' = \tfrac{3}{5}H \;\Big|\; B' = \tfrac{5}{9}B \;\Big|\; (B-B') = \tfrac{4}{9}B,$$

$$(H-H') : (B-B') = 9H : 10B \text{ und}$$

$$W = \frac{1}{12}\frac{a^2}{m}K.$$

Fig. 229.



Soll $(H-H') = (B-B')$, d. i. die Dicke der horizontalen Wand eben so, wie jene der verticalen werden, so muss überdiess

$$B : H = 9 : 10$$

sein.

In der Fig. 229 sind diese speciellen Formverhältnisse anschaulich gemacht.

Im vorliegenden Falle ist offenbar $\frac{a}{h'} < \frac{r}{h''}$, es wird somit für die zweckmässigste Materialvertheilung in der ┬ Form des Trägers bei der Biegung die Elasticitätsgränze nur in den gespanntesten Querschnittstheilen erreicht. Auch bemerkt man aus der Gleichheit der Grössen h' und $(H-H')$, dass die neutrale Axe stets mit dem unteren Rande der horizontalen Flansche zusammenfällt.

B) Ist $F = \frac{a}{r} BH$, so lassen sich die vorigen Gleichungen noch immer anwenden.

Ex. Es sei wieder $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$, ferner $F = \frac{1}{2} BH$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = \frac{1}{2}$

$$n = \tfrac{2}{3} \quad\Big|\quad h' = \tfrac{1}{3} H \quad\Big|\quad H' = \tfrac{2}{3} H \quad\Big|\quad (H-H') = \tfrac{1}{3} H$$
$$m = \tfrac{3}{4} \quad\Big|\quad h'' = \tfrac{2}{3} H \quad\Big|\quad B' = \tfrac{3}{4} B \quad\Big|\quad (B-B') = \tfrac{1}{4} B,$$
$$(H-H') : (B-B') = 4H : 3B$$

und

$$W = \frac{1}{9} \frac{a^2}{m} K.$$

Fig. 230.

Diese Formverhältnisse sind in der Fig. 230 dargestellt. Für gleiche Wanddicken müsste ausserdem wegen $(H-H') = (B-B')$

$$B : H = 4 : 3$$

sein.

Hier werden offenbar wegen $\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''}$ bei der Biegung des Trägers die Elasticitätsgränzen in den gespanntesten und gepresstesten Querschnittstheilen gleichzeitig erreicht. Auch fällt die neutrale Axe, wie ad A, mit dem inneren Rande der horizontalen Wand zusammen.

C) Ist endlich $F < \frac{a}{r} BH$, so lassen sich, wie bereits bemerkt wurde, die bisherigen Formeln nicht mehr anwenden. Der Werth von $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ kann zwar noch immer zu einem analytischen Maximum gemacht werden, allein es würde hiernach h' so klein und $\frac{1}{6} \frac{a^2}{m} \frac{Tl}{h'^2}$ so gross ausfallen, dass man genöthigt wäre, zu dem Werthe

$\frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2}$, als dem kleineren, zurückzukehren. In diesem Falle muss man sich von dem analytischen Maximum von $\frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2}$ so weit entfernen, bis h' einen solchen Werth annimmt, dass das mechanische Widerstandsmoment noch durch diese Formel repräsentirt werden kann. Offenbar geschieht dieser Bedingung Genüge für

$$\frac{a}{h'} = \frac{r}{h''},$$

d. h. für $h' = \left(\frac{a}{a+r}\right) H$ und $h'' = \left(\frac{r}{a+r}\right) H$.

Diese Formeln stimmen mit jenen im §. 149 ad C überein. In dem vorliegenden Falle ist also die zweckmässigste ⊤ Form für gusseiserne Träger zur Erreichung des grössten mechanischen Widerstandsmomentes dieselbe, wie jene zur Erreichung des grössten Tragvermögens, und es werden bei der Biegung sowohl die gespanntesten, als auch die zumeist gepressten Querschnittstheile bis zur Elasticitätsgränze in Anspruch genommen; so dass man für die vortheilhaftesten Formverhältnisse nach den Relationen (267)

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)}{\left(1 + \frac{a}{r}\right)\gamma} \\ \text{und } m &= \frac{\gamma}{n} = \frac{\left(1 + \frac{a}{r}\right)\gamma^2}{\left(2\gamma - 1 + \frac{a}{r}\right)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

hat, und hiernach das grösste mechanische Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{18m}\left[r^2 - \frac{1}{\gamma}(r-a)^2\right]K = \frac{1}{18}\frac{a^2}{m}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{a} - 1\right)^2\right]K \quad (295).$$

Ex. Es sei $\frac{r}{a} = 2$, ferner der Flächenraum $F = \frac{1}{3} B H$, daher in der That kleiner, als $\frac{a}{r} B H = \frac{1}{2} B H$. In diesem Falle hat man wegen $\gamma = 1 - \frac{F}{BH} = \frac{2}{3}$

$n = \frac{5}{6}$	$h' = \frac{1}{3} H$	$H' = \frac{5}{6} H$	$(H - H') = \frac{1}{6} H$
$m = \frac{4}{5}$	$h'' = \frac{2}{3} H$	$B' = \frac{4}{5} B$	$(B - B') = \frac{1}{5} B$,

$$(H - H') : (B - B') = 5H : 6B$$

und

$$W = \frac{5}{36}\frac{a^2}{m} K.$$

Für gleiche Wanddicken wäre wegen $(B - B') = (H - H')$ noch die Anordnung

$$B : H = 5 : 6$$

nöthig. Diese besonderen Formverhältnisse sind bereits mittelst der Figur 215 anschaulich gemacht worden.

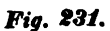
In den gewählten Beispielen ad A, B und C hat man für das mechanische Widerstandsmoment W die beziehungsweisen Werthe $\frac{1}{12}\frac{a^2}{m}K$, $\frac{1}{9}\frac{a^2}{m}K$ und $\frac{5}{36}\frac{a^2}{m}K$ gefunden. Einem Träger von gleichem Körperraume mit rechteckigem Querschnitte würde nach der Relation (149), weil für Gusseisen $a < r$ ist, nur das mechanische Widerstandsmoment $\frac{1}{18}\frac{a^2}{m}K$ entsprechen. Der Vergleich zwischen diesem und jenen obigen Werthen lässt die verhältnissmässig grosse Widerstandsfähigkeit gusseiserner Träger mit ┬ förmigen Querschnitten erkennen, obgleich dieselbe gegen diejenige zurückbleibt, welche durch die Anwendung der I Form mit ungleichen Flanschen erreicht werden kann.

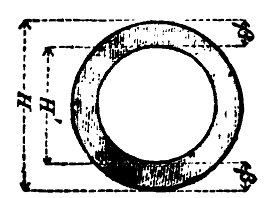
§. 165.

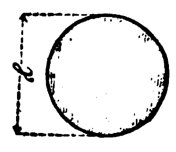
Röhrenquerschnitte. Mit Bezug auf die Bezeichnungen und die Resultate in dem §. 138 kann man das mechanische Widerstandsmoment einer cylindrischen Röhre (Fig. 231) durch die Formel ausdrücken:

$$W = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6}\frac{a^2}{m}\frac{Tl}{h'^2} = \frac{1}{24}(1+n^2)\frac{a^2}{m}K = \frac{1}{24}(2-2x+x^2)\frac{a^2}{m}K \\ \text{oder } \frac{1}{6}\frac{r^2}{m}\frac{Tl}{h''^2} = \frac{1}{24}(1+n^2)\frac{r^2}{m}K = \frac{1}{24}(2-2x+x^2)\frac{r^2}{m}K \end{cases} \quad (296)$$

wenn $K = Fl$ den Körperraum der Röhre bezeichnet.


Fig. 231. *Fig. 232.*





Für einen Cylinder (Fig. 232), welcher den gleichen Körperraum wie die Röhre hat, ist das mechanische Widerstandsmoment nach den Relationen

$$W' = \begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{24} \frac{a^3}{m} K \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{r^3}{m} K. \end{cases}$$

Demnach findet man durch Vergleichung

$$W' : W = 1 : (1 + n^2) = 1 : (2 - 2x + x^2) \quad . \quad (297).$$

Insbesondere wird

für	$x = 1$,	$\beta = 0{\cdot}50\,H$	und $W' : W$	$= 1 : 1$
„	$x = 0{\cdot}9$,	$\beta = 0{\cdot}45\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}01$
„	$x = 0{\cdot}8$,	$\beta = 0{\cdot}40\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}04$
„	$x = 0{\cdot}7$,	$\beta = 0{\cdot}35\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}09$
„	$x = 0{\cdot}6$,	$\beta = 0{\cdot}30\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}16$
„	$x = 0{\cdot}5$,	$\beta = 0{\cdot}25\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}25$
„	$x = 0{\cdot}4$,	$\beta = 0{\cdot}20\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}36$
„	$x = 0{\cdot}3$,	$\beta = 0{\cdot}15\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}49$
„	$x = 0{\cdot}2$,	$\beta = 0{\cdot}10\,H$	„	$= 1 : 1{\cdot}64$

Diese Zahlenwerthe verglichen mit jenen in den §§. 138 und 150 zeigen, dass der mit dem Röhrenquerschnitte zu erreichende Vortheil bezüglich des mechanischen Widerstandsmomentes gegen denjenigen zurückbleibt, welcher bezüglich der Steifigkeit oder des Tragvermögens der Röhre erreicht werden kann. Auch hat das Verhältniss $W' : W$ nicht nur eine practische Gränze, weil die Verkleinerung von x aus dem in jenen §§. angegebenen Grunde nicht ohne Ende fortgesetzt werden kann, sondern dasselbe ist im vorliegenden Falle auch von theoretischer Seite begränzt, indem für $x = o$ das analytisch grösste Verhältniss $W' : W = 1 : 2$ entsteht, welches natürlich in der Praxis nicht erreicht werden kann.

§. 166.

Blechröhrenquerschnitte. Mit Rücksicht auf den §. 139 und unter Beibehaltung der dort eingeführten Näherungen findet man zuerst für eine Blechröhre mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 233) wegen

Fig. 233.

$$T = \frac{1}{12} \left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) F H^2$$

und $h' = h'' = \frac{1}{2} H$ das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{18} \left(\frac{H + 3B}{H + B}\right) \frac{r^3}{m} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (298)$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtreqless a$, also von den betreffenden Alternativ-Werthen für das Widerstandsmoment jener mit dem Factor r zu nehmen ist.

Der von der Querschnittsform abhängige Coefficient

$$\frac{1}{18}\left(\frac{H+3B}{H+B}\right)=\frac{1}{18}\left(\frac{1+3\frac{B}{H}}{1+\frac{B}{H}}\right)$$

variirt, wie man sieht, mit dem Verhältnisse $\frac{B}{H}$. Die beiden Gränzen für denselben erhält man, die eine für $B=o$ mit $\frac{1}{18}$, und die andere für $H=o$ mit $\frac{1}{6}$.

Für $B=H$ geht das Reckteck in ein **Quadrat** über, und für dieses wird

$$W=\frac{1}{9}\frac{r^2}{m}K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (299).$$

Hier ist der Coefficient $(\frac{1}{9})$ das arithmetische Mittel aus jenen Gränzwerthen, und **doppelt** so gross, wie bei einem vollen Quadrate $(\frac{1}{18})$.

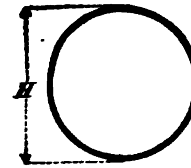


Fig. 234.

Für eine **cylindrische** Blechröhre (Fig. 234) ist mit Rücksicht auf die Formel (243) $T=\frac{1}{8}FH^2$, man findet daher, wegen $h'=h''=\frac{1}{2}H$, das mechanische Widerstandsmoment

$$W=\frac{1}{12}\frac{r^2}{m}K \quad \ldots\ldots \quad (300).$$

Auch hier ist der Coefficient $(\frac{1}{12})$ **doppelt** so gross, wie bei einem vollen Kreisquerschnitte.

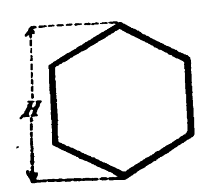


Fig. 235.

Ist endlich der Querschnitt der Blechröhre ein **regelmässiges Polygon** (Fig. 235), so hat man das mechanische Widerstandsmoment mit Benützung der Formel (244) auf analoge Weise, wie bezüglich der vollen Polygone (§. 125) aufzusuchen. Wie dort, so wird auch hier das mechanische Widerstandsmoment mit den verschiedenen Polygonstellungen variiren, und für dasselbe stets ein Maximal- und ein Minimalwerth vorhanden sein.

§. 167.

Vergleichung der mechanischen Widerstandsmomente von vierkantigen und kreisrunden Blechröhren. Behufs dieser Vergleichung behalte man die im §. 140 gewählte

Bezeichnungsweise bei, und benütze die betreffenden Formeln aus dem vorigen §.

Hiernach findet man für die vierkantige Röhre mit rechteckigem Querschnitte

den Körperraum . . . . . . $K_1 = F_1 \, l_1 = 2 (H_1 + B_1) \beta_1 \, l_1$

und das mechanische Widerstandsmoment . . . . $W_1 = \frac{1}{18} \left(\frac{H_1 + 3 B_1}{H_1 + B_1} \right) \frac{r^2}{m} K_1$,

ferner für die cylindrische Röhre

den Körperraum . . . . . . $K_2 = F_2 \, l_2 = \pi \, H_2 \, \beta_2 \, l_2$

und das mechanische Widerstandsmoment . . . . $W_2 = \frac{1}{12} \frac{r^2}{m} K_2$,

also durch Vergleichung

$$W_1 : W_2 = \left(\frac{H_1 + 3 B_1}{H_1 + B_1} \right) K_1 : \tfrac{3}{2} K_2 \quad . \; . \; . \quad (301).$$

1. Nimmt man für beide Röhren gleiche Wanddicken, gleiche Querschnittshöhen, gleiche Längen und gleiche Blechmengen an, d. i. $\beta_1 = \beta_2$, $H_1 = H_2$, $l_1 = l_2$ und $K_1 = K_2$, so wird zunächst, wie in den §§. 140 und 152, $B_1 = \frac{(\pi - 2)}{2} H_1 = 0{\cdot}5708 \, H_1$ und hiernach

$$\left. \begin{aligned} W_1 : W_2 &= 4 (H_1 + 3 B_1) : 3 (H_1 + B_1) \\ &= 2 (3 \pi - 4) : 3 \pi \\ &= 1{\cdot}151 : 1 \end{aligned} \right\} \quad (302).$$

Dieses Verhältniss stimmt mit den sub (246) und (274) gegebenen überein.

Die vierkantige Röhre entwickelt daher bei gleicher Wanddicke, gleicher Querschnittshöhe, gleicher Länge und gleicher Blechmenge ein grösseres mechanisches Widerstandsmoment, als die cylindrische.

2. Lässt man das Rechteck in ein Quadrat übergehen, so hat man $B_1 = H_1$ und setzt man auch in diesem Falle $K_1 = K_2$, so reducirt sich das allgemeine Verhältniss (301) auf

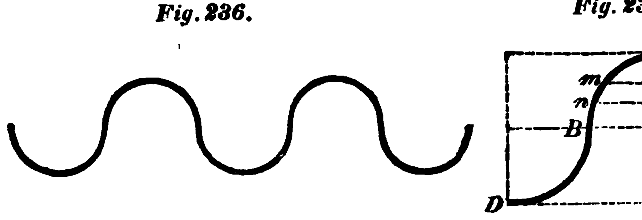
$$W_1 : W_2 = 4 : 3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (303).$$

Bei gleicher Blechmenge entwickelt daher die vierkantige Röhre auch dann ein grösseres mechanisches Widerstandsmoment, als die cylindrische, wenn dieselbe einen quadratischen Querschnitt hat.

§. 168.

Cannelirtes Blech (Fig. 236). Mit Bezug auf die im §. 141 eingeführten Bezeichnungen wird das mechanische Widerstandsmoment W einer Cannelirung (Fig. 237)

Fig. 236. *Fig. 237.*



$$W = \frac{1}{48} \frac{r^2 b^2 \beta}{m c^2} \left[\left(2 n^2 + 1 + \frac{1}{4 n^2} \right) \lambda - (1 + n^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4 n^2} \right) \right] l \quad (304),$$

wenn man beachtet, dass für Blech $r \gtreqless a$, also von den beiden Alternativwerthen für das Widerstandsmoment wegen $h' = h'' = c$ jener mit dem Factor r, $\left(\frac{1}{6} \frac{r^2}{m} \frac{T l}{h''^2} \right)$, als der kleinere anzunehmen ist.

Für $n = \frac{4}{3}$ wurde z. B. im §. 141 $T = 0{\cdot}1191\, F H^2$ gefunden. In diesem Falle ist daher das mechanische Widerstandsmoment wegen $F l = K$

$$W = 0{\cdot}0794 \frac{r^2}{m} K.$$

Einem Prisma mit rechteckigem Querschnitte, welches mit der Blechcannelirung einerlei Körperraum hat, würde nur das mechanische Widerstandsmoment

$$W' = \frac{1}{18} \frac{r^2}{m} K = 0{\cdot}0556 \frac{r^2}{m} K$$

entsprechen.

Aus der Vergleichung der Werthe für W und W' ergibt sich die Proportion

$$W : W' = 0{\cdot}0794 \frac{r^2}{m} K : 0{\cdot}0556 \frac{r^2}{m} K = 1{\cdot}4292 : 1$$

und hieraus der Schluss, dass das cannelirte Blech ein verhältnissmässig bedeutendes mechanisches Widerstandsmoment entwickeln kann.



Zweiter Abschnitt.

Widerstand prismatischer Träger, bei welchen die einwirkenden Kräfte normal auf die Längenaxe gerichtet sind.

---

§. 169.

Im ersten Hauptstücke hat man die Anwendung der allgemeinen Untersuchungen hinsichtlich des Biegungswiderstandes nur auf die im §. 58 erwähnten vier einfachsten Fälle gemacht. Im Constructionswesen kommen aber noch viele andere Fälle vor. Um daher zu zeigen, auf welche Weise man sodann die Steifigkeit des Trägers, das Tragvermögen und das mechanische Widerstandsmoment zu beurtheilen hat, werden in diesem Abschnitte die wichtigsten Fälle behandelt. Hierbei wird stets angenommen, dass die Kräfte normal auf die Längenaxe gerichtet sind.

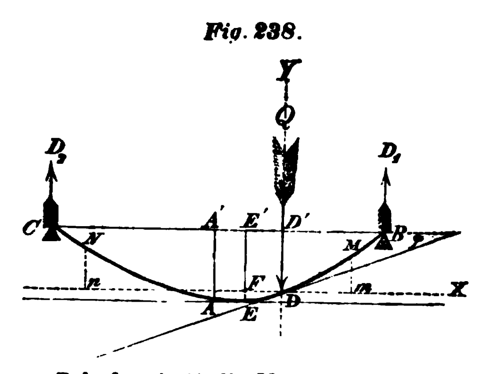
Erstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden unterstützten Trägers, welcher an einer beliebigen Stelle belastet ist.

§. 170.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 288) den prismatischen Träger BC in B und C unterstützt und in dem Puncte D belastet. Es sei in diesem Falle die Biegung, das Tragvermögen und das mechanische Widerstandsmoment des Trägers zu bestimmen.

Fig. 238.



Zu diesem Behufe sei A' die Mitte des Abstandes BC, und dieser letztere . . . . $= l$,
die Entfernung dės Kraftangriffspunctes D von der verticalen Mittellinie, d. i. $A'D'$ . . . . $= nl$,*)
und die Senkung DD' dieses Punctes . . . . . $= \delta$;
ferner für einen beliebigen Punct M des Curventheils BD
die horizontale Abscisse Dm . . . . $= x$,
die verticale Ordinate Mm . . . . $= y$,
und der Winkel, welchen die Tangente in D mit dem Horizonte bildet . . . . $= \varphi$.
Die Bezeichnungen m und t seien dieselben, wie im §. 53.
Sind noch die Componenten der Last Q, welche als die Drücke auf die Stützen in B und C auftreten, beziehungsweise D_1 und D_2, so hat man, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird,

$$D_1 = \left(\frac{1+2n}{2}\right) Q$$

$$\text{und } D_2 = \left(\frac{1-2n}{2}\right) Q.$$

Für $n = o$ befindet sich die Last in der halben Länge, und es ist sodann $D_1 = D_2 = \frac{1}{2} Q$.

Biegung.

§. 171.

Allgemeine Ableitung. Der in Fig. 238 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn der Träger nach der Biegung in D festge-

*) n muss stets kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

halten, und in B und C von den aufwärts wirkenden Kräften D_1 und D_2 in Anspruch genommen wird.

Betrachtet man daher zuerst den Theil BD der Biegungscurve, so hat man nach Gleichung (47)

$$mt \frac{d^2 y}{dx^2} = D_1 \left(\tfrac{1}{2} l - n l - x\right),$$

also mit Rücksicht auf den obigen Werth von D_1

$$mt \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1+2n}{2}\right)\left[\left(\frac{1-2n}{2}\right) l - x\right] Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305),$$

somit durch Integration

$$mt \frac{dy}{dx} = mt\, tg\, \varphi + \left(\frac{1+2n}{4}\right)[(1-2n)\, l x - x^2]\, Q \cdot \quad (306)$$

und

$$mt\; y = mt\, tg\, \varphi\, x + \left(\frac{1+2n}{4}\right)\left[(1-2n)\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] Q \cdot \quad (307),$$

wenn man beachtet, dass für $x = o$ auch $y = o$, hingegen $\frac{dy}{dx} = tg\, \varphi$ werden muss. Da ferner für den Punct B die gleichzeitigen Werthe

$$x = \left(\tfrac{1}{2} - n\right) l = \left(\frac{1-2n}{2}\right) l \text{ und } y = \delta$$

existiren, so hat man noch

$$mt\; \delta = \tfrac{1}{2}\, mt\, tg\, \varphi\, (1-2n)\, l + (1+2n)(1-2n)^3 \frac{Q l^3}{48} \quad (308).$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den Curventheil CD, wenn man für irgend einen Punct N dieses Theiles die Coordinaten $Dn = x$ und $Nn = y$ annimmt, die Bedingungsgleichungen

$$mt \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1-2n}{2}\right)\left[\left(\frac{1+2n}{2}\right) l - x\right] Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309),$$

$$mt \frac{dy}{dx} = -\, mt\, tg\, \varphi + \left(\frac{1-2n}{4}\right)[(1+2n)\, l x - x^2]\, Q \; (310)$$

und

$$mt\; y = -\, mt\, tg\, \varphi\, x + \left(\frac{1-2n}{4}\right)\left[(1+2n)\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] Q \; (311),$$

da hier die gleichzeitigen Werthe $x = o$, $\frac{dy}{dx} = -\, tg\, \varphi$ und $y = o$ stattfinden. Auch hat man für den Punct C, $x = \left(\frac{1+2n}{2}\right) l$ u. $y = \delta$, somit

n und zu bestimmen.

$$mt\; \delta = -\tfrac{1}{2}\, mt\, tg\, \varphi\, (1+2n)\, l + (1-2n)(1+2$$

Setzt man die beiden in den Gleichungen (308) und (312) gegebenen Werthe für $mt\delta$ einander gleich, so findet man die bisher unbekannten Werthe von $tg\,\varphi$ und δ, nämlich

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{6} n (1 - 4n^2) \frac{Q l^2}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

$$\text{und} \quad \delta = \tfrac{1}{48} (1 - 4n^2)^2 \frac{Q l^3}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314).$$

§. 172.

Besondere Eigenschaften der Biegungscurve. (Fig. 238.)

1. Da $tang\,\varphi$ mit n positiv oder negativ wird, so sieht man, dass die Tangente an dem Puncte D mit der Geraden BC auf derjenigen Seite convergirt, wo das kleinere von den beiden Curvenstücken BD und CD liegt.

2. Mit Hilfe des Werthes von $tang\,\varphi$ gehen die unbestimmten Gleichungen (307) und (311), welche zu den beiden Curvenstücken gehören, in bestimmte über, nämlich für den Curventheil BD in:

$$mty = \left(\frac{1+2n}{24}\right) Q \left[\;\; 4n(1-2n)l^2x + 3(1-2n)lx^2 - 2x^3\right] (315),$$

und für den Curventheil CD in:

$$mty = \left(\frac{1-2n}{24}\right) Q \left[-4n(1+2n)l^2x + 3(1+2n)lx^2 - 2x^3\right] (316).$$

3. Die grösste Biegung EE' findet zu Folge der Bemerkung ad 1 in dem grösseren Curventheil (CD) und zwar an derjenigen Stelle E statt, wo die Tangente an die Curve horizontal, d. h. wo $\frac{dy}{dx} = o$ ist. Nennt man für diesen Punct E, die Abscisse $DF = x'$ und den numerischen Werth der Ordinate $EF = y'$, ferner die grösste Biegung $EE' = \delta'$ so ist offenbar

$$\delta' = \delta + y',$$

und man wird nur noch mit Rücksicht auf die Gleichung (316) $\frac{dy}{dx} = o$ zu setzen haben, um hieraus den Werth von $x = x'$ und hiermit die Ordinate $y = y'$ zu bestimmen. Demgemäss findet man wegen

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-2n}{24}\right) Q \left[-4n(1+2n)l^2 + 6(1+2n)lx - 6x^2\right] = o$$

$$x' = D'E' = \tfrac{1}{2}\left[1 + 2n - \sqrt{(1+2n)(1-\tfrac{2}{3}n)}\right] l \quad . \quad (317),$$

womit y' nunmehr aus der Gleichung (316) berechnet werden kann. Man wird für y' zwar einen negativen Werth erhalten, es ist jedoch in der Formel $\delta' = \delta + y'$ bloss der numerische Werth von y' ohne Rücksicht auf das Zeichen zu substituiren.

Um diess durch ein Beispiel zu erläutern, sei $n = \frac{1}{4}$. Hiermit findet man aus der Gleichung

(314) $\delta = \frac{9}{16} \cdot \frac{Q\,l^3}{48\,m\,t} = 0{\cdot}5625 \cdot \frac{Q\,l^3}{48\,mt} = \frac{3}{256}\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}$,

(316) $y = [-3\,l^2 + \frac{9}{4}\,l\,x - 2\,x^2]\,\frac{Q\,x}{48\,mt}$,

(317) $x' = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)l = 0{\cdot}1910\,l$,

(316) numerisch genommen $y' = \left(\frac{9-\sqrt{5}}{16}\right)\frac{Ql^3}{48\,m\,t} = 0{\cdot}4228\,\frac{Q\,l^3}{48\,m\,t}$,

und wegen $\delta' = \delta + y'$ endlich

$$\delta' = 0{\cdot}9853\,\frac{Q\,l^3}{48\,mt}.$$

4. Ist die Last Q in der Mitte, also der einfache Fall III vorhanden, wie in Fig. 59 ad §. 63, so wird $n = o$, somit

nach Gleichung (313) . . . . . $tang\,\varphi = o$,

„ (314) . . . . . $\delta = \frac{Q\,l^3}{48\,mt}$,

„ (315) }
„ (316) } . . . . . $mt\,y = \frac{Q}{24}\,(3\,l\,x^2 - 2\,x^3)$,

also die Biegungscurve symmetrisch, ferner $x' = o$, $y' = o$ und $\delta' = \delta$.

Diese Resultate stimmen mit dem §. 63 überein. Auch ist in diesem Falle ($n = o$) die Biegung $\delta' = \delta$ grösser, als in dem ad 3 betrachteten Falle.

Tragvermögen.

§. 173.

Allgemeine Formel. Nach §. 127 muss der gefährliche Querschnitt an der Stelle D liegen, wo die Kraft Q ihren Angriffspunct hat. Für diese Stelle ist das Moment der einwirkenden Kräfte $D_1 \,.\, \overline{BD'}$ oder $D_2 \,.\, \overline{CD'}$, welche beiden Werthe dasselbe Resultat geben müssen. In der That ist

$$D_1 = \left(\frac{1+2n}{2}\right) Q, \text{ ferner } \overline{BD'} = \left(\frac{1-2n}{2}\right) l$$

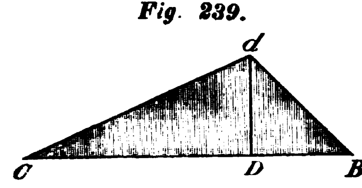
$$D_2 = \left(\frac{1-2n}{2}\right) Q, \text{ und } \overline{CD'} = \left(\frac{1+2n}{2}\right) l,$$

somit

$$D_1 \cdot \overline{BD'} = D_2 \cdot \overline{CD'} = \left(\frac{1-4n^2}{4}\right) Q l.$$

Nachdem zufolge der Gleichung (47) im §. 52 auch der Werth $mt \frac{d^2 y}{d x^2}$ das statische Kraftmoment repräsentirt, dieser Werth aber aus der Gleichung (305) oder (309) zu entnehmen ist, je nachdem man eines der beiden Curvenstücke BD oder CD betrachtet, so wird man das Kraftmoment für den Punct D auch erhalten können, wenn man in der einen oder in der andern jener citirten Gleichungen die Abscisse $x = o$ setzt.

Fig. 239.



Wenn man übrigens die statischen Kraftmomente nach den Gleichungen (305) und (309) im Sinne des §. 127 graphisch darstellt, so gelangt man zur Fig. 239. Der grösste numerische Werth für das Kraftmoment ist offenbar in D vorhanden, wesshalb daselbst in Uebereinstimmung mit dem Gesagten nach §. 127 der gefährliche Querschnitt liegen muss.

Heisst man M das Tragmoment des Querschnittes im Sinne des §. 77, und beachtet, dass dasselbe gleich dem obigen Kraftmomente sein muss, wenn bei der Anspruchsnahme des Trägers die Gränze der Elasticität geradezu erreicht werden soll, so ist die dazu nöthige (also grösste zulässige) Belastung $Max.\ Q$ das Tragvermögen. Dieses folgt daher aus der Relation

$$\left(\frac{1-4n^2}{4}\right) l \cdot Max.\ Q = M$$

mit

$$Max.\ Q = \frac{4M}{(1-4n^2)\, l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318).$$

§. 174.

Besondere Eigenschaften.

1. Die Gleichung (318) für das Tragvermögen ist, wie man sieht, von n, also von der Lage des Angriffspunctes D abhängig. Dasselbe wird desto kleiner, je näher der Punct D gegen die Mitte des Trägers rückt. Das kleinste Tragvermögen findet daher für $n = o$ statt, d. h. wenn die Last Q in der Mitte wirkt, und in diesem ungünstigsten Falle ist in Uebereinstimmung mit der Gleichung (108) im §. 86

$$Max.\ Q = \frac{4M}{l}.$$

In allen andern Fällen ist das Tragvermögen grösser. So z. B. erhält man für $n = \frac{1}{4}$

$$Max.\ Q = 5\tfrac{1}{3}\ \frac{M}{l},$$

somit das Tragvermögen $1\frac{1}{3}$mal so gross, wie zuvor.

2. Die Biegung δ des Trägers in D nimmt zu Folge der Gleichung (314) mit Q zu, und wird unter sonst gleichen Umständen und ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränze am grössten, wenn Q das Tragvermögen erreicht. Nennt man daher die grösste zulässige Biegung in D, $Max.\ \delta$, so hat man

$$Max.\ \delta = (1 - 4n^2)^2\ \frac{Ql^3\ Max.}{48\,m\,t},$$

somit wegen der Gleichung (318) auch

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{12}\ (1 - 4n^2)^2\ \frac{Ml^2}{m\,t}\ .\ .\ .\ .\ (319).$$

Für $n = o$ befindet sich die Last Q in der Mitte des Trägers, und es stimmt sodann das diessfällige Resultat $\frac{Ml^2}{12\,m\,t}$ mit der Formel (119) im §. 92 überein.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 175.

Allgemeine Formel. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erschöpfung seines Tragver-

mögens leisten kann, ist nach Anleitung des §. 107 aus der Formel

$$W = \frac{1}{2}\,(Max.\ Q)\ .\ (Max.\ \delta)$$

zu berechnen. Substituirt man daher für $Max.\ Q$ und $Max.\ \delta$ die entsprechenden Werthe (318) und (319), so erhält man nach vorgenommener Reduction

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{M^2 l}{m t},$$

und, weil nach Gleichung (95) das Tragmoment

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{a t}{h'} \\ \text{oder } \dfrac{r t}{h''} \end{cases}$$

ist, auch

$$W = \begin{Bmatrix} \text{entw. } \frac{1}{6}\,\dfrac{a^2}{m}\,\dfrac{t l}{h'^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6}\,\dfrac{r^2}{m}\,\dfrac{t l}{h''^2} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (320),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat.

Zu Folge dieser Formel ist das mechanische Widerstandsmoment von n, daher von der Lage des Kraftangriffspunctes D unabhängig. Diess bestätigt auch die Identität der Relationen (148) und (320), von welchen die erstere dem Falle angehört, wo der Kraftangriffspunct in der halben Länge des Trägers sich befindet.

Zweites Kapitel.

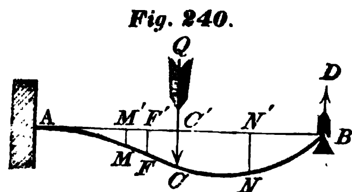
Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe an einer beliebigen Stelle belastet ist.

§. 176.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 240) den prismatischen Träger AB an einem Ende A festgehalten, am anderen Ende B unterstützt, und an der Stelle C belastet. Man suche wieder die

Biegung, das **Tragvermögen** und das **mechanische Widerstandsmoment** des Trägers.

Fig. 240.



Zu diesem Behufe sei
das Belastungsgewicht $= Q$,
der Abstand AB . . . $= l$,
der Abstand AC' . . . $= nl$,
und die Senkung des Punctes C d. i. CC' . . . $= \delta$,

man zähle ferner von A aus, als Coordinatenursprung die horizontalen Abscissen in der Richtung von A gegen B, die verticalen Ordinaten hingegen nach abwärts, und nenne sofort für einen beliebigen Punct M des Curventheiles AC

$AM' =$ . . . . $= x$,
$MM' =$ . . . . $= y$,

und den Winkel, welche die Tangente in C mit dem Horizonte bildet . . . . $= \varphi$.

Die Buchstaben m und t behalten die bisherige Bedeutung bei. Noch sei D der Druck auf die Stütze in B, welcher durch die Belastung Q hervorgebracht wird, und es werde hierbei von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt. Dieser Druck D lässt sich im vorliegenden Falle nicht im Voraus bestimmen, sondern derselbe wird sich erst im Laufe der Untersuchung ergeben. Betreffend den Coefficienten n in der Annahme $AC' = nl$, so kann derselbe zwischen den Gränzen 0 und 1 variiren.

Biegung.

§. 177.

Allgemeine Ableitung. Der in der Fig. 240 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn man die Stütze in B weggenommen, und an deren Statt eine Kraft angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt dem Drucke D auf jene Stütze ist.

Betrachtet man vorläufig nur den Theil der Biegungscurve AC, so hat man im Sinne der Gleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = Q(nl - x) - D(l - x) \quad . \quad . \quad (321),$$

daher durch Integration

$$mt\,\frac{dy}{dx} = Q\left(nlx - \frac{x^2}{2}\right) - D\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad (322)$$

und

$$mt\,y = Q\left(\frac{nlx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - D\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad . \quad . \quad (323),$$

wenn man berücksichtigt, dass an dem festgehaltenen Ende die Werthe für x, y und $\frac{dy}{dx}$ zugleich verschwinden müssen. Für den Punct C ist $x = nl$, $y = \delta$ und $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$, somit

$$mt\,tg\,\varphi = [\tfrac{1}{2}n^2 Q - D(\,n - \tfrac{1}{2}n^2)]\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

und

$$mt\,\delta = [\tfrac{1}{3}n^3 Q - D(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3)]\,l^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325).$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den Curventheil BC, wenn man für einen Punct N desselben die Coordinaten $AN' = x$ und $NN' = y$ setzt, die Bedingungsgleichungen

$$mt\,\frac{d^2y}{dx^2} = -(l - x)\,D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (326),$$

$$mt\,\frac{dy}{dx} = C - \left(lx - \frac{x^2}{2}\right)D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

und

$$mt\,y = C' + Cx - \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (328).$$

Um die noch unbekannten Coefficienten C und C' zu bestimmen, beachte man, dass für $x = nl$ eben so, wie früher, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = \delta$ werden muss, und dass man hiernach erhält:

$$mt\,tg\,\varphi = C - (n - \tfrac{1}{2}n^2)\,D\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

und

$$mt\,\delta = C' + Cnl - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{6}\right)D\,l^3 \quad . \quad . \quad . \quad (330).$$

Setzt man jetzt die Relationen (324) und (329) und beziehungsweise (325) und (330) einander gleich, und bestimmt hieraus die Constanten C und C', so findet man

$$C = \tfrac{1}{2}n^2 Q\,l^2 \text{ und } C' = -\tfrac{1}{6}n^3 Q\,l^3.$$

Berücksichtigt man endlich, dass für $x = l$ in der Gleichung (328) $y = o$ werden muss, so hat man

$$C' + Cl - \tfrac{1}{3}D\,l^3 = o,$$

und hieraus, wenn man statt C und C' die obigen Werthe substituirt,

$$D = \frac{n^2(3-n)}{2} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (331).$$

Der Druck D auf die Stütze in B, welcher anfänglich unbekannt war, ist also durch die Gleichung (331) bestimmt. Derselbe ist mit n, d. h. mit der Lage des Angriffspunctes von Q veränderlich.

So z. B. wird

$$\text{für } n = \tfrac{1}{4},\; D = \tfrac{11}{128} Q$$
$$\text{„ } n = \tfrac{1}{2},\; D = \tfrac{5}{16} Q$$
$$\text{„ } n = \tfrac{3}{4},\; D = \tfrac{81}{128} Q$$

etc. etc.

Es können nunmehr die Gleichungen, worin D erscheint, bestimmt dargestellt werden. Hiernach findet man aus den Relationen (324) und (325)

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{4}(1-n)(2-4n+n^2)\,n^2 \frac{Q\,l^2}{m\,t} \quad . \quad . \quad (332)$$

und die Biegung

$$\delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2(4-n)\,n^3 \frac{Q\,l^3}{m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333).$$

§. 178.

Besondere Eigenschaften der Biegungscurve.

1. Da die Gleichung (321) für einen zulässigen Werth von x Null werden kann, so folgt nach §. 52 ad 3 in Verbindung mit der Relation (47), dass der Curventheil AC (Fig. 240) einen Wendepunct F besitzt. Den Werth für seine Abscisse $x = AF'$ erhält man aus der Gleichung

$$m\,t \frac{d^2 y}{dx^2} = Q(n\,l - x) - D(l - x) = o,$$

mit

$$x = AF' = \left(\frac{n\,Q - D}{Q - D}\right) l = \frac{n(2-n)}{2+n(2-n)}\, l \quad . \quad (334).$$

Ist z. B. die Last Q in der Mitte zwischen A und B, oder $n = \frac{1}{2}$, so hat man $AF' = \frac{3}{11} l = \frac{3}{11} AB$.

2. Der Werth von

$$tg\,\varphi = \tfrac{1}{4}(1-n)(2-4n+n^2)n^2\,\frac{Q\,l^2}{m\,t}$$

verschwindet für $n = (2-\sqrt{2}) = 0{\cdot}5859$, sonst aber wird er positiv für $n < (2-\sqrt{2})$, und negativ für $n > (2-\sqrt{2})$. Hieraus folgt, dass die Tangente in C horizontal geht, wenn (Fig. 241) $AC' = (2-\sqrt{2})\,l$ ist, in jedem anderen Falle aber mit der Horizontalen AB convergirt, und zwar für $AC' < (2-\sqrt{2})\,l$ (Fig. 242) in der Richtung gegen A, hingegen für $AC' > (2-\sqrt{2})\,l$ (Fig. 243) in jener gegen B. So wird z. B. für $n = \frac{1}{2}$,

Fig. 241.

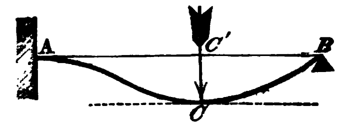
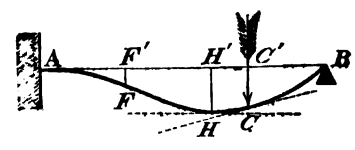


Fig. 242.

Fig. 243.



$$tg\,\varphi = \frac{1}{128}\cdot\frac{Q\,l^2}{m\,t},$$

also positiv, und die Tangente convergirt mit dem Horizonte, wie in der Fig. 242.

3. Ist, wie in der Figur 241, $n = (2-\sqrt{2})$, also die Tangente in C horizontal, so ist die Biegung $CC' = \delta$ zugleich die grösste in der ganzen Ausdehnung der Biegungscurve, und ihr Werth nach der Gleichung (333)

$$\delta = \left(\frac{17-12\sqrt{2}}{3}\right)\frac{Q\,l^3}{m\,t} = 0{\cdot}0098\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}.$$

Ist aber, wie in der Fig. 242, $n < (2-\sqrt{2})$, so liegt der grösste Biegungspfeil GG' in dem Curvenstücke BC. In diesem Falle geht die Tangente in G horizontal, und es muss für $x = AG'$ die Gleichung (327) verschwinden. Man hat sodann

$$m\,t\,\frac{dy}{dx} = C - (l\,x - \tfrac{1}{2}x^2)D = 0,$$

daher nach Substitution der Werthe für C und D,

$$x = AG' = \left(1 - \sqrt{\frac{1-n}{3-n}}\right)l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (335),$$

und hiermit die grösste Durchbiegung $\delta' = GG'$ nach der Gleichung (328)

$$\delta' = GG' = \tfrac{1}{6} n^2 (1-n) \sqrt{\frac{1-n}{3-n}} \cdot \frac{Ql^3}{mt} \quad . \quad (336).$$

Ist z. B. wieder $n = \frac{1}{2}$, so findet man

$$AG' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) l = 0{\cdot}5528\, l$$

und

$$\delta' = GG' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{Ql^3}{48\,mt} = 0{\cdot}4472 \frac{Ql^3}{48\,mt}.$$

Die Biegung an der Stelle C ist hingegen nach der Gleichung (333)

$$\delta = CC'' = \tfrac{7}{768} \cdot \frac{Ql^3}{mt} = 0{\cdot}4375 \frac{Ql^3}{48\,mt},$$

somit etwas kleiner, als die Biegung δ'. Würde der Träger bloss einfach an beiden Enden aufliegen, so wäre nach Gleichung (72) der numerische Werth der Biegung in der Mitte $\frac{Ql^3}{48\,mt}$. Die grösste Biegung $\delta' = GG'$ in dem obigen Falle ($n = \frac{1}{2}$) beträgt daher nur $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{\cdot}4472$ von derjenigen, welche vorhanden wäre, wenn man den Träger unter sonst gleichen Umständen auf beiden Enden aufgelegt hätte.

Ist endlich, wie in der Fig. 243, $n > (2 - \sqrt{2})$, so liegt der grösste Krümmungspfeil HH' in dem Curvenstücke AC. In diesem Falle geht die Tangente in H horizontal, und es muss für $x = AH'$ die Gleichung (322) verschwinden. Es wird sodann

$$mt \frac{dy}{dx} = Q\,(nlx - \tfrac{1}{2} x^2) - D\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) = o,$$

und nach gehöriger Substitution

$$x = AH' = 2\left(\frac{Qn - D}{Q - D}\right) l = \frac{2n(2-n)}{2+n(2-n)} l \quad (337).$$

Dieser Werth ist doppelt so gross, wie jener für AF' in der Gleichung (334), wonach der Wendepunct F in die Mitte des Trägerstückes AH zu liegen kommt.

Die grösste Biegung selbst findet man mit

$$HH' = \delta' = \frac{(1-n)\,n^3\,(2-n)^3}{[2 + n(2-n)]^2} \cdot \frac{Ql^3}{3\,mt} \quad . \quad . \quad . \quad (338).$$

So wäre z. B. für $n = 0{\cdot}8$ zunächst

$$AC' = 0{\cdot}8\,l,\quad AH' = 0{\cdot}6487\,l \text{ und } AF' = 0{\cdot}3244\,l,$$

hiernach aber

$$\delta' = HH' = 0{\cdot}0067\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}.$$

Die Biegung $CC' = \delta$ nach der Formel (333) wäre nur

$$\delta = CC' = 0{\cdot}0055\,\frac{Q\,l^3}{m\,t}.$$

4. Nach §. 127 befindet sich das grösste positive Kraftmoment, daher auch der kleinste positive Krümmungshalbmesser ρ_1 an der festgehaltenen Stelle A, hingegen der grösste numerische Werth der negativen Kraftmomente, daher auch der kleinste numerische Werth der negativen Krümmungshalbmesser ρ_2 an der Stelle C, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat. Da aus der Biegungstheorie bekannt ist, dass $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\rho}$ gesetzt werden kann, wenn allgemein ρ den Krümmungshalbmesser an der Stelle (x, y) bedeutet; so hat man zur Bestimmung des Krümmungsradius ρ_1 in A in der Gleichung (321) die Abscisse $x = o$ zu setzen, und hiernach folgende Relation zu benützen:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\rho} = (Q\,n - D)\,\frac{l}{m\,t} = \tfrac{1}{2}\,n\,(1 - n)\,(2 - n)\,\frac{Q\,l}{m\,t}.$$

Der Krümmungsradius ρ_2 folgt für $x = nl$ aus der Relation (326), welche die Form annimmt:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\rho} = -\,\frac{n^2}{2}\,(1 - n)\,(3 - n)\,\frac{Q\,l}{m\,t}.$$

Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass derselbe nach aufwärts gerichtet ist. Vergleicht man die numerischen Werthe der beiden Krümmungshalbmesser ρ_1 und ρ_2, so sieht man, dass sie für $n = (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 241) einander gleich werden, während für $n < (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 242) der Radius in A, und endlich für $n > (2 - \sqrt{2})$ (Fig. 243) der Radius in C der kleinere ist.

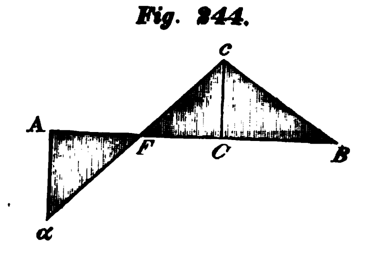
Tragvermögen.

§. 179.

Allgemeine Formel. Wenn man die statischen Kraftmomente nach den Gleichungen (321) und (326) im Sinne des

§. 127 graphisch darstellt, so gelangt man auf die Fig. 244. In der Längenaxe des Trägers AB bezeichnet F den Wendepunct der Curve, und es ist in A das grösste positive Kraftmoment, in C hingegen der grösste numerische Werth der negativen Kraftmomente vorhanden. Hiernach befindet sich der gefährliche Querschnitt entweder an der festgehaltenen Stelle A, oder in dem Puncte C, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat. Diese grössten numerischen Werthe der Kraftmomente folgen, der eine für $x=o$ aus der Gleichung (321), und der andere für $x=nl$ aus der Gleichung (326). Es ist nämlich

Fig. 244.



$$\text{für } x=o, \ldots\ldots ml\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}n\,(1-n)(2-n)\,Q\,l$$

$$\text{und } ,, \; x=nl \ldots\ldots ml\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l.$$

Diese Kraftmomente können übrigens auch unabhängig von den früheren Relationen gefunden werden, wenn man den Druck D kennt. Denn es ist offenbar das Kraftmoment in A

$$Q\,.\,\overline{AC'} - D\,.\,\overline{AB} = (nQ-D)\,l = \tfrac{1}{2}n\,(1-n)(2-n)\,Q\,l,$$

und jenes in C

$$-D\,.\,\overline{BC'} = -D\,(1-n)\,l = -\tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l.$$

Diess vorausgesetzt, vergegenwärtige man sich die Bemerkungen im zweiten Kapitel des ersten Abschnittes dieses Hauptstückes. Nach den dortigen Bezeichnungen hat man zu schreiben

$$R_1 z_1 = \tfrac{1}{2}n\,(1-n)(2-n)\,Q\,l \text{ u. } R_2 z_2 = \tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)(3-n)\,Q\,l$$

und aus der Vergleichung dieser beiden Kraftmomente mit den Tragmomenten M_1 und M_2 des Querschnittes auf die Lage des gefährlichen Querschnittes und auf das Tragvermögen zu schliessen.

Bezeichnet man das Tragvermögen, d. i. die grösste zulässige Belastung mit $Max.\,Q$, so hat man in Gemässheit des §. 125 jedenfalls

$$\text{entw. } M_1 = \tfrac{1}{2}n\,(1-n)\,(2-n)\,l\,.\,Max.\,Q$$

$$\text{oder } M_2 = \tfrac{1}{2}n^2\,(1-n)\,(3-n)\,l\,.\,Max.\,Q,$$

folglich

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.}\ \dfrac{2 M_1}{n\,(1-n)\,(2-n)\,l} \\ \text{oder}\ \dfrac{2 M_2}{n^2(1-n)\,(3-n)\,l} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (339)$$

und von diesen Alternativwerthen offenbar den kleineren zu nehmen *). Sind diese Werthe einander gleich, so befindet sich der gefährliche Querschnitt in A und C zugleich, sonst aber ist derselbe an jener Stelle vorhanden, zu welcher der kleinere von jenen Werthen gehört. So z. B. wäre für $n = \frac{1}{2}$ das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.}\ 5\tfrac{1}{3}\ \dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder}\ 6\tfrac{2}{3}\ \dfrac{M_2}{l}, \end{array} \right.$$

also für $M_1 = M_2 = M$ (Siehe §§. 81 und 125),

$$Max.\ Q = 5\tfrac{1}{3}\ \frac{M}{l},$$

und in diesem Falle der gefährliche Querschnitt in A, ferner das Tragvermögen $5\frac{1}{3}$mal so gross, wie in dem Falle I (§. 58), wo der Träger an einem Ende festgehalten, und am anderen Ende belastet wird.

§. 180.

Besondere Eigenschaften.

1. Wenn der erste von den beiden Werthen in der Formel (339) das Tragvermögen angibt, somit

$$Max.\ Q = \frac{2 M_1}{n\,(1-n)\,(2-n)\,l}$$

ist, so wird dasselbe unter sonst gleichen Umständen für den Maximalwerth von $n\,(1-n)\,(2-n)$ ein Minimum. Diess geschieht für

$$\frac{d\,[n\,(1-n)\,(2-n)]}{dn} = (2 - 6n + 3n^2) = 0,$$

*) Da auch die Tragmomente M_1 und M_2 alternativ darzustellen sind, so leuchtet ein, dass das obige Tragvermögen $Max.\ Q$ eigentlich durch vier Alternativ-Formeln ausgedrückt erscheint, von denen diejenige Mass und Ziel zu geben hat, welche den kleinsten Werth hat.

also für

$$n = (1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 0{\cdot}4226,$$

weil hiefür

$$\frac{d^2[n(1-n)(2-n)]}{dn} = -\ 6(1-n) = -\ 2\sqrt{3}$$

wesentlich negativ ist. Der Minimalwerth für das Tragvermögen wird in diesem Falle

$$Max.\,Q = \frac{3\sqrt{3}\,M_1}{l} = 5{\cdot}1962\,\frac{M_1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (340).$$

Dieser Werth muss jedoch der Voraussetzung zu Folge kleiner sein, als der zweite Alternativwerth in der Formel (339), welcher für $n = (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})$ übergeht in:

$$\frac{2\,M_2}{n^2(1-n)(3-n)\,l} = \tfrac{9}{11}(3\sqrt{3}+4)\,\frac{M_2}{l} = 7{\cdot}5241\,\frac{M_2}{l}.$$

Hiernach hat man für die Giltigkeit der Gleichung (340) die Bedingung

$$3\sqrt{3}\,M_1 = 5{\cdot}1962\,M_1 < \tfrac{9}{11}(3\sqrt{3}+4)\,M_2 = 7{\cdot}2541\,M_2,$$

oder

$$M_1 : M_2 < 7{\cdot}2541 : 5{\cdot}1962 = 1{\cdot}398 : 1,$$

was z. B. für $M_1 = M_2$ der Fall sein wird.

2. Wenn der zweite Alternativwerth als der kleinere das Tragvermögen bezeichnet, so wird unter sonst gleichen Umständen das Tragvermögen ein Minimum, wenn $n^2(1-n)(3-n)$ das Maximum erreicht. Diess geschieht für

$$\frac{d\,[n^2(1-n)(3-n)]}{dn} = (3 - 6\,n + 2\,n^2) = 0,$$

d. i. für

$$n = \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3}{2}(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}) = 0{\cdot}6339,$$

weil sodann

$$\frac{d^2\,[n^2(1-n)(3-n)]}{dn^2} = -\ 2\ (3 - 2\,n) = -\ 2\sqrt{3}$$

negativ ausfällt. Der betreffende Minimalwerth für das Tragvermögen wird

$$Max.\ Q = \tfrac{8}{9}\ (2\sqrt{3}+3)\ \frac{M_2}{l} = 5{\cdot}7459\ \frac{M_2}{l}\ .\quad (341).$$

Dieser Werth muss aber kleiner sein, als der erste Alternativwerth in der Formel (339), welcher für $n = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ übergeht in:

$$\frac{2 M_1}{n(1-n)(2-n)l} = \tfrac{4}{3}(3+\sqrt{3})\,\frac{M_1}{l} = 6\cdot3095\,\frac{M_1}{l},$$

wornach die Bedingung entsteht

$$\tfrac{8}{9}(2\sqrt{3}+3)\,M_2 = 5\cdot7459\,M_2 < \tfrac{4}{3}(3+\sqrt{3})\,M_1 = 6\cdot3095\,M_1,$$

oder

$$M_2 : M_1 < 6\cdot3095 : 5\cdot7459 = 1\cdot0981 : 1,$$

welche z. B. wieder für $M_1 = M_2$ eintreten wird.

3. Die Vergleichung der Formeln (340) und (341) zeigt, dass für $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) die erste Formel, nämlich

$$Max.\ Q = \frac{3\sqrt{3}}{l}\,M = 5\cdot1962\,\frac{M}{l}$$

das kleinste Tragvermögen angibt, welches je nach der Lage des Angriffspunctes C entstehen kann. In diesem Falle muss

$$AC' = (1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3})\,l = 0\cdot4226\,AB$$

(Fig. 242) sein.

4. Da die nach der Formel (333) in C entstehende Biegung

$$\delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2(4-n)\,n^3\,\frac{Q\,l^3}{mt}$$

mit Q zunimmt, so wird dieselbe unter sonst gleichen Umständen am grössten, wenn Q das Tragvermögen erreicht. Nennt man daher die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, so ist

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{12}(1-n)^2(4-n)\,n^3\,\frac{l^3 .\ Max\ Q}{mt},$$

also wegen der Relation (339)

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw.}\ \dfrac{n\,(1-n)(4-n)}{6\,(2-n)}\ .\ \dfrac{M_1\,l^2}{mt} \\ \text{oder}\ \dfrac{n\,(1-n\ (4-n)}{6\,(3-n)}\ .\ \dfrac{M_2\,l^2}{mt} \end{array}\right\} \quad . \quad (342),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat. So wird z. B. für $n = \frac{1}{2}$

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw.}\ \frac{7}{144}\ \dfrac{l^2 M_1}{mt} \\ \text{oder}\ \frac{7}{120}\ \dfrac{l^2 M_2}{mt}, \end{array}\right.$$

also etwa für $M_1 = M_2 = M$, wie gewöhnlich bei dem Schmiedeeisen,

$$Max.\ \delta = \frac{7}{144} \frac{l^2 M}{mt}.$$

Würde der Träger bloss an beiden Enden aufliegen (Fig. 59), so wäre die grösste zulässige Biegung nach der Gleichung (119)

$$\frac{Ml^2}{12\,mt} = \frac{12}{144} \frac{Ml^2}{mt},$$

somit grösser, als in dem vorigen Falle.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 181.

Allgemeine Formel. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erschöpfung seines Tragvermögens leisten kann, ist nach §. 107 aus der Formel

$$W = \tfrac{1}{2}\,(Max.\ Q)\,(Max.\ \delta)$$

zu bestimmen.

Setzt man daher statt $Max.\ Q$ und $Max.\ \delta$ die entsprechenden Werthe (339) und (342), so erhält man

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{8} \frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2} \cdot \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{(4-n)}{n\,(3-n)^2} \cdot \frac{M_2^2 l}{mt} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (343),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu gelten hat. Für $n = \frac{1}{2}$ wird z. B.

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{7}{54} \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{14}{75} \frac{M_2^2 l}{mt}, \end{array} \right.$$

also etwa für $M_1 = M_2 = M$, wie gewöhnlich bei dem Schmiedeeisen,

$$W = \frac{7}{54} \cdot \frac{M^2 l}{mt} = \frac{7}{9} \cdot \frac{M^2 l}{6\,mt}.$$

Dieser Werth beträgt nur $\frac{7}{9}$ von jenem, welcher für das mechanische Widerstandsmoment im §. 175 gefunden wurde, wo man den Träger auf beiden Enden aufliegend betrachtet hat.

§. 182.

Besondere Eigenschaft. Wenn der Träger an einem Ende festgehalten und am andern Ende belastet, oder wenn derselbe an beiden Enden aufgelegt und an irgend einer Stelle von der Last in Anspruch genommen wird, so hat man zufolge der Gleichungen (147), (148) und (320) jedesmal in dem Ausdrucke für das mechanische Widerstandsmoment denselben numerischen Coefficienten $(\frac{1}{6})$. Da nun in der Gleichung (343) der fragliche Coefficient

$$\begin{cases} \text{entw. } \frac{1}{6} \cdot \frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \cdot \frac{(4-n)}{n(3-n)^2}, \end{cases}$$

also mit n variabel ist, so kann man untersuchen, unter welcher Bedingung derselbe gleich, kleiner oder grösser als $\frac{1}{6}$ wird, um sodann einen Vergleich zwischen den in diesem Kapitel behandelten Falle und jenen anzustellen, die sich auf die citirten Gleichungen (147), (148) und (320) beziehen. Man findet leicht, dass der alternative Coefficient $\frac{1}{6}\frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2}$ oder $\frac{1}{6}\frac{4-n}{n(3-n)^2}$ den Werth $\frac{1}{6}$ annimmt, wenn $n = (2-\sqrt{2})$ wird, d. h., wenn der Kraftangriffspunct C eine solche Lage hat, auf welche mittelst Fig. 241 aufmerksam gemacht wurde. In diesem Falle ist das mechanische Widerstandsmoment eben so gross, wie in den erwähnten andern Fällen, wenn das in Betracht kommende Tragmoment überall den gleichen Werth hat. Sonst aber, wo n von $(2-\sqrt{2})$ verschieden ist, differirt der betreffende Coefficient von dem Werthe $\frac{1}{6}$, und zwar ist der erste Alternativcoefficient $\frac{1}{6}\frac{(4-n)\,n}{(2-n)^2}$ für $n > (2-\sqrt{2})$ grösser, und für $n < (2-\sqrt{2})$ kleiner als $\frac{1}{6}$, hingegen der zweite Alternativcoefficient $\frac{1}{6}\frac{(4-n)}{n(3-n)^2}$, gerade umgekehrt, für $n > (2-\sqrt{2})$ kleiner, und für $n < (2-\sqrt{2})$ grösser als $\frac{1}{6}$.

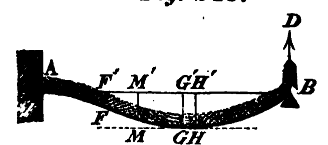
Drittes Kapitel.

Widerstand eines an einem Ende festgehaltenen und am anderen Ende unterstützten Trägers, wenn derselbe der ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist.

§. 183.

Annahmen. Man denke sich (Fig. 245) den prismatischen Träger AB an einem Ende A festgehalten, und am anderen Ende B unterstützt, endlich mit der nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Belastung Q in Anspruch genommen. Zur Bestimmung der Biegung des Trägers, und seines Tragvermögens in diesem Falle hat man auf ähnliche Weise, wie im vorigen Kapitel zu verfahren.

Fig. 245.



Zu diesem Behufe sei

der Abstand AB . . . . $= l$,

für irgend einen Punct M der Längenaxe

die Abscisse AM' . . . . $= x$,

die Ordinate MM' . . . . $= y$,

ferner der Druck, welchen die Stütze in B zu erleiden hat, $= D$,

und es werden auch hier die Bezeichnungen m und t beibehalten.

So wie in dem vorigen Kapitel, wird auch gegenwärtig der Druck D erst im Laufe der folgenden Untersuchung bestimmt werden können.

Biegung.

§. 184.

Allgemeine Ableitung. Der in der Fig. 245 dargestellte Fall bleibt ungeändert, wenn man die Stütze in B weggenommen, und an deren Statt eine Kraft angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt dem Drucke D auf jene Stütze ist. Dieser Bemerkung gemäss hat man nach Gleichung (47)

$$m t \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Q(l-x)^2}{2l} - D(l-x)$$

$$= \frac{Q}{2l}(l^2 - 2lx + x^2) - D(l - x) \quad (344),$$

daher durch Integration

$$m t \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2l}(l^2 x - l x^2 + \tfrac{1}{3} x^3) - D(l x - \tfrac{1}{2} x^2) \quad (345)$$

und

$$m t\, y = \frac{Q}{2l}(\tfrac{1}{2} l^2 x^2 - \tfrac{1}{3} l x^3 + \tfrac{1}{12} x^4) - D(\tfrac{1}{2} l x^2 - \tfrac{1}{6} x^3) \quad (346),$$

wenn man berücksichtigt, dass an dem festgehaltenen Ende die Grössen x, y und $\frac{dy}{dx}$ zugleich verschwinden. Für den Punct B ist $x = l$ und $y = o$, es findet daher der Gleichung (346) gemäss die Bedingung

$$o = \tfrac{1}{8} Q l^3 - \tfrac{1}{3} D l^3$$

statt, aus welcher sich der unbekannte Druck D ergibt mit

$$D = \tfrac{3}{8} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347).$$

Hiernach gehen die vorigen Gleichungen (344), (345) und (346) in folgende bestimmte über:

$$m t \frac{d^2 y}{dx^2} = \tfrac{1}{8} Q (l - x)(l - 4x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (348),$$

$$m t \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{48} \frac{Q}{l} x (6 l^2 - 15 l x + 8 x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

und

$$m t\, y = \tfrac{1}{48} \frac{Q}{l} x^2 (l - x)(3l - 2x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (350).$$

§. 185.

Besondere Eigenschaften.

1. Die grösste Biegung findet in dem Puncte G statt, allwo die Tangente horizontal geht, und für denselben muss daher $\frac{dy}{dx}$, also auch

$$m t . \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{48 l} . x (6 l^2 - 15 l x + 8 x^2) = 0$$

sein. Hieraus ergibt sich für die Abscisse des Punctes G der Werth

$$x = AG' = \left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)l = 0{\cdot}5785\,l \quad . \quad . \quad . \quad (351),$$

und hiermit die grösste Biegung selbst nach der Gleichung (350)

$$\delta = GG' = \left(\frac{39+55\sqrt{33}}{16^4}\right)\frac{Ql^3}{ml} = 0{\cdot}0054\,\frac{Ql^3}{ml} \quad . \quad (352).$$

2. Die Biegung in der halben Länge findet man für $x = \frac{1}{2}l$ aus der Gleichung (350) und sie ist $\frac{1}{192}\,\frac{Ql^3}{ml} = 0{\cdot}0052\,\frac{Ql^3}{ml}$, somit nur wenig geringer, als die obige Maximalbiegung (δ).

3. Da die Gleichung (348) für $x = \frac{1}{4}l$ verschwindet, und dieser Werth von x zwischen o und l liegt, so besitzt die Curve einen Wendepunct F, für welchen die Abscisse ist:

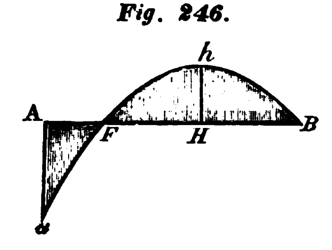
$$x = AF' = \tfrac{1}{4}AB.$$

4. Die Gleichung (348)

$$ml\,\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{8}Q\,(l-x)(l-4x)$$

bezeichnet die statischen Kraftmomente, und bezieht sich auch auf die Krümmungshalbmesser der Biegungscurve, da dieselben dem Werthe $\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$ gleich sind. Stellt man jene statischen Kraftmomente im Sinne des §. 128 graphisch dar, so gelangt man zur Fig. 246. Die erhaltene krumme Linie ist eine gemeine Parabel, welche durch den Wendepunct F geht, und deren Axe Hh vertical liegt. Die grössten numerischen Werthe für die Ordinaten dieser Parabel befinden sich dieser Figur gemäss, und in Uebereinstimmung mit dem §. 128 in A und H. A ist die Stelle, wo der Träger festgehalten wird, während die Stelle H in der Mitte zwischen B und F liegt, wornach

Fig. 246.



$$AH = \left(\frac{AF+AB}{2}\right) = \tfrac{5}{8}l$$

ist. Hiernach sind die statischen Kraftmomente, so wie die Krümmungshalbmesser der Biegungscurve zwischen A und F positiv, und zwischen F und B negativ. Das grösste positive Kraftmoment, und

der kleinste positive Krümmungshalbmesser sind für $x = o$ in A, hingegen die grössten numerischen Werthe von den negativen Kraftmomenten und den negativen Krümmungshalbmessern für $x = \frac{5}{8} l$ in H vorhanden. Man erhält nämlich

$$\text{für } x = o \ldots . \; mt \,.\, \frac{d^2 y}{d x^2} = \tfrac{1}{8} Q l$$

$$\text{und ,, } x = \tfrac{5}{8} l \ldots \; mt \,.\, \frac{d^2 y}{d x^2} = - \tfrac{9}{128} Q l.$$

Heisst man daher ϱ_1 den Krümmungshalbmesser in A, und ϱ_2 jenen in H, hingegen die betreffenden grössten numerischen Werthe für die Kraftmomente, wie im §. 124, $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \frac{mt}{\varrho_1} &= \tfrac{1}{8} Ql \\ -\frac{mt}{\varrho_2} &= \tfrac{9}{128} Ql \end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned} R_1 z_1 &= \tfrac{1}{8} Ql \\ R_2 z_2 &= \tfrac{9}{128} Ql \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (353).$$

T r a g v e r m ö g e n.

§. 186.

A l l g e m e i n e F o r m e l. Mit Rücksicht auf den vorigen §. ist der gefährliche Querschnitt entweder in A oder in H vorhanden. Bezeichnet man im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes bezüglich der Anspruchsnahme in A mit M_1, und bezüglich der Anspruchsnahme in H mit M_2, und nennt man das Tragvermögen $Max.\, Q$, so hat man dem §. 124 zufolge

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = \tfrac{1}{8} \, l \,.\, Max.\, Q$$

$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = \tfrac{9}{128} \, l \,.\, Max.\, Q,$$

also das T r a g v e r m ö g e n

$$Max.\, Q = \left\{\begin{aligned} &\text{entw. } 8 \, \frac{M_1}{l} \\ &\text{oder } \tfrac{128}{9} \, \frac{M_2}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (354),$$

je nachdem die erste oder zweite Alternative einen kleineren Werth gibt *).

---

*) Die Anmerkung zum §. 179 findet auch in diesem Falle Anwendung.

§. 187.

Besondere Eigenschaften.

1. Ist $M_1 = M_2 = M$ (siehe §. 125 ad 1 und 2), so gibt die erste Alternative in der Formel (354) den kleineren Werth, und es ist das Tragvermögen

$$Max.\ Q = 8\frac{M}{l}$$

also eben so gross, wie in dem Falle IV (§§. 58 und 87), wo der gleichförmig belastete Träger bloss auf beiden Enden aufliegen würde.

Für gusseiserne Träger kann es geschehen, dass $\frac{8M_1}{l} > \frac{128}{9}\frac{M_2}{l}$ wird. In diesem Falle ist das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \frac{128}{9}\frac{M_2}{l} = 14\tfrac{2}{9}\frac{M_2}{l}.$$

2. Die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen erreicht werden kann, ist mit Rücksicht auf die Formeln (352) und (354) offenbar

$$Max.\ \delta = \left(\frac{39 + 55\sqrt{33}}{16^4}\right)\frac{l^2 .\ Max.\ Q}{mt},$$

also auch alternativ

$$Max.\ \delta = \left\{\begin{array}{l} \text{entw.}\ \left(\frac{39+55\sqrt{33}}{2.16^3}\right)\frac{M_1 l^2}{mt} = 0\cdot0433\ \frac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder}\ \left(\frac{33+55\sqrt{33}}{18.16^3}\right)\frac{M_2 l^2}{mt} = 0\cdot0770\ \frac{M_2 l^2}{mt} \end{array}\right\} \quad (355),$$

wo wieder der kleinere Werth zu gelten hat. Für $M_1 = M_2 = M$ wird z. B. der erste von jenen Werthen kleiner sein.

Viertes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen A und B ruhenden Trägers DE, welcher zwischen den Stützen mit der Last Q, und an beiden Enden D und E mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in A und B horizontal werden (Fig. 247).

§. 188.

Annahmen. Diesen Fall kann man sich auch dadurch versinnlichen, dass man die Stützen in A und B weggenommen, und an deren Statt Kräfte angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Bezeichnet man diese Drücke mit D_1 und D_2, so gelangt man dadurch auf die Betrachtung des freien Hebelsystemes (Fig. 248), an welchem die verticalen Kräfte D_1, D_2, P_1, P_2 u. Q wirken.

Fig. 247.

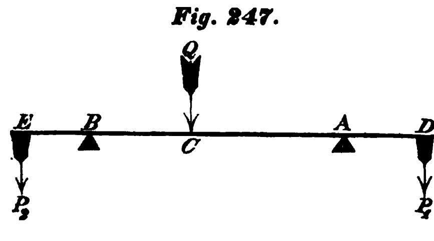
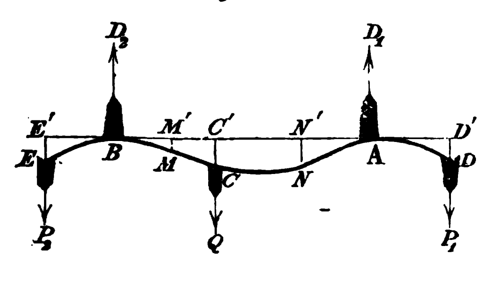


Fig. 248.



Zur Untersuchung des Biegungs-Widerstandes nenne man

die Länge AB . . . . $= l$,
" " BC' . . . . $= nl$,
" " AD' . . . . $= pl$,
" " BE' . . . . $= ql$,
die Biegung in dem Puncte C, d. i. . . . . . . $CC' = \delta$,
setze für einen Punct M des Curvenstückes BC
die Abscisse BM' . . . . $= x$,
" Ordinate MM' . . . . $= y$,

ferner den Winkel, welchen die Tangente in C mit dem Horizonte bildet . . . . $= \varphi$,
und behalte wieder die Bezeichnungen m und t im Sinne des §. 53 bei.

Es leuchtet ein, dass in diesem Falle, wo die Tangenten in A und B horizontal sein sollen, die Kräfte P_1 und P_2 nicht mehr beliebig sein können, sondern gewisse Werthe haben müssen, welche aber vorläufig noch unbekannt sind und erst im Laufe der folgenden Untersuchung sich ergeben werden. Eben so sind auch die Drücke D_1 und D_2 unbekannt, daher noch zu bestimmen. Jedenfalls muss aber zufolge des Gleichgewichtes bei dem freien Hebelssysteme (Fig. 248) die Bedingung

$$D_1 + D_2 = P_1 + P_2 + Q \quad . \; . \; . \quad (356)$$

existiren, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird.

Biegung.

§. 189.

Allgemeine Ableitung. Betrachtet man zuerst das Curvenstück BC, so hat man im Sinne der Gleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = $$
$$= Q(nl - x) + P_1[(1+p)l - x] - D_1(l - x) \quad (357),$$

$$mt\frac{dy}{dx} = $$
$$= Q(nlx - \tfrac{1}{2}x^2) + P_1[(1+p)lx - \tfrac{1}{2}x^2] - D_1(lx - \tfrac{1}{2}x^2) \quad (358),$$

$$mt\,y = $$
$$= Q(\tfrac{1}{2}nlx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + P_1\left[\frac{(1+p)}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right] - D_1(\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) \quad (359),$$

wo mit x o, auch die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden müssen.

Nach der Voraussetzung muss ferner für $x = BC' = nl$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = CC' = \delta$ werden, wesshalb man hat

$$mt\,tg\,\varphi = \left[\tfrac{1}{2}n^2Q + [(1+p)n - \tfrac{1}{2}n^2]P_1 - (n - \tfrac{1}{2}n^2)D_1\right]l^2 \,(360),$$

und

$$mt\,\delta = \left[\tfrac{1}{3}n^3Q + \left[\frac{(1+p)}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3\right]P_1 - (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3)D_1\right]l^3 \,(361).$$

Auf das zweite Curvenstück AC übergehend, betrachte man einen Punct N desselben, und setze dessen Abscisse $BN' = x$, dessen Ordinate aber $NN' = y$. Hiernach erhält man ähnlich, wie zuvor

$$m\iota \frac{d^2 y}{dx^2} = P_1 [(1+p)l \quad - \quad x] - D_1 (l-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (362),$$

$$m\iota \frac{dy}{dx} = P_1 [(1+p)lx - \tfrac{1}{2}x^2] - D_1 (lx - \tfrac{1}{2}x^2) + C \quad . \quad (363)$$

und

$$m\iota \; y = P_1 \left[\frac{(1+p)}{2} lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3\right] - D_1 (\tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Cx + C' \; (364),$$

wobei die Constanten C und C' noch aufzusuchen sind.

Auch ist, da für den Punct C $x = nl$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und $y = \delta$ gleichzeitige Werthe sind,

$$m\iota \; tg\,\varphi =$$

$$= \left[P_1 [(1+p)n - \tfrac{1}{2}n^2] - (n - \tfrac{1}{2}n^2) D_1\right] l^2 + C \quad . \quad . \quad (365)$$

und

$$m\iota \; \delta \quad =$$

$$= \left[P_1 \left[\frac{(1+p)}{2} n^2 - \tfrac{1}{6}n^3\right] - (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^3) D_1\right] l^3 + Cnl + C' \quad (366).$$

Die Constanten C und C' ergeben sich jetzt, wenn man die Relationen (360) und (365), so wie (361) und (366) vergleicht, mit

$$C = \tfrac{1}{2}n^2 Q l^2 \text{ und } C' = -\tfrac{1}{6}n^3 Q l^3.$$

Berücksichtigt man noch, dass für den Punct A, also für $x = l$, sowohl $\frac{dy}{dx}$ als auch y verschwinden muss, so ist den Gleichungen (363) und (364) zufolge

$$(\tfrac{1}{2} + p) P_1 l^2 - \tfrac{1}{2} D_1 l^2 + C = o,$$

und

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}p) P_1 l^3 - \tfrac{1}{3} D_1 l^3 + Cl + C' = o,$$

also mit Benützung der für C und C' gefundenen Werthe

$$P_1 = \frac{n^2 (1-n)}{p} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (367),$$

und

$$D_1 = \left[\frac{n^2 (1-n)}{p} + n^2 (3-2n)\right] Q \quad . \quad . \quad (368),$$

Man hätte offenbar in der Untersuchung die Abscissen, anstatt von B gegen A, gerade umgekehrt, von A gegen B wählen können, und würde sodann, statt den Relationen (367) und (368), zwei andere erhalten haben, welche von jenen nur dadurch unterschieden wären, dass statt P_1, D_1, n und p respective die Werthe P_2, D_2, $(1-n)$ und q vorkämen.

Dieser Bemerkung gemäss müssen folgende Relationen existiren:

$$P_2 = \frac{n(1-n)^2}{q} Q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (369)$$

und $$D_2 = \left[\frac{n(1-n)^2}{q} + (1-n)^2(1+2n)\right] Q \quad (370).$$

Als Controle für die Ricktigkeit dieser Resultate kann die Gleichung (356) dienen, denn man hat in der That

$$D_1 = P_1 + n^2(3-2n)Q$$
$$D_2 = P_2 + (1-n)^2(1+2n)Q$$

und $$D_1 + D_2 = P_1 + P_2 + Q,$$

somit übereinstimmend mit der citirten Gleichung.

Mit Hilfe der nunmehr bekannten Werthe von C, C', D_1, D_2, P_1 und P_2, gehen die Bedingungsgleichungen in folgende bestimmte über:

Die Gleichung

(357) in $$mt\frac{d^2y}{dx^2} = (1-n)^2 Q \; [nl - (1+2n)x] \quad . \quad (371),$$

(358) in $$mt\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(1-n)^2 Qx \; [2nl - (1+2n)x] \quad . \quad (372),$$

(359) in $$mt\, y = \tfrac{1}{6}(1-n)^2 Qx^2 \; [3nl - (1+2n)x] \quad . \quad (373),$$

(362) in $$mt\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 Q \, [-(2-n)l + (3-2n)x] \quad . \quad (374),$$

(363) in $$mt\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}n^2 Q \,(l-x)\, [-l + (3-2n)x] \quad . \quad (375),$$

(364) in $$mt\; y = \tfrac{1}{6}n^2 Q\,(l-x)^2 [-nl + (3-2n)x] \quad . \quad (376),$$

und es folgt aus

(360) $$tang\,\varphi = \tfrac{1}{2}n^2(1-n^2)(1-2n)\frac{Ql^2}{mt} \quad \ldots \ldots \quad (377),$$

endlich die Biegung aus

(361) $$\delta = \tfrac{1}{3}n^3(1-n)^3\frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (378).$$

§. 190.

Besondere Eigenschaften.

1. Sämmtliche bestimmte Relationen mit Ausnahme jener für P_1 (367), D_1 (368), P_2 (369) und D_2 (370) sind von p und q unabhängig. Es bleibt daher das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B gegen Biegung unabhängig von den Umständen, welche sich auf die Trägerstücke AD und BE beziehen, wenn nur der Bedingung gemäss die Tangenten an die Biegungscurve in A und B horizontal sind.

2. Um die genannte Bedingung zu erreichen, müssen die an den Enden des Trägers D und E anzubringenden Kräfte P_1 und P_2 die unter (367) und (369) gegebenen Werthe haben. Diese Kräfte variiren zwar mit den Trägerstücken $\overline{AD'} = pl$ und $\overline{BE'} = ql$, die Producte aus denselben und den Längen der dazu gehörigen Trägerstücke aber sind von den Grössen p und q unabhängig. Es ist nämlich

$$P_1 \, . \, \overline{AD'} = P_1 \, . \, pl = n^2 (1 - n) Q l \text{ und}$$
$$P_2 \, . \, \overline{BE'} = P_2 \, . \, ql = n \, (1 - n)^2 Q l.$$

Diese Producte sind offenbar die statischen Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B, woraus folgt, dass die beiden Hebelsarme $\overline{AD'}$ und $\overline{BE'}$ verschieden lang sein können, ohne dass das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B gestört wird, insoferne die Kräfte P_1 und P_2 solche Werthe haben, dass die hiernach entstehenden Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B unverändert bleiben. Je kleiner also die Stücke AD und BE sind, desto grösser müssen die Kräfte P_1 und P_2 sein, und ebenso umgekehrt. Befindet sich die Last Q in der Mitte zwischen beiden Stützen, so wird

$$n = \tfrac{1}{2}, \quad P_1 = \tfrac{1}{8} \frac{Q}{p} \quad \text{und} \quad P_2 = \tfrac{1}{8} \frac{Q}{q},$$

also, wenn die Stücke AD und BE gleich gross sind, sofort

$$p = q \text{ und } P_1 = P_2.$$

Auch kann zur Wissenschaft dienen, dass unter sonst gleichen Umständen die Kraft P_1 für $n = \frac{2}{3}$, die Kraft P_2 aber für $n = \frac{1}{3}$ am grössten wird, so dass also in diesen beiden Fällen die Bedingung der horizontalen Richtung für die Tangenten in A und B am schwierigsten zu erfüllen ist. Es ist merkwürdig, dass diese beiden Fälle ($n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$) sich ungünstiger darstellen,

als wenn $n = \frac{1}{2}$, d. h. die Last Q in der Mitte zwischen den Stützen angebracht ist.

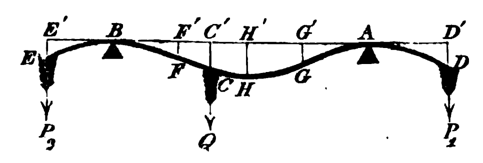
In der That hat man

$$\text{für } n = \tfrac{2}{3} \ldots P_1 = \tfrac{4}{27}\frac{Q}{p} \text{ und } P_2 = \tfrac{2}{27}\frac{Q}{q}$$

$$\text{für } n = \tfrac{1}{3} \text{ aber } P_1 = \tfrac{2}{27}\frac{Q}{p} \text{ und } P_2 = \tfrac{4}{27}\frac{Q}{q},$$

also im ersten Falle für P_1 und im zweiten Falle für P_2 einen grösseren Werth, als in dem Falle $n = \frac{1}{2}$.

Fig. 249.



3. Die Biegungscurve hat zwei Wendepuncte F und G (Fig. 249), deren Abscissen gefunden werden, wenn man die Werthe (371) und (374) gleich Null setzt. Hierdurch erhält man aus der ersten

$$x = AF' = \left(\frac{n}{1+2n}\right) l \quad \ldots \ldots \quad (379),$$

und aus der zweiten

$$x = AG' = \left(\frac{2-n}{3-2n}\right) l \quad \ldots \ldots \quad (380).$$

Ist z. B. die Last Q in der Mitte, also $n = \frac{1}{2}$, so hat man

$$AF' = \tfrac{1}{4} l = \tfrac{1}{4} AB, \text{ und } AG' = \tfrac{3}{4} l = \tfrac{3}{4} AB,$$

so dass die beiden Wendepuncte F und G, von der Mitte aus, symmetrisch gelegen sind.

4. Da nach Gleichung (377) $tang\,\varphi$ positiv oder negativ wird, je nachdem n kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ ist, so folgt, dass die Tangente in C (Fig. 249) mit der horizontalen Richtung AB auf jener Seite convergirt, wo das kleinere von den beiden Curvenstücken BC und AC liegt. Befindet sich die Last Q in der Mitte zwischen A und B so ist $tang\,\varphi = o$, d. h. die Tangente horizontal.

5. Die Biegung in dem Puncte C ist aus der Relation (378)

$$CC' = \delta = \tfrac{1}{3} n^2 (1-n)^2 \frac{Q l^3}{m t}$$

zu berechnen. Dieselbe wird unter übrigens gleichen Umständen mit $n(1-n)$ ein Maximum, was offenbar für $n = \frac{1}{2}$ eintritt. In diesem Falle wirkt die Last Q in der Mitte zwischen den Stützen, und die Biegung ist

$$\delta = \tfrac{1}{192} \frac{Q l^3}{m t},$$

somit viermal kleiner, als in dem Falle III (siehe die §§. 58 und 63), **wenn die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, nämlich der belastete Träger bloss auf den beiden Stützen A und B aufruhet.**

6. Die grösste Biegung $HH' = \delta'$ (Fig. 249) ist an jener Stelle H, wo die Tangente horizontal liegt. Zufolge der Bemerkung ad 4 ist diese Stelle stets in dem grösseren der beiden Curvenstücke AC und BC vorhanden. Ist nämlich $n < \frac{1}{2}$, so ergibt sich der Werth für die Abscisse des Punctes H aus der Gleichung (375), wenn man dieselbe verschwinden lässt. Hiernach findet man

$$x = AH' = \frac{l}{(3-2n)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (381),$$

und hiermit die grösste Biegung selbst aus der Gleichung (376)

$$\delta' = \overline{HH'} = \frac{2}{3}\,\frac{n^2(1-n)^2}{(3-2n)^2}\cdot\frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots \quad (382).$$

Ist aber $n > \frac{1}{2}$, so hat man die Gleichungen (372) und (373) anstatt der vorigen (375) und (376) zu benützen. In diesem Falle ist

$$x = \overline{AH'} = \left(\frac{2n}{1+2n}\right) l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (383),$$

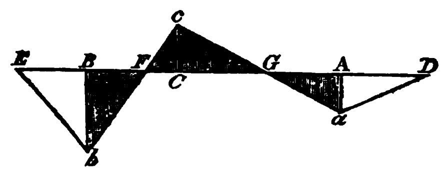
$$\text{und} \quad \delta' = \overline{HH'} = \frac{2}{3}\,\frac{(1-n)^2 n^2}{(1+2n)^2}\cdot\frac{Ql^3}{mt} \quad \ldots \quad (384).$$

Es ist übrigens klar, dass die Werthe (383) und (384) auch aus den vorigen (381) und (382) folgen müssen, wenn man n mit $(1-n)$ und x mit $(l-x)$ verwechselt.

Befindet sich die Last in der Mitte, oder ist $n = \frac{1}{2}$, so werden die Relationen (381) und (383), so wie jene sub (382) und (384) einander gleich, und die grösste Biegung tritt in der Mitte ein. Diese Biegung ist $\frac{1}{192}\,\frac{Ql^3}{mt}$, also übereinstimmend mit dem Resultate ad 5.

7. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die Gleichungen (371) und (374) repräsentirt sind, im Sinne des §. 127 **graphisch** dar, so gelangt man zu der (Figur 250). Aus derselben ist ersichtlich, dass die grössten positiven Kraftmomente durch die Ordinaten Aa und Bb ausgedrückt sind, und daher an den beiden Stellen A und B sich befinden,

Fig. 250.



während der grösste numerische Werth für die negativen Kraftmomente durch die Ordinate Cc ausgedrückt ist, somit an der Stelle C sich befindet, wo die Last Q ihren Angriffspunct hat.

Die Werthe für diese besonderen Kraftmomente resultiren und zwar bezüglich der Stelle B für $x = o$ aus der Gleichung (371) mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = n(1-n)^2 Q l,$$

bezüglich der Stelle A für $x = l$ aus der Gleichung (374) mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = n^2 (1-n) \, Q l$$

und bezüglich der Stelle C für $x = n l$ aus den beiden Gleichungen (371) und (374) übereinstimmend mit

$$mt \frac{d^2 y}{d x^2} = - \, 2 n^2 (1-n)^2 Q l.$$

Nennt man, wie im §. 121, den grössten numerischen Werth von den positiven Kraftmomenten $R_1 z_1$, von den negativen Kraftmomenten aber $R_2 z_2$, so hat man offenbar

$$\left. \begin{aligned} R_1 z_1 &= \begin{cases} \text{entw.}\; n(1-n)^2 Q l \\ \text{oder}\; n^2 (1-n) \, Q l \end{cases} \\ \text{und}\; R_2 z_2 &= 2 n^2 (1-n)^2 Q l \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (385).$$

Von den beiden Alternativwerthen für $R_1 z_1$ gilt stets der grössere, so zwar, dass man hat

$$\text{für } n < \tfrac{1}{2} \quad . \; . \; . \quad R_1 z_1 = n(1-n)^2 Q l$$
$$\text{und für } n > \tfrac{1}{2} \quad . \; . \; . \quad R_1 z_1 = n^2 (1-n) \, Q l.$$

Befindet sich die Last in der Mitte zwischen A und B, so werden die beiden Alternativwerthe von $R_1 z_1$ einander gleich und eben so gross, wie $R_2 z_2$. Es wird sodann wegen $n = \frac{1}{2}$

$$R_1 z_1 = R_2 z_2 = \tfrac{1}{8} Q l,$$

und man hat mit Rücksicht auf die Figur 250 die Relationen:

$$\overline{BC} = \overline{CA} = \tfrac{1}{2} \overline{AB}$$
$$\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{CG} = \overline{GA} = \tfrac{1}{4} \overline{AB}$$
$$\overline{Bb} = \overline{Cc} = \overline{Aa} = \tfrac{1}{8} Q l \text{ und}$$
$$\triangle BbF \cong FCc \cong CcG \cong GAa,$$

woraus, weil die Ordinaten in jener Figur 250 mit den reciproken Werthen der betreffenden Krümmungshalbmesser der Biegungscurve im Verhältnisse stehen, folgt, dass von der Biegungscurve zwischen A und B die vier Theile $\frown{BF}$, $\frown{FC}$, $\frown{CG}$ und $\frown{GA}$ eine congruente Gestalt haben.

Tragvermögen.

§. 191.

Allgemeine Formel. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt an einer der 3 Stellen A, B und C, oder auch an zweien, oder endlich an allen drei Stellen zugleich. Bezeichnet man im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes bezüglich der Anspruchsnahme in A oder B mit M_1 und bezüglich der Anspruchsnahme in C mit M_2, und nennt man das Tragvermögen $Max.\,Q$, so hat man dem citirten §. zufolge für $n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = n\,(1-n)^2 l \,.\, Max.\,Q.$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = 2n^2 (1-n)^2 l \,.\, Max.\,Q,$$

und für $n \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}$

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = n^2 (1-n)\, l \,.\, Max.\,Q$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = 2n^2 (1-n)^2 l \,.\, Max.\,Q,$$

also das Tragvermögen für $n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$

$$Max.\,Q = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n(1-n)^2 l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} \end{cases}$$

und für $n \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}$ . . . . . (386),

$$Max.\,Q = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n^2(1-n)\, l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} \end{cases}$$

wobei von den in Betracht kommenden Alternativ-Werthen der kleinere zu nehmen ist.

§. 192.

Besondere Eigenschaften.

1. Da für $n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$

$$Max.\,Q = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n(1-n)^2 l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} \end{cases}$$

gefunden wurde, so wird es zuweilen geschehen, dass der erste Werth der kleinere ist, und daher

$$Max.\, Q = \frac{M_1}{n(1-n)^2 l}$$

wird. Lässt man nun n variiren, die übrigen Grössen aber unverändert, so kann man fragen, für welchen Werth von n das Tragvermögen am kleinsten wird. Zur Beantwortung dieser Frage hat man $n(1-n)^2$ auf ein Maximum zu bringen. Diess geschieht dadurch, dass man

$$\frac{d[n(1-n)^2]}{dn} = (1-n)\,(1-3n) = o$$

setzt. Hieraus folgt aber (weil der Werth von $n=1$ wegen der Bedingung $n \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ nicht zulässig ist) $n = \frac{1}{3}$, indem in diesem Falle

$$\frac{d^2[n(1-n)^2]}{dn^2} = -2,$$

somit negativ wird.

Unter diesen Umständen ist das Tragvermögen

$$Max.\, Q = \frac{27}{4}\,\frac{M_1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (387).$$

Dabei muss man sich jedoch überzeugen, ob in der That der Werth für die 2. Alternative von $Max.\, Q$, welcher für $n = \frac{1}{3}$ in

$$\frac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} = \frac{81}{8}\,\frac{M_2}{l}$$

übergeht, nicht kleiner ist, als der nach (387) resultirende. Es muss nämlich

$$\frac{27}{4}\,\frac{M_1}{l} \overline{\lessgtr} \frac{81}{8}\,\frac{M_2}{l}, \text{ d. i. } 2M_1 \overline{\lessgtr} 3M_2$$

sein, welche Bedingung z. B. für $M_1 = M_2$ eintritt.

2. Für $n \overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ hat man das Tragvermögen

$$Max.\, Q = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{M_1}{n^2(1-n)\,l} \\ \text{oder } \dfrac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l}. \end{cases}$$

Ist der erste Werth $\frac{M_1}{n^2(1-n)\,l}$ der kleinere, so wird unter übrigens gleichen Umständen das Tragvermögen am kleinsten, wenn $n^2(1-n)$ ein Maximum wird. Diess geschieht aber für $n = \frac{2}{3}$, und das Tragvermögen resultirt in diesem Falle mit

$$Max. Q = \tfrac{27}{4} \frac{M_1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (388),$$

somit eben so gross, wie das mit der Gleichung (387) gegebene. Nur muss der Voraussetzung gemäss sein

$$\frac{M_1}{n^2(1-n)l} = \tfrac{27}{4} \frac{M_1}{l} \overline{\gtrless} \frac{M_2}{2n^2(1-n)^2 l} = \tfrac{81}{8} \frac{M_2}{l},$$

also, wie zuvor

$$2 M_1 \overline{\gtrless} 3 M_2.$$

3. Ist die Last Q in der Mitte zwischen A und B, so ist $n = \frac{1}{2}$, und es wird das Tragvermögen

$$Max. Q = \begin{Bmatrix} \text{entw.} & \dfrac{8 M_1}{l} \\ \text{oder} & \dfrac{8 M_2}{l} \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (389).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) ist insbesondere

$$Max. Q = \frac{8 M}{l},$$

also das Tragvermögen doppelt so gross, wie in dem Falle III, wo der Träger bloss auf beiden Stützen A und B aufruhet, ohne zugleich von den Kräften P_1 und P_2 beansprucht zu werden. (Siehe die §§. 58 und 86.)

Uebrigens ist, wie man bemerkt $\frac{8 M_2}{l}$ zugleich das Minimum von $\frac{M_2}{2 n^2 (1-n)^2 l}$ in Bezug auf n.

4. Ist $M_1 = M_2 = M$, so ist unter übrigens gleichen Umständen für $n = \frac{1}{3}$ oder $n = \frac{2}{3}$ das geringste Tragvermögen vorhanden.

Es ist merkwürdig, dass diese beiden Fälle ($n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$) sich ungünstiger darstellen, als wenn $n = \frac{1}{2}$, oder die Last Q in der Mitte zwischen A und B angebracht wäre. Diese Bemerkung stimmt mit jener im §. 190 ad 2 überein.

5. Die grösste zulässige Biegung in C wird aus der Gleichung (378) bestimmt, wenn man statt Q das Tragvermögen $Max. Q$ substituirt. Man erhält nämlich

$$Max. \delta = \tfrac{1}{3} n^3 (1-n)^3 l^3 \,.\, \frac{Max. Q}{mt},$$

folglich mit Benützung der Relationen (386)

$$\left.\begin{array}{l}\text{für } n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} \\ \quad Max.\,\delta = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \frac{1}{3} n^2 (1-n) \dfrac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} n\ (1-n) \dfrac{M_2 l^2}{mt}\end{array}\right. \\ \text{und für } n \overline{\overline{>}} \frac{1}{2} \\ \quad Max.\,\delta = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \frac{1}{3} n (1-n)^2 \dfrac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} n (1-n) \dfrac{M_2 l^2}{mt}\end{array}\right.\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (390),$$

wo man von den in Betracht kommenden Alternativ-Werthen den kleineren zu wählen hat.

Für $n = \frac{1}{2}$ hat man insbesondere die grösste zulässige Biegung

$$Max.\,\delta = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \frac{1}{24} \dfrac{M_1 l^2}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{24} \dfrac{M_2 l^2}{mt}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (391)$$

also halb so gross, wie in dem Falle III (§. 92, Gleichung 119), wenn die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, und der Träger bloss auf den beiden Stützen A und B aufruht.

Mechanisches Widerstandsmoment.

§. 193.

Berechnung desselben. Das mechanische Widerstandsmoment W, welches der Träger bis zur Erreichung der Elasticitätsgränzen leisten kann, ist nach Anleitung des §. 107 aus der Formel

$$W = \frac{1}{2} (Max.\,Q)\ (Max.\,\delta)$$

zu berechnen. Setzt man daher für $Max.\,Q$ und $Max.\,\delta$ die entsprechenden Werthe aus den Relationen (386) und (390), so erhält man für $n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} W = \left\{\begin{array}{l}\text{entw. } \frac{1}{6} \left(\dfrac{n}{1-n}\right) \dfrac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \dfrac{1}{24 n} \left(\dfrac{1}{1-n}\right) \dfrac{M_2^2 l}{mt}\end{array}\right. \\ \text{und für } n \overline{\overline{>}} \frac{1}{2}\,. \\ W = \left\{\begin{array}{l}\text{entw } \frac{1}{6} \left(\dfrac{1-n}{n}\right) \dfrac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \dfrac{1}{24 n} \left(\dfrac{1}{1-n}\right) \dfrac{M_2^2 l}{mt}\end{array}\right.\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (392),$$

wobei wieder von den Alternativ-Werthen der kleinere zu gelten hat. Das mechanische Widerstandsmoment ist somit von n, oder von der Lage des Angriffspunctes der Last Q abhängig.

Für den besonderen Fall $n = \frac{1}{2}$ befindet sich die Last in der Mitte zwischen A und B, und es wird das mechanische Widerstandsmoment

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{M_1^2 l}{mt} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{M_2^2 l}{mt} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (393),$$

also eben so gross, wie in den Fällen, wo der Trägertheil AB auf die Arten in Anspruch genommen wird, worauf mittelst der Figuren 53, 59, 238 und 241 aufmerksam gemacht wurde. Die Vergleichung der Formeln (147), (148), (320) und (393) unter einander und mit jener im §. 182 zeigt die Wahrheit dieser Behauptung. Bei der Vergleichung der betreffenden Fälle ist jedoch darauf Acht zu geben, dass die Querschnittslage stets entprechend, nämlich so gewählt wird, dass das in Betracht kommende Tragmoment des gefährlichen Querschnittes überall dasselbe bleibt.

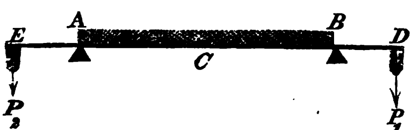
Fünftes Kapitel.

Widerstand eines auf zwei Stützen A und B ruhenden Trägers DE, welcher zwischen den Stützen mit der gleichförmig vertheilten Belastung Q und an beiden Enden D und E mit solchen Kräften in Anspruch genommen wird, dass die Tangenten an die Biegungscurve in A und B horizontal werden (Fig. 251).

§. 194.

Annahmen. Diesen Fall kann man sich dadurch versinnlichen, dass man die Stützen in A und B weggenommen, und an deren Statt Kräfte angebracht denkt, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken

Fig. 251.



auf jene Stützen sind. Bezeichnet man diese Drücke mit D_1 und D_2, so gelangt man auf die Betrachtung des freien Hebelsystems (Fig. 252),

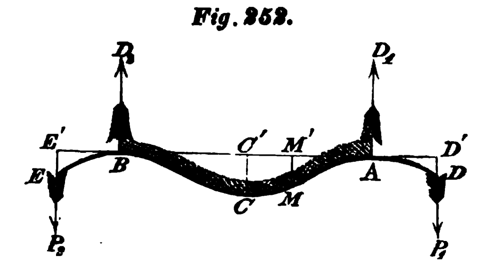


Fig. 252.

wo die verticalen Kräfte D_1, D_2, P_1, P_2 und Q wirken. Es ist vorauszusehen, dass, um die Tangenten in A und B horizontal zu erhalten, die statischen Kraftmomente $P_1 . \overline{AD'}$ und $P_2 . \overline{BE'}$ eine entsprechende Grösse haben müssen, und dass es, um das Verhalten des Trägers innerhalb seiner Stützen zu erfahren, erlaubt sein wird, die beiden Theile AD und BE gleich lang anzunehmen. In Anbetracht der Symmetrie der Anordnung, welche sodann bei dem Hebelsysteme eintritt, folgt, dass auch $P_1 = P_2$, und die Biegungscurve, von der Mitte C aus gegen die beiden Seiten hin symmetrisch gebildet sein muss.

Behufs der weiteren Untersuchung sei

die Länge $\overline{AB} = 2\,\overline{BC'} = 2\,\overline{AC'}$ . . . . $= l$,

„ „ $\overline{AD'} = \overline{BE'}$ . . . . $= p\,l$,

die Biegung in der Mitte $\overline{CC'}$ . . . . $= \delta$;

ferner für irgend einen Punct M der Biegungscurve

die Abscisse $\overline{AM'}$ . . . . $= x$,

die Ordinate $\overline{MM'}$ . . . . $= y$.

Auch behalte man die Bezeichnungen m und t im Sinne des §. 53 bei.

Es leuchtet ein, dass in dem angenommenen Falle, wo die Tangenten in A und B horizontal sein sollen, die Kräfte P_1 und P_2 nicht beliebig sein können, sondern gewisse Werthe haben müssen. Diese sind jedoch vorläufig noch unbekannt und werden sich erst im Laufe der Untersuchung ergeben. Auch die Drücke D_1 und D_2 sind vor der Hand unbekannt, daher noch zu bestimmen. Uebrigens ist klar, dass wegen der Symmetrie und dem Gleichgewichte des in Betracht stehenden Hebelsystemes nicht nur $D_1 = D_2$, sondern auch die Bedingung

$$2\,D_1 = 2\,P_1 + Q \quad \dots\dots\dots\dots \quad (394)$$

stattfindet, wenn von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt wird.

Biegung.

§. 195.

Allgemeine Ableitung. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen und Bemerkungen des vorigen §. hat man zunächst in Gemässheit der Gleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{Q}{l}x^2 - D_1 x + P_1(pl+x),$$

somit, da nach der Relation (394) $(D_1 - P_1) = \frac{Q}{2}$ ist,

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = P_1 pl - \frac{1}{2}Qx + \frac{Q}{2l}x^2 \quad \ldots \ldots \quad (395),$$

und durch Integration

$$mt\frac{dy}{dx} = P_1 plx - \frac{1}{4}Qx^2 + \frac{1}{6}\frac{Q}{l}x^3 \quad \ldots \ldots \quad (396),$$

endlich

$$mt\,y = \frac{1}{2}P_1 plx^2 - \frac{1}{12}Qx^3 + \frac{1}{24}\frac{Q}{l}x^4 \quad \ldots \ldots \quad (397),$$

wenn man beachtet, dass für den Punct A die Grössen x, $\frac{dy}{dx}$ und y verschwinden müssen. Indem nun der Voraussetzung gemäss auch für den Punct B die Tangente horizontal sein und seine Ordinate verschwinden muss, daher $x = l$, $\frac{dy}{dx} = o$ und $y = o$ gleichzeitige Werthe sind, so erhält man noch

$$P_1 pl^2 - \frac{1}{4}Ql^2 + \frac{1}{6}Ql^2 = o$$

$$\text{und } \frac{1}{2}P_1 pl^3 - \frac{1}{12}Ql^3 + \frac{1}{24}Ql^3 = o,$$

woraus übereinstimmend der Druck auf jede der beiden Stützen

$$P_1 = \frac{1}{12}\frac{Q}{p} \quad \ldots \ldots \quad (398)$$

olgt. Mit Hilfe dieses We rthes gehen die vorigen Gleichungen (395), (396) und (397) in folgende bestimmte über:

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12}\frac{Q}{l}\left[l^2 - 6x(l-x)\right] \quad \ldots \ldots \quad (399),$$

$$mt\frac{dy}{dx} = \frac{1}{12}\frac{Q}{l}x(l-x)(l-2x) \quad \ldots \ldots \quad (400)$$

und

$$mt\,y = \frac{1}{24}\frac{Q}{l}x^2(l-x)^2 \quad \ldots \ldots \quad (401).$$

Die Biegung in der Mitte C ergibt sich aus der letzten Gleichung für $x = \frac{1}{2} l$ mit

$$\overline{CC'} = \delta = \frac{1}{384} \frac{Q l^3}{m t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (402).$$

§. 196.

Besondere Eigenschaften.

1. Sämmtliche Gleichungen, welche das Verhalten des Trägers zwischen den Stützen A und B beleuchten, sind von p unabhängig. Es hat daher in Uebereinstimmung mit der im §. 194 gemachten Bemerkung die Länge der Stücke AD und BF auf dieses Verhalten keinen Einfluss, wenn nur die Kräfte P_1 und P_2 so gewählt sind, dass die Tangenten in A und B horizontal werden.

2. Um diese verlangte Bedingung zu erreichen, muss jede der an den Enden des Trägers D und E anzubringenden Kräfte P_1 und P_2 den sub (398) angegebenen Werth haben. Dieser Werth variirt zwar mit p, und ist somit von der Länge der Stücke $\overline{AD'}$ und $\overline{BE'}$ abhängig; doch erscheint, wie vorauszusehen war, das Product aus jenen Kräften und den Längen der erwähnten Stücke von p unabhängig; denn man hat:

$$P_1 \cdot \overline{AD'} = P_2 \cdot \overline{BE'} = \frac{1}{12} Q l.$$

Diese Producte sind offenbar die statischen Kraftmomente in Bezug auf die Stellen A und B, und es folgt hieraus, dass die Stücke $\overline{AD'}$ und $\overline{BE'}$ länger oder kürzer sein können, wenn nur die Kräfte P_1 und P_2 in einem solchen Verhältnisse kleiner oder grösser werden, dass die betreffenden statischen Kraftmomente sich nicht verändern. Hiernach wird die obige Bedingung, die Tangenten in A und B horizontal zu erhalten, desto schwieriger zu erfüllen sein, je weniger der Träger über die Stützen hinausragt.

3. Da die für $m t \frac{dy}{dx}$ gegebene Gleichung (400) für die drei Werthe $x = o$, $x = \frac{1}{2} l$ und $x = l$ verschwindet, so geht die Tangente an die Biegungscurve nicht nur in A und B, sondern auch in der Mitte C horizontal, was mit der Symmetrie der Biegungscurve übereinstimmt.

4. Da die für $m t \frac{d^2 y}{dx^2}$ gegebene Gleichung (399) mit dem Ausdrucke

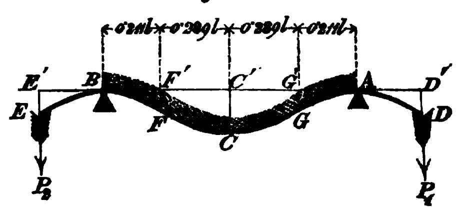
$$l^2 - 6x(l-x) = (6x^2 - 6xl + l^2)$$

verschwindet, und diess für die zwei Werthe

$$x = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)l \text{ und } x = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)l$$

geschieht, so hat die Biegungscurve zwei symmetrisch liegende Wende-

Fig. 253.



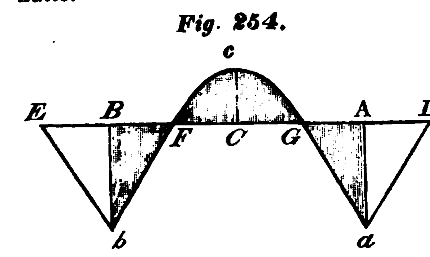
puncte F und G (Fig. 253). Zur näheren Bestimmung ihrer Lage hat man die Relationen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AG'} = \overline{BF'} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)l = 0{\cdot}2113\,l \\ \overline{AF'} = \overline{BG'} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)l = 0{\cdot}7887\,l \\ \overline{C'G'} = \overline{C'F'} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,l = 0{\cdot}2887\,l \\ \text{somit} \\ \overline{BF'} : \overline{F'C'} = (3-\sqrt{3}) : \sqrt{3} = (\sqrt{3}-1) : 1 = 0{\cdot}7321 : 1. \end{array}\right\} (403).$$

Die Wendepuncte F und G und der Mittelpunct C theilen also die Curve ACB nicht, wie bei dem im vorigen Kapitel behandelten Falle, in vier gleiche Theile, sondern die den Stützen A und B anliegenden Theile sind etwas kleiner, als die an der Mitte liegenden Segmente.

5. Die Biegung in der Mitte $\overline{CC'} = \delta = \frac{1}{384}\,\frac{Ql^3}{mt}$ ist mit Rücksicht auf den §. 190 ad 5 nur die Hälfte von derjenigen, welche vorhanden wäre, wenn man die Last Q in der Mitte concentrirt hätte.

Fig. 254.



6. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die Gleichung (399) ausgedrückt sind, im Sinne des §. 128 graphisch dar, so erhält man die Fig. 254. Die Begränzungscurve acb ist eine Parabel,

welche durch die Wendepuncte F und G der Längenaxe geht, und deren Scheitel in der durch den Mittelpunct C gezogenen Verticalen liegt. Aus dieser Figur ist ersichtlich, dass der grösste numerische Werth der positiven Kraftmomente durch die Ordinaten $\overline{Aa}$ und $\overline{Bb}$, jener der negativen Kraftmomente aber durch die Ordinate $\overline{Cc}$ dargestellt wird. Diese Maximalwerthe resultiren aus der Gleichung (399), und zwar bezüglich der Stellen A und B für $x = o$ und $x = l$ mit

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = \tfrac{1}{12} Q l,$$

bezüglich der Stelle C aber für $x = \frac{1}{2} l$ mit

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = - \tfrac{1}{24} Q l.$$

Heisst man jetzt übereinstimmend mit den Bezeichnungen im §. 124 den grössten numerischen Werth der positiven Kraftmomente $R_1 z_1$, jenen der negativen Kraftmomente aber $R_2 z_2$, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} R_1 z_1 &= \tfrac{1}{12} Q l \\ \text{und } R_2 z_2 &= \tfrac{1}{24} Q l \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (404).$$

Nennt man noch den kleinsten der nach abwärts gerichteten Krümmungshalbmesser ϱ_1, jenen der nach aufwärts gerichteten hingegen ϱ_2, so ist, da bekanntlich für jeden Krümmungshalbmesser ϱ allgemein $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden kann,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} &= \tfrac{1}{12} \frac{Q l}{m t} \\ \text{und } \frac{1}{\varrho_2} &= - \tfrac{1}{24} \frac{Q l}{m t} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (405),$$

wesshalb der Krümmungshalbmesser in der Mitte der Biegungscurve doppelt so gross ist, wie jener an den beiden Auflagepuncten A und B.

Tragvermögen.

§. 197.

Allgemeine Formel. Mit Rücksicht auf den vorigen §. ist der gefährliche Querschnitt entweder in A und B, oder in C, oder in A, B und C zugleich vorhanden. Bezeichnet man daher im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes für die Art

der Anspruchsnahme in A und B mit M_1, jenes für die Art der Anspruchsnahme in C aber mit M_2, und nennt man das Tragvermögen, d. i. die grösste zulässige Belastung $Max.\ Q$, so hat man den erwähnten §§. zufolge,

$$\text{entweder } M_1 = R_1 z_1 = \tfrac{1}{12} Q l$$
$$\text{oder } M_2 = R_2 z_2 = \tfrac{1}{24} Q l,$$

also das Tragvermögen selbst

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{12 M_1}{l} \\ \text{oder } \dfrac{24 M_2}{l} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (406),$$

je nachdem die erste oder zweite Alternative einen kleineren Werth gibt.

§. 198.

Besondere Eigenschaften.

1. Ist $M_1 = M_2 = M$ (siehe §. 125 ad 1 und 2), so gibt offenbar die erste Alternative einen kleineren Werth, der gefährliche Querschnitt befindet sich an den beiden Stellen A und B, und das Tragvermögen wird

$$Max.\ Q = \frac{12 M}{l},$$

also $1\frac{1}{2}$mal so gross, wie in dem Falle (IV ad 87), wo die Kräfte P_1 und P_2 nicht vorhanden sind, und der Träger bloss auf den beiden Stützen in A und B aufruhet.

2. Die grösste zulässige Biegung $Max.\ \delta$, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen Platz greifen kann, ist mit Rücksicht auf die Formeln (402) und (406)

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{384} l^3 . \frac{Max.\ Q}{m t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \tfrac{1}{32} \dfrac{M_1 l^2}{m t} \\ \text{oder } \tfrac{1}{16} \dfrac{M_2 l^2}{m t} \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (407).$$

So hat man z. B. für $M_1 = M_2 = M$ nach der ersten Alternative

$$Max.\ \delta = \tfrac{1}{32} \frac{M l^2}{m t}.$$

Tritt aber das Verhältniss $M_1 : M_2 = 2 : 1$ ein, so werden die beiden Alternativwerthe in der Formel (407) gleich gross.

Sechstes Kapitel.

Widerstand eines an beiden Enden eingemauerten Trägers.

§. 199.

Vorerinnerung. Wenn (Fig. 255 und 256) ein horizontal liegender Träger an beiden Enden eingemauert, und dabei beabsichtigt wird, diese Enden in ihrer horizontalen Lage auch dann zu erhalten, wenn der Träger belastet wird, so handelt es sich um die Erfüllung der Bedingung, dass die Tangenten der Biegungscurve in *A* und *B* horizontal werden. Doch kann hiebei, vom practischen Standpuncte aus betrachtet, noch nicht ein absolutes Festhalten der Trägerenden angenommen werden, indem die Puncte *A* und *B*, welche vor der Biegung in den beiden Wandflächen liegen, nach Eintritt derselben etwas gegen die Mitte *C* rücken. Werden durch die Biegung die Gränzen der Elasticität nicht überschritten, so wird zwar das Verrücken jener Puncte nur unwesentlich sein; man darf sich aber nicht darüber täuschen, dass es demungeachtet stattfindet, und selbst dann nicht als beseitigt anzusehen ist, wenn man die Reibung zwischen dem Mauerwerke und den Trägerenden bedeutend vermehren, oder wohl gar diese letzteren (wie in der Fig. 258) keilförmig, anstatt (wie in der Fig. 257) prismatisch machen wollte. Denn, wenn auch in diesen Fällen die Oberfläche der eingemauerten Enden in Folge der erwähnten Reibung oder der Keilform mit vermehrter Sicherheit fixirt werden könnte, so käme doch noch immer die Ausdehnung der Fasern von den Trägerenden in Betracht, welche desshalb nicht vermieden wäre, abgesehen davon, dass der nöthige Widerstand von Seite des Mauerwerkes, das die Trägerenden umhüllt, in dem letzteren Falle desto schwieriger erreicht würde, je greller man die Keilform der Enden gemacht hätte.

Fig. 255.

Fig. 256.

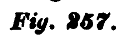


Fig. 257.

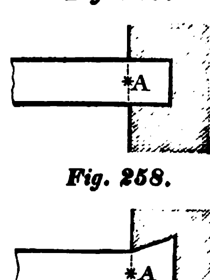


Fig. 258.

Kann man für die Praxis hinreichend genau annehmen, dass die Tangenten der Biegungscurve in A und B, (Fig. 255 und 256) horizontal gehen, so wird es gewöhnlich erlaubt sein, den Zustand des Trägers jenem gleich zu halten, welcher in den beiden vorhergehenden Kapiteln umständlich erörtert worden ist. Man beachte nämlich, dass auch in jenen Fällen (Fig. 247 und 251) die dortigen Puncte A und B der Längenaxe in Folge der Biegung etwas, obwohl nur unwesentlich einander näher gerückt werden.

§. 200.

Besondere Resultate. Mit Rücksicht auf den vorigen §. hat man in dem Falle, wenn (Fig. 255) der Träger von der freien Länge $AB = l$ in der Mitte C beansprucht wird, und mt die Bedeutung, wie im §. 53, beibehält, folgende Resultate:

1. Die Biegung in der Mitte C wird bei der Belastung Q, welche die Elasticitätsgränzen nicht überschreitet, nach der Gleichung (378) für $n = \frac{1}{2}$

$$\delta = \frac{1}{192} \frac{Q l^3}{m t} \quad \ldots \ldots \quad (408)$$

somit viermal geringer, als wenn unter sonst gleichen Umständen der Träger in A und B bloss aufliegen würde. (Siehe die Formel 72.)

2. Das Tragvermögen $Max.\ Q$ wird nach der Gleichung (389)

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{8 M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{8 M_2}{l} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (409),$$

von welchen Alternativwerthen der kleinere zu wählen ist. Der gefährliche Querschnitt liegt in A und B zugleich, wenn die erste, hingegen in C, wenn die zweite Alternative das Tragvermögen bezeichnet, endlich in A, B und C zugleich, wenn beide Alternativwerthe gleiche Resultate geben. Diess letztere geschieht für $M_1 = M_2 = M$, und es ist sodann das Tragvermögen

$$Max.\ Q = \frac{8 M}{l},$$

somit doppelt so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in A und B bloss aufliegt (§. 86) *).

3. Die grösste Biegung $Max.\ \delta$, die ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen Platz greifen kann, ist nach der Gleichung (391)

$$Max.\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{24} \frac{M_1 l^2}{m t} \\ \text{oder } \frac{1}{24} \frac{M_2 l^2}{m t} \end{array} \right\} \quad . \ . \ . \ . \ (410),$$

wobei wieder der kleinere Werth massgebend ist. Für $M_1 = M_2 = M$ wird diese Biegung

$$Max.\ \delta = \frac{1}{24} \frac{M l^2}{m t},$$

somit nur halb so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in A und B bloss aufliegt. (Siehe die Gleichung 119.)

4. Das mechanische Widerstandsmoment W bis zur Erreichung der Elasticitätsgränze ist nach der Formel (393) der kleinere von den beiden Werthen

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{6} \frac{M_1^2 l}{m t} \\ \text{oder } \frac{1}{6} \frac{M_2^2 l}{m t} \end{array} \right\} \quad . \ . \ . \ . \ (411).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ wird

$$W = \frac{1}{6} \frac{M^2 l}{m t},$$

somit eben so gross, wie in dem Falle, wo der Träger in A und B bloss aufliegt. (Siehe die Formel 148.)

Wenn (Fig. 256) der an beiden Enden eingemauerte Träger nach seiner Länge $AB = l$ gleichförmig belastet wird, so ist mit Rücksicht auf den vorigen §. Folgendes zu bemerken:

1. Die Biegung in der Mitte C wird bei der Belastung Q, welche die Elasticitätsgränzen nicht überschreitet, nach der Gleichung (402)

$$\delta = \frac{1}{384} \frac{Q l^3}{m t} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (412),$$

somit nur halb so gross, wie in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt ist. (Siehe die Formel 408.)

*) Dieses Resultat wird allgemein angenommen, obwohl man dasselbe auch auf andere nicht streng einleuchtende Arten abzuleiten pflegt.

2. Das Tragvermögen $Max. Q$ wird nach der Gleichung (406)

$$Max.\ Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{12 M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{24 M_2}{l} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots : \quad (413).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ ist insbesondere dasselbe

$$Max.\ Q = \frac{12 M}{l},$$

somit $1\frac{1}{2}$mal so gross, wie in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt wird. (Siehe die Formel 409) *).

3. Die grösste Biegung $Max.\ \delta$, welche ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgränzen stattfinden kann, ist nach der Gleichung (407)

$$Max.\ \delta = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1}{32} \frac{M_1 l^2}{m t} \\ \text{oder } \frac{1}{16} \frac{M_2 l^2}{m t} \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (414).$$

Für $M_1 = M_2 = M$ wird insbesondere

$$Max.\ \delta = \frac{1}{32} \frac{M l^2}{m t},$$

*) Anmerkung. Auf dieses Resultat hat der Verfasser zuerst in der Förster'schen Bauzeitung (IV. und V. Heft *ex anno* 1853) aufmerksam gemacht. Dasselbe weicht von dem sonst üblichen insoferne ab, als man dem Träger mit der gleichförmig vertheilten Belastung das doppelte (anstatt wie oben das $1\frac{1}{2}$fache) Tragvermögen von jenem zuzuschreiben pflegt, welches bei der Concentrirung der Belastung in der halben Trägerlänge vorhanden ist. Bei der nicht ganz wissenschaftlichen Begründung dieses älteren Resultates darf die Unverlässlichkeit desselben um so weniger befremden, als man aus Versuchen gefunden hat, dass die nach der obigen Formel (412) berechnete Biegung δ mit der Erfahrung übereinstimmt, woraus auf die Richtigkeit der hier gegebenen Theorie zurück geschlossen werden kann. Nach dem englischen Schriftsteller Moseley wäre das Verhältniss der Tragfähigkeiten in den verglichenen Fällen sogar 3 : 1, welcher Irrthum dadurch herbeigeführt worden ist, dass er die schwächste Stelle (den gefährlichen Querschnitt) in der Mitte C (Fig. 256) annimmt, was für $M_1 = M_2$ nicht stattfinden kann, indem sodann der gefährliche Querschnitt bei jedem eingemauerten Ende liegt. Die Bedingung $M_1 = M_2$ ist darum zu Grunde zu legen, weil sie der Navier'schen Theorie, welcher sich Moseley anschliesst, entspricht. (Siehe die §§. 79 ad 5 und 125 ad 1.)

als der kleinere Werth, zu gelten haben. Diese Biegung beträgt nur $\frac{3}{4}$ von jener in dem Falle, wo die Belastung in der Mitte concentrirt wird. (Siehe die Gleichung 410.)

§. 201.

Combinirung der vorstehenden Fälle. Wenn ein an beiden Enden eingemauerter Träger sowohl in der Mitte von einer Last (Q_1), als auch mit einer nach der ganzen Länge gleichförmig vertheilten Belastung (Q_2) in Anspruch genommen wird, so sind offenbar die im vorstehenden §. 200 erörterten zwei Fälle zu combiniren. Hiernach findet man folgende Resultate:

1. Die in der Mitte entstehende Biegung δ ist aus zwei Theilen zusammengesetzt zu betrachten, welche beziehungsweise von den Belastungen Q_1 und Q_2 herrühren, daher unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen aus folgender Relation zu bestimmen:

$$\delta = \frac{1}{192}\frac{Q_1 l^3}{mt} + \frac{1}{384}\frac{Q_2 l^3}{mt} = \frac{1}{192}\left(Q_1 + \frac{1}{2} Q_2\right)\frac{l^3}{mt} \quad . \quad (415).$$

Hieraus sieht man, dass die gleichförmig vertheilte Belastung in Beziehung auf die Biegung in der Mitte dieselbe Wirkung äussert, wie wenn die Hälfte jener Belastung mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wäre.

2. Befindet sich der gefährliche Querschnitt in A und B, so ist das Kraftmoment in Bezug auf diese Stellen

$$\left(\frac{1}{8} Q_1 l + \frac{1}{12} Q_2 l\right)$$

und das Tragvermögen wird erreicht, wenn dieses Kraftmoment einen dem Tragmomente M_1 des Querschnittes gleichen Werth hat. Sodann müssen die grössten zulässigen Werthe von Q_1 und Q_2 der Gleichung

$$M_1 = \frac{1}{8} Q_1 l + \frac{1}{12} Q_2 l = \frac{1}{8}\left(Q_1 + \frac{2}{3} Q_2\right) l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (416)$$

Genüge leisten.

Hieraus sieht man, dass in diesem Falle in Beziehung auf das Tragvermögen die gleichförmig vertheilte Last dieselbe Wirkung äussert, wie wenn zwei Drittel jener Last mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wären.

Befindet sich aber der gefährliche Querschnitt in C, so ist der numerische Werth des Kraftmomentes daselbst

$$\left(\frac{1}{8} Ql + \frac{1}{24} Q_2 l\right),$$

und das Tragvermögen wird erreicht, wenn das betreffende Tragmoment M_2 des Querschnittes jenem Kraftmomente gleich ist. In diesem Falle hat man

$$M_2 = \tfrac{1}{8} Q_1 l + \tfrac{1}{24} Q_2 l = \tfrac{1}{8} (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2) l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (417),$$

so dass jetzt die gleichförmig vertheilte Belastung eine andere Wirkung als zuvor, nämlich eine solche äussert, wie, wenn der dritte Theil dieser Belastung mit dem Gewichte Q_1 vereinigt wäre.

Liegt endlich der gefährliche Querschnitt in A, B und C zugleich, so ist es gleichgiltig, von welcher der beiden Formeln (416) und (417) man Gebrauch macht.

Die Entscheidung, wo der gefährliche Querschnitt eigentlich liegt, ist übrigens nach der im §. 124 angegebenen Regel leicht zu fällen. Zu diesem Behufe hat man nur das Verhältniss $M_1 : M_2$ zu vergleichen mit jenem zwischen den angegebenen Kraftmomenten $\tfrac{1}{8} (Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) l : \tfrac{1}{8} (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2) l$, oder abgekürzt mit

$$(Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2),$$

und sofort im Sinne der Gleichungen (223), (224) und (225) zu untersuchen, welche von folgenden 3 Relationen stattfindet:

$$1.\ M_1 : M_2 < (Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2)$$
$$2.\ M_1 : M_2 > (Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2)$$
$$3.\ M_1 : M_2 = (Q_1 + \tfrac{2}{3} Q_2) : (Q_1 + \tfrac{1}{3} Q_2).$$

Wäre z. B. $M_1 = M_2$ (§. 125 ad 1 und 2), so hätte man offenbar das erste Verhältniss, und diesem correspondirend die Gleichung (416) zur Beurtheilung des Tragvermögens zu benützen.

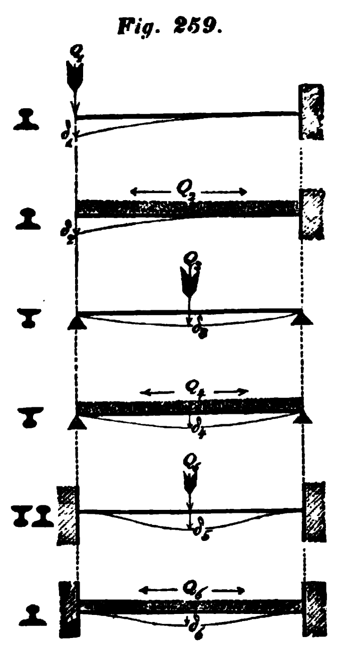
§. 202.

Berücksichtigung des eigenen Trägergewichtes. Das eigene Gewicht des prismatischen Trägers kann als eine nach seiner Länge gleichförmig vertheilte Belastung angesehen werden, wenn, wie vorausgesezt ist, seine Längenaxe horizontal liegt. Ist daher der Träger an beiden Enden eingemauert, und wird er auf eine der Arten in Anspruch genommen, welche in den vorstehenden §§. 200 und 201 behandelt wurden, so kann man bei der Beurtheilung seiner Biegung und seines Tragvermögens das eigene Gewicht leicht berücksichtigen.

§. 203.

Vergleichung der im §. 58 mit I, II, III und IV bezeichneten Fälle mit den zwei im §. 200 untersuchten. Zur Vergleichung dieser Fälle mit einander diene Fig. 259, wo dieselben nach folgenden Umständen geordnet erscheinen:

Fig. 259.



I. Festhaltung des Trägers an einem Ende und Belastung desselben am andern Ende;

II. Festhaltung des Trägers an einem Ende und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach;

III. Unterstützung beider Enden des Trägers und Belastung desselben in der Mitte;

IV. Unterstützung beider Enden des Trägers und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach;

V. Feste Einmauerung beider Enden des Trägers und Belastung desselben in der Mitte;

VI. Feste Einmauerung beider Enden des Trägers und gleichförmig vertheilte Belastung desselben der ganzen Länge nach.

Die beiden im §. 200 untersuchten Fälle sind somit fortsetzend mit V und VI bezeichnet.

Werden bei der Anspruchsnahme des Trägers die Elasticitätsgränzen nicht überschritten, so kann man Folgendes bemerken:

1. Bezeichnet man die Belastungen des Trägers mit Q, und die hiedurch entstehenden Biegungen mit δ, beide Buchstaben aber noch mit Zeigern, welche mit den obigen numerirten Fällen correspondiren, so hat man nach den bezüglichen Formeln, und zwar

nach jener unter (61) . . . . $\delta_1 = \frac{1}{3}\,\frac{Q_1 l^3}{m t}$,

„ „ „ (68) . . . . $\delta_2 = \frac{1}{8}\,\frac{Q_2 l^3}{m t}$,

„ „ „ (72) . . . . $\delta_3 = \frac{1}{48}\,\frac{Q_3 l^3}{m t}$,

„ „ „ (77) . . . . $\delta_4 = \frac{5}{384}\,\frac{Q_4 l^3}{m t}$,

„ „ „ (408) . . . . $\delta_5 = \frac{1}{192}\,\frac{Q_5 l^3}{m t}$,

„ „ „ (412) . . . . $\delta_6 = \frac{1}{384}\,\frac{Q_6 l^3}{m t}$,

somit vergleichungsweise

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 : \delta_5 : \delta_6 = \frac{Q_1}{3} : \frac{Q_2}{8} : \frac{Q_3}{48} : \frac{5\,Q_4}{384} : \frac{Q_5}{192} : \frac{Q_6}{384}. \quad (418).$$

Sind alle Belastungen einander gleich, nämlich

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6\,,$$

so wird insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \delta_4 : \delta_5 : \delta_6 &= \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{48} : \tfrac{5}{384} : \tfrac{1}{192} : \tfrac{1}{384} \\ &= 128 : 48 : 8 : 5 : 2 : 1 \end{aligned}\right\} \quad (419)$$

wobei unter andern das Verhältniss

$$\delta_1 : \delta_3 : \delta_5 = 1 : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{8^2}$$

bemerkenswerth ist.

2. Der gefährliche Querschnitt liegt im I. und II. Falle stets an den festgehaltenen Enden, und im III. und IV. Falle stets in der Mitte des Trägers. Im V. und VI. Falle kann er nach Umständen entweder an den festgehaltenen Enden, oder in der Mitte, oder an allen diesen drei Stellen zugleich liegen. Das Nähere über die Lage des gefährlichen Querschnittes ist aus der vorausgegangenen speciellen Behandlung der einzelnen Fälle zu entnehmen.

3. Nimmt man den Querschnitt beliebig, z. B. ⊥ förmig und dessen Axe der Symmetrie vertical liegend an, so hat man im Allgemeinen zu unterscheiden, auf welche Weise die Fasern in dem gefährlichen Querschnitte in Anspruch genommen werden. Zu diesem Behufe bezeichne man das Tragmoment des Querschnittes mit M_1, wenn die Fasern an der schmalen Seite ausgedehnt und an der breiten Seite zusammengedrückt werden, hingegen mit M_2, wenn die Anspruchsnahme gerade umgekehrt stattfindet, also die Fasern

an der breiten Seite ausgedehnt und an der schmalen zusammengedrückt werden. Um nun die beabsichtigte Vergleichung obiger sechs Fälle möglichst anschaulich zu machen, wähle man die Querschnittslage in jedem einzelnen dieser Fälle derart, dass bei der Vergleichung des Tragvermögens stets derselbe Werth des Tragmomentes massgebend ist. Diese Bedingung wird z. B. für einen gusseisernen Träger dann erreicht werden, wenn der Querschnitt desselben in den einzelnen Fällen die in der Fig. 259 angezeigten Lagen hätte. Es ist sodann in dem Falle

Nr. I, der gefährliche Querschnitt an dem festgehaltenen Ende vorhanden, und nach Gleichung (106) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_1 = \frac{M_1}{l};$$

Nr. II, der gefährliche Querschnitt gleichfalls an dem festgehaltenen Ende vorhanden, und nach Gleichung (107) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_2 = \frac{2\,M_1}{l};$$

Nr. III, der gefährliche Querschnitt in der Mitte des Trägers, und nach Gleichung (108) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_3 = \frac{4\,M_1}{l};$$

Nr. IV, der gefährliche Querschnitt gleichfalls in der Mitte, und nach Gleichung (109) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_4 = \frac{8\,M_1}{l};$$

Nr. V, der gefährliche Querschnitt entweder an den beiden festgehaltenen Enden, oder in der Mitte des Trägers, je nachdem die Querschnittslage, welche diessfalls beliebig ist, gewählt wird, das Tragvermögen aber jedenfalls im Sinne der Gleichung (389), weil der Voraussetzung gemäss $M_1 < M_2$ ist,

$$Max.\ Q_5 = \frac{8\,M_1}{l};$$

Nr. VI, der gefährliche Querschnitt (wenigstens in der Regel) an den beiden festgehaltenen Enden, und im Sinne der Gleichung (406) das Tragvermögen

$$Max.\ Q_6 = \frac{12\,M_1}{l}.$$

Für einen **Träger aus Schmiedeeisen** hat, falls man mit Rücksicht auf den §. 125 ad 1 $M_1 = M_2$ annehmen kann, die besprochene Lage des Querschnittes in allen sechs Fällen keinen Einfluss, wenn nur die Axe der Symmetrie vertical ist.

Hält man sich diese Bemerkungen gegenwärtig, so findet man folgende Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} Max.\,Q_1 : Max\,Q_2 : Max.\,Q_3 : Max.\,Q_4 : Max.\,Q_5 : Max.\,Q_6 = \\ = \quad 1 \quad : \quad 2 \quad : \quad 4 \quad : \quad 8 \quad : \quad 8 \quad : \quad 12 \end{array}\right\} (420).$$

4. Das Verhältniss der **grössten zulässigen Biegungen** in den betrachteten Fällen ergibt sich unter Zugrundelegung des gefundenen Tragvermögens durch die Combinirung der Gleichungen (418) und (420), wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} Max.\,\delta_1 : Max.\,\delta_2 : Max.\,\delta_3 : Max.\,\delta_4 : Max.\,\delta_5 : Max.\,\delta_6 \\ = \frac{1}{2} Max.\,Q_1 : \frac{1}{3} Max.\,Q_2 : \frac{1}{48} Max.\,Q_3 : \frac{5}{384} Max\,Q_4 : \frac{1}{192} Max.\,Q_5 : \frac{1}{384} Max.\,Q_6 \\ = \quad \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{5}{48} : \frac{1}{24} : \frac{1}{32} \\ = \quad 32 : 24 : 8 : 10 : 4 : 3 \end{array}\right\} (421),$$

wobei unter andern die Relation $Max.\,\delta_4 > Max.\,\delta_3$ bemerkungswerth ist.

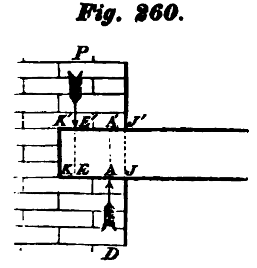
Auch hat

6. das grösste zulässige mechanische Widerstandsmoment in den Fällen I, III und V nach den Formeln (147), (148) und (411) **einen und denselben** Werth.

§. 204.

Widerstand des Mauerwerkes bei eingemauerten Trägerenden. Ist das eine Ende des Trägers, wie in den Fällen I und II, oder sind seine beiden Enden, wie in den Fällen V und VI, eingemauert, so entsteht die Frage, wie gross der Widerstand des Mauerwerkes sein muss, um die Enden des Trägers genügend festzuhalten, so, dass die Tangenten an die Biegungscurve daselbst horizontal werden. Zur Beantwortung dieser Frage stehe Fig. 260 in Betracht, wo das Ende des Trägers JK im Mauerwerke festgehalten wird. Bei der Anspruchsnahme des Trägers durch eine Belastung würde für die beabsichtigte Drehung J der Drehungspunct sein, wenn das

Fig. 260.



Mauerwerk unzusammendrückbar wäre. Da aber diess nicht der Fall ist, so wird jener Drehungspunct nur in die Gegend des Punctes J, etwa nach A fallen, wobei es einleuchtet, dass die Puncte A und J desto näher rücken werden, je weniger zusammendrückbar das Mauerwerk ist. Durch diesen Punct A geht der aus Anlass der Anspruchsnahme des Trägers hervorgerufene Druck auf das untere Mauerwerk, welcher mit D bezeichnet werden soll. Der Druck auf das obere Mauerwerk wird in einem Puncte zwischen J' und K', etwa in E' anzunehmen sein. Dieser Druck werde mit P bezeichnet. Nennt man noch die Entfernung der beiden Drücke P und D von einander, nämlich $\overline{AE} = \overline{A'E'} = \lambda$, so hat man es jetzt mit einem Hebelsysteme zu thun, wo in A der Drehungspunct ist, und die eine Kraft P als Widerstand des Mauerwerkes auftritt, während die andere Kraft durch die Belastung des Trägers entsteht. Sind beide Enden des Trägers eingemauert, so hat man dieselbe Vorstellung auch für das gegenüber liegende Ende beizubehalten. Wird von dem eigenen Gewichte des Trägers abstrahirt, so leuchtet ein, dass zur Erreichung des Gleichgewichtes in den Fällen

$$\left.\begin{aligned} \text{I und II} \ldots D &= P + Q \\ \text{V und VI aber } D &= P + \tfrac{1}{2} Q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (422)$$

sein muss. Wird ferner die Länge l des Trägers von dem Puncte A aus gerechnet, daher in derselben die Länge λ nicht einbezogen, so hat man überdiess wegen der nöthigen Gleichheit der statischen Kraftmomente in Bezug auf den Punct A in dem Falle

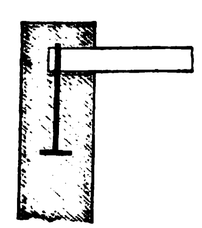
$$\left.\begin{aligned} \text{I, } P\lambda &= Q l \\ \text{II, } P\lambda &= \tfrac{1}{2} Q l \\ \text{V, } P\lambda &= \tfrac{1}{8} Q l \\ \text{und VI, } P\lambda &= \tfrac{1}{12} Q l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (423).$$

Durch die Combinirung der Gleichungen (422) und (423) findet man daher

$$\left.\begin{aligned} &\text{ad I, } P = \frac{l}{\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{\lambda}\right) \\ &\text{ad II, } P = \frac{l}{2\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{2\lambda}\right) \\ &\text{ad V, } P = \frac{l}{8\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{8\lambda}\right) \\ &\text{endlich} \\ &\text{ad VI, } P = \frac{l}{12\lambda} Q \text{ und } D = Q\left(1 + \frac{l}{12\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (424).$$

Diese Gleichungen lassen die Drücke beurtheilen, welche das Mauerwerk ober- und unterhalb des betreffenden Trägerendes auszuhalten hat. Dieselben werden mit der Zunahme von λ kleiner, und mit der Abnahme von λ grösser, so dass sie für einen unendlich kleinen Werth von λ bis in das Unendliche gesteigert würden. Hieraus folgt, dass das bedungene Festhalten der Trägerenden desto schwieriger zu erfüllen ist, je kürzer die in dem Mauerwerke eingelassenen Stücke sind. Es muss daher in jedem besonderen Falle ein Minimum von λ, daher auch von $\overline{JK}$ geben, bei welchem das Gleichgewicht noch möglich ist. Ueberhaupt hat man bei kurzen Stücken vorzüglich darauf zu sehen, dass das obere Mauerwerk nicht gehoben werde. Im Falle einer derartigen Besorgniss kann die Verankerung des Trägerendes in das untere Mauerwerk gute Dienste leisten (Fig. 261).

Fig. 261.



Diese Verhältnisse muss man unverrückbar im Auge behalten, um sich keiner Täuschung über die Anwendbarkeit der gefundenen Rechnungsresultate hinzugeben.

Siebentes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn in der Mitte zwischen den Stützen stets die Belastung Q concentrirt ist.

§. 205.

Vorerinnerung. Wenn ein continuirlicher Träger auf mehrere Stützen gelagert, und sodann mit Gewichten belastet wird, so können verschiedene Umstände in Bezug auf die Stellung der Tragstützen und auf die Art der Belastung stattfinden. Als die vorzüglichsten Fälle gelten in ersterer Beziehung jene, wo sämmtliche Stützen gleich weit von einander abstehen, in letzterer Beziehung aber jene, wo entweder in der Mitte zwischen den Stützen stets eine gewisse Last sich concentrirt, oder wo der Träger nach seiner ganzen

Länge gleichförmig belastet ist. Der Fall der vereinten Wirkung dieser beiden Belastungsweisen ist ebenfalls wichtig. Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich auf diese vorzüglichsten Fälle beschränken.

§. 206.

Annahmen. Das vorliegende Kapitel wird sich mit der Untersuchung des in Figur 262 dargestellten Falles befassen, wo näm-

Fig. 262.

lich der Träger auf N gleich weit von einander abstehenden Stützen A_1, A_2, A_3,... A_n,.... A_{N-1} und A_N ruht, und in der Mitte zwischen denselben stets das Gewicht Q concentrirt ist.

Man nenne den Abstand der Stützen von einander . . l,
das Biegungsmoment im Sinne des §. 53 . . . . $m l$,
betrachte die Längenaxe des Trägers als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, bei welchem die positiven Abscissen in der Richtung von A_1 gegen A_N, die positiven Ordinaten hingegen in der Richtung der einwirkenden Gewichte, also nach abwärts gezählt werden, und beziehe hierauf die Biegungscurve.

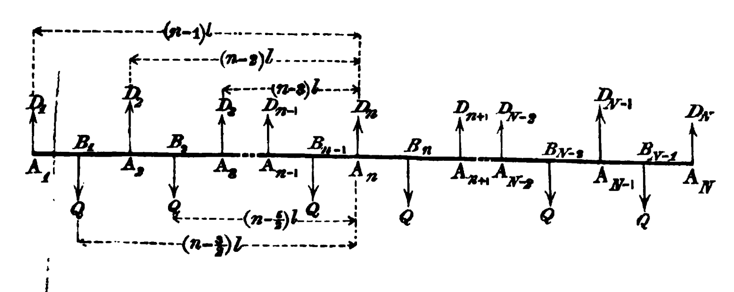
Man bezeichne ferner die Drücke auf die Stützen mit . D,
die Biegungen in der Mitte zwischen denselben mit . . . . δ,
die Winkel, welche die Tangenten der Biegungscurve an den Stützpuncten mit dem Horizonte einschliessen, mit . . . φ,
und die Winkel, welche die Tangenten der Biegungcurve in der Mitte zwischen den Stützen mit jenem Horizonte bilden, mit . . . . w,
diese Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern, so dass durch die Grösse D_n die Intensität des Druckes auf die n^{te} Stütze, und durch die Grösse δ_n die Biegung in B_n vorgestellt wird, wäh-

rend die Winkel φ_n und w_n zu den Tangenten an die Curve in A_n und B_n gehören. Uebrigens werde jeder Theil des Trägers zwischen zwei Stützen, „Tragfeld“ genannt, und gleichfalls auf einander folgend numerirt, so dass das n^{te} Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} zu liegen kommt, und der auf N Stützen ruhende Träger $(N-1)$ gleiche Tragfelder enthält.

§ 207.

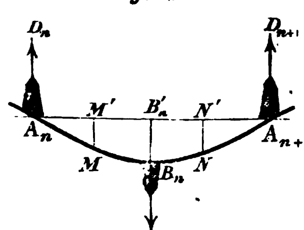
Bedingungen des Gleichgewichtes. Zur Erlangung der Kenntniss der Bedingungen des Gleichgewichtes bei dem Träger denke man sich (Fig. 263) seine Stützen weggenommen, und an

Fig. 263.



deren Statt Kräfte angebracht, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Hiernach muss vor Allem die Totalbelastung $(N-1)Q$ eben so gross, wie die Summe aller Drücke $(D_1 + D_2 + \ldots + D_n + \ldots + D_N)$ sein. Bezeichnet man diese mit ΣD_N, so ist die erste Bedingung des Gleichgewichtes

Fig. 264.



$$\Sigma D_N = (N-1)Q \quad . \quad . \quad (425).$$

Auf die Betrachtung der Biegungscurve in einem beliebigen Tragfelde $\overline{A_n A_{n+1}}$ übergehend, sei der Coordinatenursprung in A_n und für irgend einen Punct des Curventheils $\widehat{A_n B_n}$ (Fig. 264) die Abscisse $\overline{A_n M'} = x$ und die Ordinate $\overline{M M'} = y$. Das statische Kraftmoment in Beziehung auf die Stelle M ist nach den Fig. 263 und 624

$$(Q.\overline{B'_1 M'} + Q.\overline{B'_2 M'} + \ldots + Q.\overline{B'_{n-1} M'}) -$$
$$-(D_1.\overline{A_1 M'} + D_2.\overline{A_2 M'} + \ldots + D_n.\overline{A_n M'}),$$

und mit Rücksicht auf die Werthe von l und x, wenn man zugleich die Gliederordnuug umkehrt,

$$\left[Q(\tfrac{1}{2}l+x) + Q(\tfrac{3}{2}l+x) + \ldots + Q[(n-\tfrac{3}{2})l+x]\right] -$$
$$-\left[D_n x + D_{n-1}(l+x) + \ldots + [(n-1)l+x] D_1\right] =$$
$$=\left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1]\right]\frac{l}{2} +$$
$$+[(n-1)Q - \Sigma D_n]x,$$

wobei $\Sigma D_n = (D_1 + D_2 + \ldots + D_n)$ bedeutet, und die Reihe

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) = (n-1)^2$$

gesetzt wurde.

Man hat jetzt nach der Normalgleichung (47)

$$m t \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1]\right]\frac{l}{2} +$$
$$+[(n-1)Q - \Sigma D_n]x \quad \ldots \quad (426),$$

und durch zweimalige Integration

$$m t \frac{dy}{dx} = m t \, tg\, \varphi_n +$$
$$+\left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1]\right]\frac{lx}{2} +$$
$$+[(n-1)Q - \Sigma D_n]\frac{x^2}{2} \quad \ldots \quad (427)$$

und

$$m t\, y = m t \, tg\, \varphi_n x +$$
$$+\left[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1]\right]\frac{lx^2}{4} +$$
$$+[(n-1)Q - \Sigma D_n]\frac{x^3}{6} \quad \ldots \quad (428).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass für den Punct A_n gleichzeitig $x = o$, $\frac{dy}{dx} = tg\, \varphi_n$ und $y = o$ werden muss. Nachdem aber auch für den Punct B_n die gleichzeitigen Werthe $x = \frac{1}{2} l$, $\frac{dy}{dx} = tg\, w_n$ und $y = \delta_n$ existiren, so hat man überdiess

$$m t \, tg\, w_n = m t \, tg\, \varphi_n +$$
$$+\tfrac{1}{8}[(n-1)(2n-1)Q - D_n - 5D_{n-1} - 9D_{n-2} - \ldots$$
$$\ldots - (4n-8)D_1]l^2 \quad \ldots \quad (429)$$

und

$$mt\,\delta_n = \tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi_n l +$$
$$+ \tfrac{1}{48}\left[(n-1)(3n-2)Q - D_n - 7D_{n-1} - 13D_{n-2} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots - (6n-5)D_1\right] l^3 \quad . \quad . \quad . \quad (430).$$

In den Gleichungen (426), (427) und (428) kann die Abscisse x nur von o bis $\frac{1}{2}l$ variiren.

Um sogleich auf den andern Curventheil $\widehat{B_n A_{n+1}}$ überzugehen, bezeichne man für irgend einen Punct N desselben wieder die Abscisse $\overline{A_n N'}$ mit x, und die Ordinate $\overline{NN'}$ mit y. In diesem Falle besteht offenbar das statische Krafmoment in Beziehung auf N aus einem Ausdrucke von der Form (426) vermehrt um das Product $Q(x - \frac{1}{2}l)$. Man hat nämlich für jenes Moment die Relation

$$\left[(n-1)^2 Q - 2\left[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1\right]\right]\frac{l}{2} +$$
$$+ \left[(n-1)Q - \Sigma D_n\right]x + Q(x - \tfrac{1}{2}l),$$

somit nach vorgenommener Reduction in Verbindung mit der Normalgleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = \left[n(n-2)Q - 2\left[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1\right]\right]\frac{l}{2} +$$
$$+ (nQ - \Sigma D_n)\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (431),$$

und durch zweimaliges Integriren

$$mt\frac{dy}{dx} = mt\,tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{8}Ql^2 + \left[n(n-2)Q - 2\left[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots + (n-1)D_1\right]\right]\frac{lx}{2} + (nQ - \Sigma D_n)\frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (432)$$

und

$$mt\,y = -\tfrac{1}{48}Ql^3 + (mt\,tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{8}Ql^2)\,x +$$
$$+ \left[n(n-2)Q - 2\left[D_{n-1} + 2D_{n-2} + \ldots + (n-1)D_1\right]\right]\frac{lx^2}{4} +$$
$$+ (nQ - \Sigma D_n)\frac{x^3}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (433).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass, wie zuvor $x = \frac{1}{2}l$, $\frac{dy}{dx} = tg\,w_n$ und $y = \delta_n$ gleichzeitige Werthe sind, und für die beiden letzteren die Relationen (429) und (430) zu benützen kommen. In den Gleichungen (431), (432) und (433) kann x von $\frac{1}{2}l$ bis l variiren, und für den Punct A_{n+1} wird gleichzeitig $x = l$, $\frac{dy}{dx} = tang\,\varphi_{n+1}$ und $y = o$. Der letzten Bemerkung gemäss erhält man aus den Relationen (432) und (433) überdiess

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_{n+1} = \frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_n + \tfrac{1}{2}(2n-1)^2 Q -$$
$$- 2\left[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1\right] \quad . \quad (434)$$

und

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_n = \tfrac{1}{12}(-5 + 16n - 12n^2)Q +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\left[D_n + 4D_{n-1} + 7D_{n-2} + \ldots + (3n-2)D_1\right] \quad . \quad (435).$$

Wird der Werth von $\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_n$ aus der letzten in die vorletzte Gleichung substituirt, so findet man nach gehöriger Reduction

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_{n+1} = \tfrac{1}{12}(1 - 8n + 12n^2)Q -$$
$$- \tfrac{2}{3}\left[2D_n + 5D_{n-1} + 8D_{n-2} + \ldots + (3n-1)D_1\right]. \quad (436)$$

und wird noch in der Gleichung (435) $(n+1)$ statt n gesetzt, so folgt

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_{n+1} = -\tfrac{1}{12}(1 + 8n + 12n^2)Q +$$
$$+ \tfrac{2}{3}\left[D_{n+1} + 4D_n + 7D_{n-1} + \ldots + (3n+1)D_1\right]. \quad (437).$$

Aus der Vergleichung der Relationen (436) und (437) mit einander resultirt endlich die **wichtige** Bedingungsgleichung

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1+12n^2)Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1) \quad (438).$$

Von den Drücken auf die Stützen.

§. 208.

Abhängigkeit der Drücke unter einander. Die Gleichung (438) lehrt, wie man den Druck auf die $(n+1)^{te}$ Stütze finden kann, wenn man den Druck auf jede der vorhergehenden Stützen kennt. Ist, wie vorausgesetzt, N die Anzahl der Stützen, so kann in der citirten Gleichung der Zeiger n von 1 bis $(N-2)$ variiren, diese Gränzen jedoch nicht überschreiten, weil bei einer aufmerksamen Betrachtung des bei der Untersuchung eingeschlagenen Weges, wo von einem Tragfelde auf das zunächst angränzende geschlossen wurde, hervorgeht, dass die betreffenden Schlussfolgerungen auf die beiden Endpuncte keine Anwendung finden. Wenn daher der Druck D_{n+1} auf die $(n+1)^{te}$ Stütze mittelst der Gleichung (438) ausgedrückt werden will, so muss diese Stütze zwischen der ersten und letzten (N^{ten}) liegen. Es können daher statt n die Werthe 1, 2, 3,... bis $(N-2)$ gesetzt werden. Macht man diese Substitutionen,

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
D_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \tfrac{13}{4}\,Q - 6D_1, \\
D_3 &= \tfrac{49}{4}\,Q - 6(D_2 + 2D_1) \;\ldots = -\tfrac{29}{4}\,Q + 24D_1, \\
D_4 &= \tfrac{109}{4}Q - 6(D_3 + 2D_2 + 3D_1) \;. = \tfrac{127}{4}\,Q - 90D_1, \\
D_5 &= \tfrac{193}{4}Q - 6(D_4 + 2D_3 + 3D_2 + 4D_1) = -\tfrac{455}{4}\,Q + 336D_1, \\
D_6 &= \tfrac{301}{4}Q - 6(D_5 + 2D_4 + 3D_3 + \\
&\quad + 4D_2 + 5D_1) = \tfrac{1717}{4}\,Q - 1254D_1, \\
&\text{u. s. w., so dass allgemein} \\
D_{n+1} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = a_n Q + b_n D_1 \text{*)} \\
&\qquad\vdots \\
D_{N-1} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = a_{N-2}\,Q + b_{N-2} D_1
\end{aligned}\right\} \quad (439)$$

gesetzt werden kann, wenn a und b mit den betreffenden Zeigern die beziehungsweisen Coefficienten der Grössen Q und D_1 vorstellen, deren Bestimmung in jedem besonderen Falle keiner Schwierigkeit unterliegt.

Die Gleichungen (439) lehren den Druck auf irgend eine der Stützen zu finden, wenn jener auf die erste Stütze bekannt ist. Uebrigens ist bei der Symmetrie, welche bei dem Träger in Absicht auf Anordnung und Anspruchsnahme von beiden Enden gegen die Mitte zu stattfindet,

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= D_N, \\
D_2 &= D_{N-1}, \\
D_3 &= D_{N-2}, \\
&\ldots\ldots \\
&\text{allgemein} \\
D_n &= D_{N-n+1}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (440),$$

indem die Drücke auf je zwei gleich weit von beiden Enden abstehenden Stützen gleich sein müssen. Hieraus folgt, dass die Zahlenreihe, welche durch die Werthe D_1, D_2, D_3,.. D_{N-1}, und D_N entsteht, symmetrisch gebildet sein, und bei einer ungeraden Stützenzahl das Mittelglied $D_{\frac{N+1}{2}}$, bei einer geraden Stützenzahl aber die zwei Mittelglieder $D_{\frac{N}{2}}$ und $D_{\frac{N}{2}+1}$ enthalten muss, dass daher die Summe

*) Anmerkung. Die Statthaftigkeit dieser Form lässt sich allgemein mittelst der in ähnlichen Fällen üblichen Methode dadurch zeigen, dass die Giltigkeit dieser Form für die n ersten Werthe der Drücke vorausgesetzt, und sodann für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Werth nachgewiesen, endlich aber dieses Resultat zur Schlussfolgerung vom 2. auf den 3., vom 3. auf den 4., vom 4. auf den 5. etc., benützt wird.

aller Drücke sich im ersten Falle mit

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma D_N = 2(D_1+D_2+\ldots+D_{\frac{N-1}{2}})+D_{\frac{N+1}{2}} = 2\Sigma D_{\frac{N}{2}-1}+D_{\frac{N+1}{2}} \\ \text{im zweiten Falle aber mit} \\ \Sigma D_N = 2(D_1+D_2+\ldots+D_{\frac{N}{2}}) \qquad\qquad = 2\Sigma D_{\frac{N}{2}}\end{array}\right\} (441)$$

darstellen lässt. Diese Eigenschaft kann bei der Aufsuchung der einzelnen Drücke zweckmässig benützt werden, indem man dabei die Drücke auf alle jenseits der Mitte des Trägers gelegenen Stützen nicht besonders zu berechnen nöthig hat.

§. 209.

Besondere Relation zwischen den Drücken auf drei unmittelbar auf einander folgende Stützen. Wird in der Gleichung (438)

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{4}(1+12n^2)Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1)$$

$(n-1)$ statt n gesetzt, und von ihr der so entstehende Ausdruck

$$D_n = \tfrac{1}{4}[1+12(n-1)^2]Q - 6[D_{n-1}+2D_{n-2}+3D_{n-3}+\ldots+(n-1)D_1]$$

abgezogen, so ergibt sich als Differenz die Gleichung

$$(D_{n+1} - D_n) = 3(2n-1)Q - 6\Sigma D_n.$$

Wird in dieser die Verwechslung von $(n-1)$ mit n wiederholt, und ebenfalls von ihr der so erhaltene Ausdruck

$$(D_n - D_{n-1}) = 3(2n-3)Q - 6\Sigma D_{n-1}$$

abgezogen, so resultirt aus der Differenz die einfache und merkwürdige Relation

$$D_{n+1} + 4D_n + D_{n-1} = 6Q \quad \ldots\ldots \quad (442).$$

Diese lehrt, den Druck auf eine Stütze zu finden, wenn die Drücke auf die zunächst vorhergehenden, oder zunächst nachfolgenden oder auch zunächst angränzenden zwei Stützen bekannt sind. Dabei ist aber nicht zu vergessen, dass die beiden Endstützen nicht in Betracht kommen dürfen, wesshalb einerseits $(n-1) > 1$ und andererseits $(n+1) < N$, daher gleichzeitig $n > 2$ und $N > 4$ sein muss, woraus folgt, dass die Gleichung (442) erst dann zur Anwendung kommen kann, wenn der Träger auf mehr als 4 Stützen ruht. Sonst gilt aber jene Gleichung allgemein für je drei unmittelbar auf

einander folgende Stützen, für jede Querschnitts-Form und für jedes Materiale des prismatischen Trägers.

§. 210.

Bestimmung des Druckes D_1 auf die 1. Stütze A_1. Nach den Gleichungen (439) lassen sich die sämmtlichen Drücke als Functionen des Druckes auf die erste Stütze darstellen. Es ist daher wichtig, diesen Druck D_1 kennen zu lernen. Behufs seiner Bestimmung kann man mehrere Methoden anwenden. Die vorzüglichsten darunter sind folgende zwei:

I. Methode. Man stelle zunächst die einzelnen Werthe der Drücke D_2, D_3, D_4 etc. für die erste Hälfte des Trägers, einschliesslich der für ein ungerades N vorhandenen Mittelstütze, mit Hilfe der Gleichungen (439) dar. Hiernach erhält man aufeinanderfolgend

$$\begin{aligned}
D_2 &= \tfrac{13}{4}\,Q - 6\,D_1, \\
D_3 &= -\tfrac{29}{4}\,Q + 24\,D_1, \\
D_4 &= \tfrac{127}{4}\,Q - 90\,D_1, \\
D_5 &= -\tfrac{455}{4}\,Q + 336\,D_1, \\
D_6 &= \tfrac{1717}{4}\,Q - 1254\,D_1, \\
D_7 &= -\tfrac{6389}{4}\,Q + 4680\,D_1, \\
D_8 &= \tfrac{23863}{4}\,Q - 17466\,D_1, \\
D_9 &= -\tfrac{89039}{4}\,Q + 65184\,D_1, \\
D_{10} &= \tfrac{332317}{4}\,Q - 243270\,D_1 \text{ etc },
\end{aligned}$$

wobei man einschliesslich bis zu dem vorhandenen Mittelgliede $D_{\frac{N+1}{2}}$, oder bis zu dem ersten vorhandenen Mittelgliede $D_{\frac{N}{2}}$ zu gehen hat, je nachdem N eine ungerade oder eine gerade Zahl bezeichnet. Wird die Fortsetzung der obigen Werthe nothwendig, so kann dieselbe mit Benützung der Gleichung (442) ganz einfach geschehen, denn es ist allgemein

$$D_{n+1} = 6\,Q - 4\,D_n - D_{n-1},$$

also z. B. für $n = 10$

$$D_{11} = 6\,Q - 4\,D_{10} - D_9 = -\tfrac{1240205}{4}\,Q + 907896\,D_1,$$

u. s. w.

Hat die Aufstellung der nöthigen Werthe stattgefunden, so entwickle man die Summe aller Drücke in Uebereinstimmung mit einer der Gleichungen (441), je nachdem N ungerade oder gerade

ist, und setze diese Summe der Gleichung (425) gemäss dem Werthe $(N-1)Q$ gleich. Aus der so entstehenden Gleichung bestimme man sofort die Unbekannte D_1.

Ist z. B. $N=8$, so findet man

$$\begin{aligned} D_1 &= \;.\;.\;.\;.\;.\; D_1, \\ D_2 &= \tfrac{13}{4}\,Q - 6\,D_1, \\ D_3 &= -\tfrac{29}{4}\,Q + 24\,D_1, \\ D_4 &= \tfrac{127}{4}\,Q - 90\,D_1, \end{aligned}$$

$$\Sigma D_8 = 2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) = \tfrac{111}{2}\,Q - 142\,D_1 = (N-1)Q = 7Q,$$

und hieraus

$$D_1 = \tfrac{97}{284}\,Q.$$

Berechnet man auf diese Weise den Druck auf die erste Stütze für Träger, welche auf 2, 3, 4, etc. Stützen ruhen, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } N = 2, \ldots D_1 = \tfrac{1}{2}\,Q \ldots = 0{\cdot}5000\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 3, \ldots D_1 = \tfrac{5}{16}\,Q \ldots = 0{\cdot}3125\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 4, \ldots D_1 = \tfrac{7}{20}\,Q \ldots = 0{\cdot}3500\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 5, \ldots D_1 = \tfrac{19}{56}\,Q \ldots = 0{\cdot}3393\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 6, \ldots D_1 = \tfrac{26}{76}\,Q \ldots = 0{\cdot}3421\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 7, \ldots D_1 = \tfrac{71}{208}\,Q \ldots = 0{\cdot}3413\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 8, \ldots D_1 = \tfrac{97}{284}\,Q \ldots = 0{\cdot}3415\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 9, \ldots D_1 = \tfrac{265}{776}\,Q \ldots = 0{\cdot}3415\,.\,Q, \\ \;,,\; N = 10, \ldots D_1 = \tfrac{362}{1060}\,Q \ldots = 0{\cdot}3415\,.\,Q, \end{array}\right\} \quad (443).$$

u. s. w.

II. Methode Man setze die ebenfalls nach den Gleichungen (439) entwickelten Werthe der Drücke auf irgend zwei symmetrisch gelegene Stützen einander gleich, und bestimme aus der so entstehenden Gleichung die Unbekannte D_1. Da die beiden Endstützen nicht in Betracht gezogen werden dürfen, so kann diese Methode nur angewendet werden, wenn ausser diesen Endstützen noch zwei andere symmetrisch gelegene vorhanden sind, also $N > 3$ ist.

Hat man z. B. wieder $N=8$, so ist wegen der bemerkten Symmetrie ausser der nicht zu berücksichtigenden Relation $D_1 = D_8$ noch $D_2 = D_7$, $D_3 = D_6$ und $D_4 = D_5$, sonach mit Rücksicht auf die unter (439) gegebenen Werthe

$$\begin{aligned} \tfrac{13}{4}\,Q - 6\,D_1 &= -\tfrac{6389}{4}\,Q + 4680\,D_1, \\ -\tfrac{29}{4}\,Q + 24\,D_1 &= \tfrac{1717}{4}\,Q - 1254\,D_1 \text{ und} \\ \tfrac{127}{4}\,Q - 90\,D_1 &= -\tfrac{455}{4}\,Q + 336\,D_1. \end{aligned}$$

Aus jeder von diesen drei Gleichungen erhält man, wie vorhin, für den Druck auf die **erste** Stütze

$$D_1 = \frac{97}{284} Q.$$

Es versteht sich übrigens von selbst, dass zur Bestimmung von D_1 nur nothwendig ist, eine einzige Gleichung aufzustellen und aufzulösen.

Sucht man nach dieser Methode den Druck D_1 für Träger, welche auf mehr als drei Stützen ruhen, so findet man ebenfalls die Resultate (443).

§. 211.

Bestimmung der Drücke auf die übrigen Stützen. Hat man den Druck D_1 auf die erste Stütze gefunden, so können auch die übrigen Drücke nach den Gleichungen (439) bestimmt werden. Dabei wird man von der Gleichung (442) eine zweckmässige Anwendung machen, wenn $n > 2$ geworden ist, indem man den Druck auf eine Stütze aus den bekannten Drücken auf die beiden vorhergehenden Stützen ableitet. Es ist übrigens nicht nothwendig, diese Entwicklung der Werthe für die Drücke auf alle Stützen auszudehnen, indem die Drücke auf die symmetrisch gelegenen Stützen einander gleich sind. Ist z. B. der Träger auf acht Stützen gelagert, so hat man wegen $N = 8$

nach §. 210 . . .	$D_1 = \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{97}{284} Q = 0{\cdot}8415 \,.\, Q,$
nach den Gleichungen (439)	$D_2 = \frac{12}{4} Q - 6 D_1 = \frac{341}{284} Q = 1{\cdot}2007 \,.\, Q,$
	$D_3 = -\frac{29}{4} Q + 24 D_1 = \frac{269}{284} Q = 0{\cdot}9472 \,.\, Q,$
nach d. Gleich. (442)	$D_4 = 6Q - 4D_3 - D_2 = \frac{287}{284} Q = 1{\cdot}0106 \,.\, Q,$
nach den Gleichungen (440)	$D_5 = D_4 \;.\;.\;.\;.\; = \frac{287}{284} Q = 1{\cdot}0106 \,.\, Q,$
	$D_6 = D_3 \;.\;.\;.\;.\; = \frac{269}{284} Q = 0{\cdot}9472 \,.\, Q,$
	$D_7 = D_2 \;.\;.\;.\;.\; = \frac{341}{294} Q = 1{\cdot}2007 \,.\, Q,$
	$D_8 = D_1 \;.\;.\;.\;.\; = \frac{97}{284} Q = 0{\cdot}8415 \,.\, Q,$

also übereinstimmend
mit der Gleichung (425) . . . . $\Sigma D_8 = 7 Q.$

Bestimmt man dergestalt die Drücke auf die Stützen für Träger, welche auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stellt man die betreffenden Coefficienten von Q zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$	$\frac{D_{10}}{Q}$
2	$\frac{1}{2}$ 0·5000	$\frac{1}{2}$ 0·5000	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{5}{16}$ 0·3125	$\frac{22}{16}$ 1·3750	$\frac{5}{16}$ 0·3125	—	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{7}{20}$ 0·3500	$\frac{23}{20}$ 1·1500	$\frac{23}{20}$ 1·1500	$\frac{7}{20}$ 0·3500	—	—	—	—	—	—
5	$\frac{19}{56}$ 0·3393	$\frac{68}{56}$ 1·2143	$\frac{50}{56}$ 0·8928	$\frac{68}{56}$ 1·2143	$\frac{19}{56}$ 0·3393	—	—	—	—	—
6	$\frac{26}{76}$ 0·3421	$\frac{91}{76}$ 1·1974	$\frac{73}{76}$ 0·9605	$\frac{73}{76}$ 0·9605	$\frac{91}{76}$ 1·1974	$\frac{26}{76}$ 0·3421	—	—	—	—
7	$\frac{71}{208}$ 0·3413	$\frac{250}{208}$ 1·2019	$\frac{196}{208}$ 0·9423	$\frac{214}{208}$ 1·0290	$\frac{196}{208}$ 0·9423	$\frac{250}{208}$ 1·2019	$\frac{71}{208}$ 0·3413	—	—	—
8	$\frac{97}{284}$ 0·3415	$\frac{341}{284}$ 1·2007	$\frac{269}{284}$ 0·9472	$\frac{287}{284}$ 1·0106	$\frac{287}{284}$ 1·0106	$\frac{269}{284}$ 0·9472	$\frac{341}{284}$ 1·2007	$\frac{97}{284}$ 0·3415	—	—
9	$\frac{265}{776}$ 0.3415	$\frac{932}{776}$ 1·2010	$\frac{734}{776}$ 0·9459	$\frac{788}{776}$ 1·0155	$\frac{770}{776}$ 0·9922	$\frac{788}{776}$ 1·0155	$\frac{734}{776}$ 0·9459	$\frac{932}{776}$ 1·2010	$\frac{265}{776}$ 0·3415	—
10	$\frac{362}{1060}$ 0·3415	$\frac{1273}{1060}$ 1·2009	$\frac{1003}{1060}$ 0·9462	$\frac{1075}{1060}$ 1·0142	$\frac{1057}{1060}$ 0·9972	$\frac{1057}{1060}$ 0·9972	$\frac{1075}{1060}$ 1·0142	$\frac{1003}{1060}$ 0·9462	$\frac{1273}{1060}$ 1·2009	$\frac{362}{1060}$ 0·3415

Der Gebrauch dieser Tabelle ist klar. Ruht z. B. der Träger auf fünf gleichweit von einander abstehenden Stützen, und ist jedes Tragfeld in der Mitte mit dem Gewichte von 56 Zentnern belastet, so wird unter Vernachlässigung des eigenen Gewichtes des Trägers nach der vorstehenden Tabelle wegen $N = 5$ und $Q = 56$

der Druck auf die 1. Stütze $D_1 = \frac{19}{56} Q = 19$ Ztr.
„ „ „ „ 2. „ $D_2 = \frac{68}{56} Q = 68$ „
„ „ „ „ 3. „ $D_3 = \frac{50}{56} Q = 50$ „
„ „ „ „ 4. „ $D_4 = \frac{68}{56} Q = 68$ „
und „ „ „ „ 5. „ $D_5 = \frac{19}{56} Q = 19$ „

daher in Uebereinstimmung mit der
Gleichung (425) . . . . $\Sigma D_5 = 4\,Q = 224$ Ztr.

Auf eine zweckmässige Weise kann man sich die Drücke auf die Stützen mittelst Fig. 265 (Seite 372) anschaulich machen. Es sind nämlich daselbst die auf 2, 3, 4,... Stützen ruhenden Träger verzeichnet, und oberhalb einer jeden Stütze ist der Druck geschrieben, den dieselbe zu erleiden hat.

Eine andere graphische Versinnlichung kann dadurch bewerkstelligt werden, dass man die Drücke auf die Stützen als nach aufwärts wirkende Kräfte ansieht, und diese mittelst geraden Linien darstellt, deren Längen der Intensität jener Kräfte proportional sind.

§. 212.

Besondere Eigenschaften der Drücke.

1. Bezeichnet man die Differenzen zwischen den Drücken und den Belastungsgewichten mit Δ und den entsprechenden Zeigern, so dass

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = D_1 - Q \\ \Delta_2 = D_2 - Q \\ \Delta_3 = D_3 - Q \\ \text{u. s. w.} \\ \text{allgemein} \\ \Delta_n = D_n - Q \\ \text{bis} \\ \Delta_{N-1} = D_{N-1} - Q \\ \text{u. } \Delta_N = D_N - Q, \end{array}\right\} \text{somit} \left\{\begin{array}{l} D_1 = Q + \Delta_1 \\ D_2 = Q + \Delta_2 \\ D_3 = Q + \Delta_3 \\ \text{u. s. w.} \\ \text{allgemein} \\ D_n = Q + \Delta_n \\ \text{bis} \\ D_{N-1} = Q + \Delta_{N-1} \\ \text{u. } D_N = Q + \Delta_N \end{array}\right\} \quad (444)$$

wird, so geht die Normalgleichung (442) über in:

$$\Delta_{n+1} + 4\Delta_n + \Delta_{n-1} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (445)$$

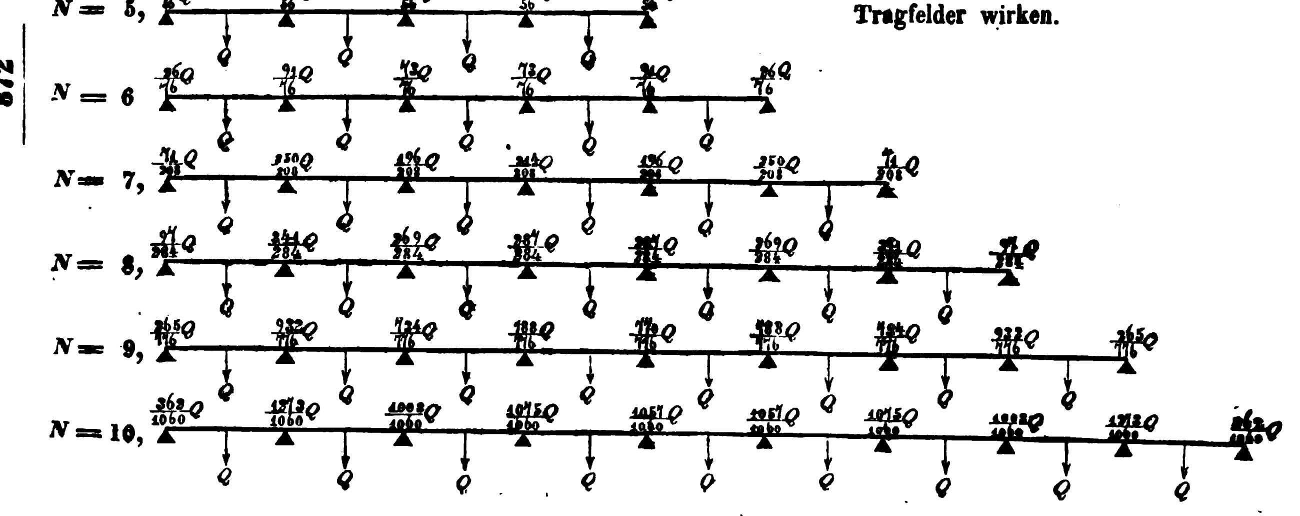


Fig. 265.

Nebige Figur bezieht sich auf Träger, welche auf 2, 3, 4, ... 10 gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhen. Oberhalb einer jeden Stütze ist der darauf stattfindende Druck verzeichnet, welcher von den Belastungsgewichten Q herrührt, wenn diese in der Mitte der Tragfelder wirken.

Da diese Gleichung nur existiren kann, wenn ihre Glieder theils positiv, theils negativ sind, so folgt, dass die Drücke auf 3 unmittelbar auf einander folgende Stützen nicht alle zugleich grösser oder kleiner als Q sein können. Es muss daher gleichzeitig sein:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{entweder } D_{n+1} > Q, & D_n > Q & \text{ und } D_{n-1} < Q, \\ \text{oder } D_{n+1} > Q, & D_n < Q & \text{ „ } D_{n-1} > Q, \\ \text{oder } D_{n+1} > Q, & D_n < Q & \text{ „ } D_{n-1} < Q, \\ \text{oder } D_{n+1} < Q, & D_n > Q & \text{ „ } D_{n-1} > Q, \\ \text{oder } D_{n+1} < Q, & D_n > Q & \text{ „ } D_{n-1} < Q, \\ \text{oder } D_{n+1} < Q, & D_n < Q & \text{ „ } D_{n-1} > Q. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (446).$$

2. Es ist klar, dass diejenigen Differenzen, welche zu gleich weit von beiden Enden abstehenden Stützen gehören, gleiche Werthe besitzen, dass also die Zahlenreihe der auf einander folgenden Differenzen Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc., bis Δ_{N-1} und Δ_N eine symmetrische Bildung hat.

Ist N eine ungerade Zahl, so hat diese Reihe das Mittelglied $\Delta_{\frac{N+1}{2}}$, und die beiden angränzenden Glieder sind einander gleich. In diesem Falle hat man

$$\Delta_{\frac{N+3}{2}} = \Delta_{\frac{N-1}{2}}.$$

Da nun zufolge der Relation (445) bezüglich der genannten drei Glieder

$$\Delta_{\frac{N+3}{2}} + 4\,\Delta_{\frac{N+1}{2}} + \Delta_{\frac{N-1}{2}} = 0$$

zu setzen ist, so erhält man

$$\frac{\Delta_{\frac{N+1}{2}}}{\Delta_{\frac{N-1}{2}}} = -\frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (447).$$

Ist hingegen N eine gerade Zahl, so hat die fragliche Reihe die zwei gleichen Mittelglieder $\Delta_{\frac{N}{2}}$ und $\Delta_{\frac{N}{2}+1}$, und es folgt

$$\frac{\Delta_{\frac{N}{2}+1}}{\Delta_{\frac{N}{2}}} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (448).$$

8. Lenkt man die Aufmerksamkeit auf den allgemeinen Quotienten $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$, und benützt hierzu die Gleichung (445), so hat man

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{\Delta_{n+1}}{-4\,\Delta_{n+1} - \Delta_{n+2}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}},$$

und wenn $(n+1)$ statt n geschrieben wird,

$$\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+3}}{\Delta_{n+2}}},$$

folglich durch die Wiederholung dieses Verfahrens

$$\frac{\Delta_{n+3}}{\Delta_{n+2}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+4}}{\Delta_{n+3}}}$$

$$\frac{\Delta_{n+4}}{\Delta_{n+3}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+5}}{\Delta_{n+4}}}$$

etc.

daher allgemein

$$\frac{\Delta_{n+p}}{\Delta_{n+p-1}} = \frac{-1}{4 + \frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}}},$$

wo p jede solche ganze positive Zahl bedeuten kann, bei welcher die Endstütze ausser Betracht bleibt, und demgemäss der Bedingung $(n+p+1) < N$ entsprochen wird.

Werden die so gefundenen Werthe aufeinanderfolgend zurücksubstituirt, so nimmt der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ die Form

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \text{etc.} - \cfrac{1}{4 + \frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}}}}}}},$$

also jene eines Kettenbruches an, welcher $(p+1)$ Glieder enthält. Derselbe kann daher mit mehr oder weniger Gliedern ausgedrückt werden, je nachdem man p wählt.

Liegt das Stützenpaar, auf welche sich der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ bebezieht, in der ersten Hälfte des Trägers, und will man mit der

Gliederzahl im Kettenbruche so weit gehen, bis das letzte Glied $\frac{\Delta_{n+p+1}}{\Delta_{n+p}}$ mit einem der Werthe (447) und (448) übereinstimmt, so erhält man für ein ungerades N den $\left(\frac{N+1}{2} - n\right)$ gliedrigen Kettenbruch

$$\left.\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} - \frac{1}{4} + 1\right\} \quad \ldots \quad (449)$$

für ein gerades N aber den $\left(\frac{N}{2} + 1 - n\right)$ gliedrigen

$$\left.\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\} \quad \ldots \quad (450).$$

Den Relationen (449) und (450) gemäss ist bezüglich der ersten Hälfte des Trägers der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ stets negativ, und numerisch betrachtet kleiner, als die Einheit. In der Reihe Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. haben daher je zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder verschiedene Zeichen, und jedes Glied ist, numerisch betrachtet, kleiner als das zunächst vorhergehende, somit die Reihe selbst eine fallende mit Zeichenwechsel.

Hieraus folgt, dass die Drücke auf die Stützen D_1, D_2 D_3,... gegen die Mitte des Trägers regelmässig abwechselnd bald grösser bald kleiner als Q sind, und von diesem Werthe desto weniger differiren, je mehr man sich bei einer solchen Vergleichung jener Mitte nähert.

4. Stellt man sich vor, dass die Zahl der Stützen N fortwährend zunimmt, so wird für jeden Werth von n der Kettenbruch $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ ohne Ende fortlaufen, und sein Werth sich desto mehr der Gränze

$$\lim. \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \text{etc.}$$

nähern, je grösser N genommen wird. Für diesen Gränzwerth, er werde mit q bezeichnet, hat man

$$q = lim. \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right) = (-2+\sqrt{3}) = -0\cdot267949\ ^{*)} \qquad (451).$$

Der Quotient $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ nähert sich daher desto mehr dem constanten Werthe q, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Ueberdiess hat man bei der Allgemeinheit des Zeigers n noch

$$q = lim. \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = lim. \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_3}\right) = lim. \left(\frac{\Delta_5}{\Delta_4}\right) = \text{etc.},$$

somit

$$lim. \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q, \; lim. \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_2}\right) = q^2, \; lim. \left(\frac{\Delta_5}{\Delta_2}\right) = q^3, \text{ etc.},$$

woraus folgt

$$lim. \Delta_2 : lim. \Delta_3 : lim. \Delta_4 : lim\, \Delta_5 : \ldots = 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots$$

Es ist aber numerisch genommen

$$1 < q < q^2 < q^3 < \ldots,$$

also auch

$$lim. \Delta_2 < lim. \Delta_3 < lim. \Delta_4 < lim. \Delta_5 < \ldots$$

Dieser Betrachtung gemäss muss die Reihe der auf einander folgenden Gränzwerthe von $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \ldots$ eine geometrische von dem Exponenten $q = (-2+\sqrt{3})$, sonach eine fallende mit Zeichenwechsel sein. Die Glieder derselben werden, numerisch genommen, immer kleiner und nähern sich desto mehr der Nulle, je weiter die bezügliche Stütze vom Ende des Trägers entfernt liegt.

Hieraus schliesst man, dass die Intensität des Druckes auf eine Stütze desto mehr dem Belastungsgewichte Q gleichkommt, je näher jene Stütze der Mitte des Trägers liegt, und je grösser die Gesammtzahl der Stützen N ist.

---

*) Es ist nämlich $q = -\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \text{etc.}}}}} = -\frac{1}{4+q}$,

also auch $q^2 + 4q + 1 = o$, und hieraus $q = (-2+\sqrt{3}) = -0\cdot267949$.

Mit dem fortschreitenden Wachsen von N nähern sich auch die Werthe der Drücke D_1, D_2, D_3,... gewissen Gränzen. Um zuerst den Gränzwerth von D_1, nämlich $lim. D_1$ zu finden, beachte man, dass nach den Gleichungen (439)

$$D_2 = \tfrac{13}{4} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } D_3 = -\tfrac{29}{4} Q + 24 D_1,$$

ferner nach den Gleichungen (444)

$$\Delta_2 = D_2 - Q = \tfrac{9}{4} Q - 6 D_1$$
$$\text{und } \Delta_3 = D_3 - Q = \frac{-33}{4} Q + 24 D_1,$$

somit

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-11 Q + 32 D_1}{3 Q - 8 D_1},$$

und endlich

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{-11 Q + 32 \, lim. \, D_1}{3 Q - 8 \, lim. D_1}$$

resultirt.

Uebereinstimmend mit der Gleichung (451) ist ferner

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q = (-2 + \sqrt{3}).$$

Werden die beiden für $lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)$ gefundenen Werthe einander gleich gesetzt, und sodann die erscheinende Unbekannte $lim. D_1$ bestimmt, so erhält man

$$lim. D_1 = \tfrac{1}{8}\left(\frac{11 + 3q}{4 + q}\right) Q = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8}\right) Q = 0{\cdot}341506 \,.\, Q \quad (452).$$

Der Druck D_1 auf die 1. Stütze nähert sich daher desto mehr dem Werthe $\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{8}\right) Q = 0{\cdot}341506 \,.\, Q$, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Da den Gleichungen (439) gemäss die übrigen Drücke D_2, D_3, D_4 etc, von dem ersten Drucke D_1 abhängig sind, so findet man leicht auch die Gränzwerthe für diese übrigen Drücke, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} lim.\,D_2 = 1\cdot200962\,.\,Q \\ lim.\,D_3 = 0.946153\,.\,Q \\ lim.\,D_4 = 1\cdot014428\,.\,Q \\ lim.\,D_5 = 0\cdot996134\,.\,Q \\ lim.\,D_6 = 1.001036\,.\,Q \\ lim.\,D_7 = 0\cdot999723\,.\,Q \\ lim.\,D_8 = 1\cdot000074\,.\,Q \\ lim.\,D_9 = 0\cdot999980\,.\,Q \\ lim.\,D_{10} = 1\cdot000050\,.\,Q \\ lim.\,D_{11} = 0\cdot999999\,.\,Q \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (453).$$

Sämmtliche Eigenschaften findet man bei der Betrachtung der im §. 211 gegebenen Tabelle in der That vorhanden.

Biegung.

§. 213.

Form der Biegungscurve. Dieselbe ist aus den Gleichungen (428) und (433) zu beurtheilen, welche nunmehr bestimmt erscheinen, weil die darin anfänglich unbekannten Werthe von $tg\,\varphi_n$ und von den Drücken mit Rücksicht auf die Gleichung (435) und den §. 211 bereits bekannt sind. Insbesondere wird der Werth von $tg\,\varphi_n$ die Curvenform anschaulich machen, weil er die Richtung der Tangente an jedem Stützpuncte angibt. Um diese tangentielle Richtung näher zu untersuchen, bemerke man, dass zunächst aus der Gleichung (434)

$$\frac{4\,mt}{l^3}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(2n-1)^2 Q - 2\left[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1\right].$$

folgt. Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern

$$D_n + 3\,D_{n-1} + 5\,D_{n-2} + \ldots + (2\,n-1)\,D_1 =$$
$$= \left[D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1\right] +$$
$$+ \left[D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + 3\,D_{n-3} + \ldots + (n-1)\,D_1\right],$$

und nach der Gleichung (438)

$$D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{24}(1 + 12\,n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,D_{n+1},$$

daher, wenn man $(n-1)$ mit n verwechselt,

$$D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + 3\,D_{n-3} + \ldots + (n-1)\,D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{24}\,(13 - 24\,n + 12\,n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,D_n,$$

wonach man findet:

$$D_n + 3\,D_{n-1} + 5\,D_{n-2} + \ldots + (2n-1)\,D_1 =$$
$$= \left(\frac{7 - 12\,n + 12\,n^2}{12}\right) Q - \tfrac{1}{6}\,(D_{n-1} + D_n).$$

Benützt man dieses Resultat, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{4\,mt}{l^2}\,(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = -\tfrac{2}{3}\,Q + \tfrac{1}{3}\,(D_n + D_{n+1}),$$

oder, da nach den Relationen (444)

$$D_n = Q + \Delta_n \text{ und } D_{n+1} = Q + \Delta_{n+1}$$

zu setzen ist, auch in:

$$\frac{4\,mt}{l^2}\,(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{3}\,(\Delta_n + \Delta_{n+1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (454).$$

Um noch eine zweite Beziehung zwischen $tg\,\varphi_{n+1}$ und $tg\,\varphi_n$ zu erhalten, addire man die Gleichungen (435) und (436). Hiernach wird

$$\frac{4\,mt}{l^2}\,(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) =$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(2n-1)\,Q - \tfrac{2}{3}\,(D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + \ldots + D_1).$$

Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern, nämlich ΣD_n, dem §. 209 gemäss

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}\,(2\,n-1)\,Q - \tfrac{1}{6}\,(D_{n+1} - D_n),$$

somit findet man mit Benützung dieses Werthes

$$\frac{4\,mt}{l^2}\,(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{9}\,(D_{n+1} - D_n) = \tfrac{1}{9}\,(\Delta_{n+1} - \Delta_n) \quad . \quad (455).$$

Die Combinirung der Gleichungen (454) und (455) ergibt nunmehr ganz einfach

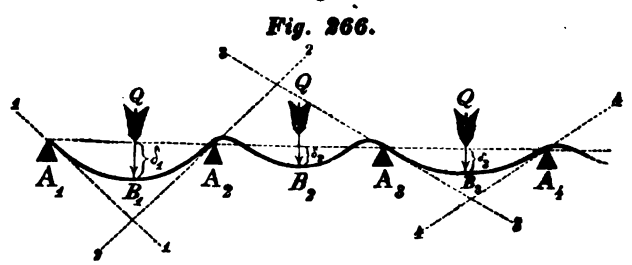
$$tg\,\varphi_n = -(2\,\Delta_n + \Delta_{n+1})\,\frac{l^2}{36\,mt} = -\Delta_n\left(2 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)\frac{l^2}{36\,mt} \quad . \quad (456).$$

Aus diesem Resultate schliesst man bezüglich der ersten Hälfte der Träger Folgendes:

1. Da nach dem §. 212 $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ negativ und numerisch kleiner als die Einheit ist, so wird $tg\,\varphi_n$ positiv oder negativ, d. h. der Winkel φ_n spitz oder stumpf, je nachdem Δ_n negativ oder positiv ist.

Indem nun nach dem §. 212 Δ_n für $n = 1, 3, 5$ etc. negativ, für $n = 2, 4, 6$ etc. aber positiv wird, so schliesst die Tangente der Biegungscurve mit dem Horizonte an jeder ungerade numerirten Stütze einen spitzen, an jeder gerade numerirten aber einen stumpfen Winkel ein, in so lange die Mitte des ganzen Trägers nicht erreicht wird. Siehe die Fig. 266.

Fig. 266.



2. Da die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} desto kleiner sind, je grösser n ist, so werden die Tangenten bei den Stützen desto mehr horizontal, und das Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} befindet sich desto mehr in dem Falle V (Fig. 259), je weiter diese Stützen von dem Trägerende entfernt liegen. Genau horizontal kann übrigens keine dieser Tangenten gehen, den Fall ausgenommen, wenn N eine ungerade Zahl ist, wo sodann eine Tangente, nämlich die an die Mittelstütze $A_{\frac{N+1}{2}}$ horizontal wird. Denn es ist allgemein nach der Gleichung (456)

$$tg\,\varphi_n = (-2\Delta_n - \Delta_{n+1})\frac{l^2}{36\,m\,t},$$

somit wegen der Gleichung (445)

$$-\Delta_{n+1} = 4\Delta_n + \Delta_{n-1},$$

auch

$$tg\,\varphi_n = (2\Delta_n + \Delta_{n-1})\frac{l^2}{36\,m\,t} = \Delta_{n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)\frac{l^2}{18\,m\,t}.$$

Bei einem ungeraden N ist für die Mittelstütze insbesondere $n = \frac{N+1}{2}$, daher

$$tg\,\varphi_{\frac{N+1}{2}} = \Delta_{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{\Delta_{\frac{N+2}{2}}}{\Delta_{\frac{N-1}{2}}} + \frac{1}{2}\right)\frac{l^2}{18\,m\,t}$$

folglich wegen der Relation (447)

$$tg\,\varphi_{\frac{N+1}{2}} = 0.$$

Das Vorhandensein dieser Eigenschaft ist übrigens aus Anlass der symmetrischen Bildung der ganzen Biegungscurve einleuchtend.

3. Die grösste Neigung der Tangenten findet dem Gesagten zufolge bei der 1. Stütze statt, und ihre Grösse ergibt sich aus der Gleichung

$$tg\,\varphi_1 = (8\,D_1 - Q)\,\frac{l^2}{48\,m\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (457),$$

welche nämlich für $n = 1$ aus der Relation (445) abgeleitet wird. [Die Gleichung (456) ist zu diesem Zwecke nicht benützbar.] Hiernach findet man insbesondere für verschiedene N, wenn man unter Einem die entsprechenden Werthe für D_1 nach dem §. 210 und nach Gleichung (452) substituirt, und zwar für

$$\left.\begin{array}{l}
N = 2 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = 3\;.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 3{\cdot}0000\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 3 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{3}{2}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}5000\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 4 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{9}{5}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}8000\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 5 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{12}{7}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7143\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 6 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{33}{19}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7368\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 7 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{45}{26}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7308\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 8 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{123}{71}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7324\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 9 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{168}{97}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7320\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
N = 10 \ldots\ldots tg\,\varphi_1 = \frac{459}{265}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7321\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N = \infty,\ lim.tg\,\varphi_1 = \sqrt{3}\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t} = 1{\cdot}7321\,.\frac{Q\,l^2}{48\,m\,t}
\end{array}\right\} \quad (458).$$

Der für $N = 2$ gefundene Werth stimmt mit der Gleichung (73) überein, wenn man dabei den Werth für δ nach der Gleichung (72) berücksichtigt. Auch ist merkwürdig, dass unter sonst gleichen Umständen die kleinste Neigung der Tangente in A_1 für $N = 3$ Stützen stattfindet.

§. 214.

Biegung in der Mitte der Tragfelder (δ_n). Der Werth von δ_n folgt aus der Gleichung (430)

$$m t \delta_n = \tfrac{1}{2} m t \, tg \, \varphi_n l +$$
$$+ \frac{l^3}{48} [(n-1)(3n-2) Q - D_n - 7 D_{n-1} - 13 D_{n-2} - (6n-5) D_1].$$

Es ist aber

$$D_n + 7 D_{n-1} + 13 D_{n-2} + .. + (6n-5) D_1 =$$
$$= [D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + .. + D_1] +$$
$$+ 6 [D_{n-1} + 2 D_{n-2} + .. + (n-1) D_1],$$

und da nach dem vorigen §.

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1) Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n), \text{ so wie}$$
$$D_{n-1} + 2 D_{n-2} + \ldots + (n-1) D_1 = \tfrac{1}{8}(3 - 8n + 4n^2) Q - \tfrac{1}{6}\Delta_n$$

gesetzt werden kann, auch

$$D_n + 7 D_{n-1} + 13 D_{n-2} + .. + (6n-5) D_1 =$$
$$= \left(\frac{7 - 20n + 12n^2}{4}\right) Q - \left(\frac{\Delta_{n+1} + 5\Delta_n}{6}\right).$$

Substituirt man diesen Werth, so wie jenen aus der Gleichung (456) für $tg \, \varphi_n$ in die obige Relation für δ_n, so reducirt sich dieselbe auf:

$$\delta_n = [Q - 2(\Delta_n + \Delta_{n+1})] \frac{l^3}{192 m t} \quad . \quad . \quad . \quad (459).$$

Aus dieser Gleichung kann, wenn bei der Betrachtung die Mitte des Trägers nicht überschritten wird, Folgendes geschlossen werden:

1. Da der Werth von $\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_n \left(1 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)$ mit Δ_n positiv und negativ wird, und das erstere für die gerade numerirten, das letztere aber für die ungerade numerirten Stützen eintritt, so leuchtet ein, dass die Biegung im 1., 3., 5. etc. Tragfelde grösser, im 2., 4., 6. etc. Tragfelde aber kleiner als $\frac{Q l^3}{192 m t}$ ist.

2. Von diesem Werthe $\frac{Q l^3}{192 m t}$ werden sich die Biegungen desto weniger entfernen, je weiter die betreffenden Tragfelder von den Enden des Trägers entfernt liegen.

Man hat nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 > \delta_3 > \delta_5 > \text{etc. und alle} > \frac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \\ \text{ferner} \\ \delta_2 > \delta_4 > \delta_6 > \text{etc. und alle} < \frac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \\ \text{endlich} \\ \delta_1 > \delta_2 < \delta_3 > \delta_4 < \delta_5 > \delta_6 < \text{etc.} \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad (460).$$

Dieses Verhalten findet man auch aus der Fig. (266) erklärlich.

3. Würden die Zahlen N und n ohne Ende wachsen, daher Δ_n und Δ_{n+1} nach dem §. 212 ohne Ende abnehmen, so wäre der Gränzwerth, welchem sich δ_n fortwährend nähert

$$\delta_\infty = \frac{Q\,l^3}{192\,m\,t} \quad \ldots \ldots \quad (461),$$

also eben so gross, wie der Werth in der Formel (408) für den im §. 203 mit V bezeichneten Fall. In der That muss dieses Resultat zum Vorschein kommen, weil nach Inhalt des vorhergehenden §. bei dem unendlichen Wachsen von N und n das Tragfeld in einem Zustande anzunehmen ist, welcher sich jenem des Falles V ohne Ende nähert.

4. Nach Punct 2 befindet sich von allen Biegungen, die in der Mitte der Tragfelder stattfinden, die grösste in dem ersten und selbstverständlich auch in dem letzten Tragfelde. Diese besondere Biegung erhält man für $n = 1$ aus der Gleichung (430), da zu diesem Behufe die Gleichung (459) nicht benützbar ist. Hiernach hat man

$$m\,t\,\delta_1 = \tfrac{1}{2}\,m\,t\;tg\,\varphi_1\,l - \tfrac{1}{48}\,D_1\,l^3,$$

daher wegen der Relation (457),

$$\delta_1 = (6\,D_1 - Q)\,\frac{l^3}{96\,m\,t} \quad \ldots \quad (462).$$

Insbesondere wird für verschiedene N, wenn man die entsprechenden Werthe von D_1 nach §. 210 und nach der Gleichung (452) substituirt, nämlich für

$$\left.\begin{aligned}
N &= 2 \ldots \delta_1 = 2 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 2\cdot0000 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 3 \ldots \delta_1 = \tfrac{7}{8} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 0\cdot8750 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 4 \ldots \delta_1 = \tfrac{11}{10} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot1000 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 5 \ldots \delta_1 = \tfrac{29}{28} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0357 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 6 \ldots \delta_1 = \tfrac{40}{38} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0526 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 7 \ldots \delta_1 = \tfrac{109}{104} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0481 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 8 \ldots \delta_1 = \tfrac{149}{142} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0493 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 9 \ldots \delta_1 = \tfrac{407}{388} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0489 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= 10 \ldots \delta_1 = \tfrac{556}{530} \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0491 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} \\
N &= \infty, \lim. \delta_1 = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right) \cdot \frac{Q l^3}{96 m t} = 1\cdot0490 \cdot \frac{Q l^3}{96 m t}
\end{aligned}\right\} \quad (463).$$

Das Resultat für $N=2$ stimmt mit der Formel (72), und für $N=3$ mit der Formel $\delta = \frac{7}{768} \cdot \frac{Q l^3}{m t}$ im §. 178 überein, wie man diess auch in der That erwarten musste, zumal im letzten Falle das Tragfeld in demselben Zustande sich befindet, wie wenn es bei der zweiten Stütze festgehalten und auf der ersten Stütze aufliegen würde. Dass von allen Biegungen im ersten Tragfelde unter sonst gleichen Umständen die kleinste für $N=3$ Stützen vorhanden ist, steht im Zusammenhange mit der am Schlusse des vorigen §. bemerkten Eigenschaft.

§. 215.

Statische Kraftmomente. Der Werth des statischen Kraftmomentes in Bezug auf irgend eine Stelle in einem beliebigen (n^{ten}) Tragfelde, ist entweder aus der Gleichung (426) oder (431) zu bestimmen, je nachdem die betreffende Stelle in der ersten oder zweiten Hälfte des gewählten Tragfeldes liegt. Berücksichtigt man, dass nach Inhalt des vorigen §.

$$D_{n-1} + 2 D_{n-2} + \ldots + (n-1) D_1 = \tfrac{1}{8}(3 - 8n + 4n^2) Q - \tfrac{1}{6}\Delta_n,$$

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n-1) Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n), \text{ und}$$

$$\Sigma D_{n-1} = \tfrac{1}{2}(2n-3) Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_n - \Delta_{n-1})$$

gesetzt werden kann, so verwandeln sich die vorcitirten Gleichungen in folgende:

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = (\tfrac{1}{4}Q+\tfrac{1}{3}\Delta_n)\frac{l}{2} - \left(Q+\frac{\Delta_n-\Delta_{n+1}}{3}\right)\frac{x}{2} \quad . \quad . \quad (464)$$

und

$$mt\frac{d^2y}{dx^2} = -(\tfrac{1}{4}Q-\tfrac{1}{3}\Delta_n)\frac{l}{2} + \left(Q-\frac{\Delta_n-\Delta_{n+1}}{3}\right)\frac{x}{2} \quad . \quad . \quad (465).$$

Diese Kraftmomente sind mit x variabel. Da Behufs der Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens die grössten numerischen Werthe der positiven und negativen Kraftmomente in Betracht kommen, und diese Werthe nach den Erörterungen im §. 127 nur an solchen Stellen vorhanden sein können, wo der Träger aufliegt, oder wo die Belastungsgewichte wirken, so müssen diese besonderen Stellen näher untersucht werden. Heisst man daher bezüglich des n^{ten} Tragfeldes das statische Kraftmoment an der Auflagestelle A_n allgemein $St.(A_n)$, und jenes an dem Mittelpuncte B_n allgemein $St.(B_n)$, so erhält man diese beiden Werthe aus der Gleichung (464) für $x=0$ und $x=\frac{1}{2}l$, wie folgt:

$$St.(A_n) = (Q+\tfrac{4}{3}\Delta_n)\frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (466)$$

und $$St.(B_n) = -\left[Q-\tfrac{2}{3}(\Delta_n+\Delta_{n+1})\right]\frac{l}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (467).$$

Ueber diese Gleichungen ist zu bemerken:

1. Wie schon im §. 208 angeführt wurde, dürfen im Allgemeinen die erste und letzte Stütze nicht in Betracht kommen. Es ist daher die Anwendung der beiden Gleichungen (466) und (467)) an dieselbe Bedingung geknüpft, wornach einerseits $n>1$, andererseits aber $(n+1)<N$ sein muss. Uebrigens sind die Werthe der statischen Kraftmomente für $n=1$, nämlich für das erste Tragfeld leicht zu bestimmen; denn es ist offenbar das statische Kraftmoment in A_1

$$St.(A_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (468)$$

enes in B_1 aber

$$St.(B_1) = -D_1\frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (469).$$

2. Um die statischen Kraftmomente für den Anfang und die Mitte eines jeden Tragfeldes zu bestimmen, sind in den Formeln (466) und

(467) zunächst die entsprechenden Werthe von n zu substituiren. Man gelangt dabei auf die Differenzen Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc., welche im Sinne der Gleichungen (444) durch die Drücke D_2, D_3, D_4 etc., und diese wieder nach den Gleichungen (439) in bestimmter Weise darzustellen sind. Hiernach findet man

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{für } n = 2 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} St.(A_2) = \left(Q - 2D_1\right)\frac{l}{2} \\ St.(B_2) = -\left(\frac{5}{4}Q - 8D_1\right)\frac{l}{2} \end{array}\right. \\
\text{für } n = 3 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} St.(A_3) = \left(-\frac{5}{2}Q + 8D_1\right)\frac{l}{2} \\ St.(B_3) = -\left(-\frac{7}{2}Q + 11D_1\right)\frac{l}{2} \end{array}\right. \\
\text{für } n = 4 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} St.(A_4) = \left(\frac{21}{2}Q - 30D_1\right)\frac{l}{2} \\ St.(B_4) = -\left(\frac{57}{4}Q - 41D_1\right)\frac{l}{2} \end{array}\right. \\
\text{für } n = 5 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} St.(A_5) = \left(-38Q + 112D_1\right)\frac{l}{2} \\ St.(B_5) = -\left(-52Q + 153D_1\right)\frac{l}{2} \end{array}\right. \\
\text{für } n = 6 \ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} St.(A_6) = \left(143Q - 418D_1\right)\frac{l}{2} \\ St.(B_6) = -\left(\frac{781}{4}Q - 571D_1\right)\frac{l}{2} \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (470),$$

u. s. w.,

wobei übrigens einleuchtet, dass für symmetrisch gelegene Stellen die bezüglichen Werthe einander gleich sein werden.

Für einen besonderen Fall erübrigt jetzt nur mehr, statt D_1 den entsprechenden Werth nach der Gesammtstützenzahl N mit Rücksicht auf den §. 210 zu substituiren. Wäre z. B. der Träger auf fünf Stützen gelagert, so hätte man wegen $N = 5$ nach §. 210 $D_1 = \frac{19}{56}Q$, somit nach den Relationen (468), (469) und (470)

$St.(A_1) = 0$

$St.(B_1) = -\frac{19}{112} Q l$

$St.(A_2) = +\frac{18}{112} Q l$

$St.(B_2) = -\frac{18}{112} Q l$

$St.(A_3) = +\frac{12}{112} Q l$

$St.(B_3) = -\frac{18}{112} Q l$

$St.(A_4) = +\frac{18}{112} Q l$

$St.(B_4) = -\frac{19}{112} Q l$

und $St.(A_5) = 0$.

3. Berechnet man nach dieser Methode die statischen Kraftmomente für die Auflagestellen und für die Mittelpuncte der Tragfelder nach der verschiedenen Stützenzahl N, und stellt die Resultate zusammen, so ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	Werthe der statischen Kraftmomente								
	den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang
	des 1. Tragfeldes		des 2. Tragfeldes		des 3. Tragfeldes		des 4. Tragfeldes		des
	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3	A_4	B_4	A_5
2	0	$-\frac{1}{4}$ 0·2500	0	—	—	—	—	—	—
3	0	$-\frac{5}{32}$ —0·1562	$+\frac{6}{32}$ 0.1875	$-\frac{5}{32}$ —0·1562	0	—	—	—	—
4	0	$-\frac{7}{40}$ —0·1750	$+\frac{6}{40}$ 0·1500	$-\frac{4}{40}$ —0·1000	$+\frac{6}{40}$ 0·1500	$-\frac{7}{40}$ —0·1750	0	—	—
5	0	$-\frac{19}{112}$ —0·1697	$+\frac{18}{112}$ 0·1607	$-\frac{13}{112}$ —0·1160	$+\frac{12}{112}$ 0·1071	$-\frac{13}{112}$ —0·1160	$+\frac{18}{112}$ 0·1607	$-\frac{19}{112}$ —0·1697	0
6	0	$-\frac{26}{152}$ —0·1710	$+\frac{24}{152}$ 0·1579	$-\frac{17}{152}$ —0·1118	$+\frac{18}{152}$ 0·1184	$-\frac{20}{152}$ —0·1316	$+\frac{18}{152}$ 0·1184	$-\frac{17}{152}$ 0·1118	$+\frac{24}{152}$ 0·1579
7	0	$-\frac{71}{416}$ —0·1706	$+\frac{66}{416}$ 0·1586	$-\frac{47}{416}$ —0·1130	$+\frac{48}{416}$ 0·1154	$-\frac{53}{416}$ —0·1274	$+\frac{54}{416}$ 0·1298	$-\frac{53}{416}$ —0·1274	$+\frac{48}{416}$ 0·1154
8	0	$-\frac{97}{568}$ —0·1708	$+\frac{90}{568}$ 0·1585	$-\frac{64}{568}$ —0·1127	$+\frac{66}{568}$ 0·1162	$-\frac{73}{568}$ —0·1285	$+\frac{72}{568}$ 0·1268	$-\frac{70}{568}$ —0·1232	$+\frac{72}{568}$ 0·1268
9	0	$-\frac{265}{1552}$ —0·1708	$+\frac{246}{1552}$ 0·1585	$-\frac{175}{1552}$ —0·1128	$+\frac{180}{1552}$ 0·1160	$-\frac{199}{1552}$ —0·1282	$+\frac{198}{1552}$ 0·1276	$-\frac{193}{1552}$ —0·1243	$+\frac{192}{1552}$ 0·1237
10	0	$-\frac{362}{2120}$ 0·1708	$+\frac{336}{2120}$ 0·1585	$-\frac{239}{2120}$ —0·1128	$+\frac{246}{2120}$ 0·1161	$-\frac{272}{2120}$ —0·1283	$+\frac{270}{2120}$ 0·1274	$-\frac{263}{2120}$ —0·1241	$+\frac{264}{2120}$ 0·1246

Die Fortsetzung dieser Tabelle für $N > 10$ unterliegt keinem Anstande.

4. Die Gleichungen (466) und (467) lassen in Verbindung mit dem §. 212 erkennen, dass das statische Kraftmoment $St.(A_n)$ immer positiv, dabei aber für jede ungerade numerirte Stütze kleiner, für jede gerade numerirte aber grösser als $\frac{1}{8}Ql$ wird, von welchem Werthe sich dasselbe desto weniger unterscheidet, je grösser die Anzahl der Stützen ist, und je weiter die bezügliche Stütze A_n von den Enden des Trägers entfernt liegt. Man hat nämlich

$$St.(A_1) < St.(A_3) < St.(A_5) < \text{etc. und alle} < \tfrac{1}{8}Ql,$$

ferner

$$St.(A_2) > St.(A_4) > St.(A_6) > \text{etc. und alle} > \tfrac{1}{8}Ql,$$

wenn man bei dieser Vergleichung die Mitte des Trägers nicht überschreitet. Eben so ist das statische Kraftmoment $St.(B_n)$ in der Mitte eines (z. B. des n^{ten}) Tragfeldes stets negativ, und numerisch betrachtet für jedes ungerade numerirte Tragfeld grösser, für edes gerade numerirte aber kleiner als $\frac{1}{8}Ql$, von welchem

in Theilen von $Q\,l$ ausgedrückt für									
die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende oder den Anfang	die Mitte	das Ende
5. Tragfeldes	des 6. Tragfeldes		des 7. Tragfeldes		des 8. Tragfeldes		des 9. Tragfeldes		
B_5	A_6	B_6	A_7	B_7	A_8	B_8	A_9	B_9	A_{10}
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$-\frac{26}{152}$ -0.1711	0	—	—	—	—	—	—	—	—
$-\frac{47}{416}$ -0.1130	$+\frac{66}{416}$ 0.1586	$-\frac{71}{416}$ -0.1706	0	—	—	—	—	—	—
$-\frac{73}{568}$ -0.1285	$+\frac{66}{568}$ 0.1162	$-\frac{64}{568}$ -0.1127	$+\frac{90}{568}$ 0.1585	$-\frac{97}{568}$ -0.1708	0	—	—	—	—
$-\frac{193}{1552}$ -0.1243	$+\frac{198}{1552}$ 0.1276	$-\frac{199}{1552}$ -0.1282	$+\frac{180}{1552}$ 0.1160	$-\frac{175}{1552}$ -0.1128	$+\frac{246}{1552}$ 0.1585	$-\frac{265}{1552}$ -0.1708	0	—	—
$-\frac{266}{2120}$ -0.1255	$+\frac{264}{2120}$ 0.1246	$-\frac{263}{2120}$ -0.1241	$+\frac{270}{2120}$ 0.1274	$-\frac{272}{2120}$ -0.1283	$+\frac{246}{2120}$ 0.1161	$-\frac{239}{2120}$ -0.1128	$+\frac{336}{2120}$ 0.1585	$-\frac{362}{2120}$ -0.1708	0

Werthe sich dasselbe desto weniger unterscheidet, je grösser die Zahlen N und n sind. Man hat nämlich, ohne die Mitte des Trägers zu überschreiten, numerisch genommen

$$St.(B_1) > St.(B_3) > St.(B_5) > \text{etc. und alle} > \tfrac{1}{8}\,Q\,l, \text{ ferner}$$
$$St.(B_2) < St.(B_4) < St.(B_6) < \text{etc. und alle} < \tfrac{1}{8}\,Q\,l.$$

Stellt man sich vor, dass N und n ohne Ende zunehmen, so nähern sich die Werthe von $St.(A_n)$ und $St.(B_n)$ fortwährend den Gränzen

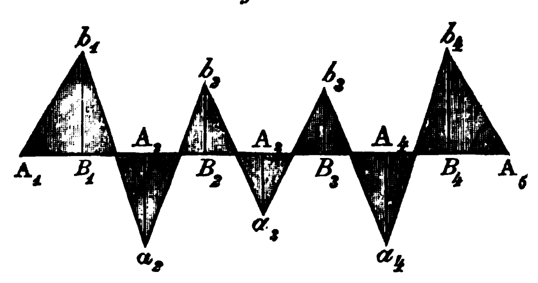
$$\left.\begin{aligned} St.(A_\infty) &= +\tfrac{1}{8}Q\,l \\ \text{und } St.(B_\infty) &= -\tfrac{1}{8}Q\,l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (471).$$

Diese Werthe sind mit jenen gleich, welche die statischen Kraftmomente in dem mit V (Fig. 259) bezeichneten Falle annehmen, was mit den Bemerkungen im §. 213 ad 2 und im §. 214 ad 3 übereinstimmt.

5. Stellt man die statischen Kraftmomente, welche durch die allgemeinen Gleichungen (464) und (465) ausgedrückt sind, im Sinne des §. 127 graphisch dar, so erhält man eine mit der Fig. 172 analoge Zeichnung, welche die Wirkung der Kräfte in jedem ein-

zelnen Puncte der Längenaxe anschaulich macht. Ruhet z. B. der Träger auf fünf Stützen, so hat man bei der Construction dieser Zeichnung (Fig. 267) die Ordinaten in den Stützpuncten

Fig. 267.



A_2, A_3 und A_4 nach abwärts, die in der Mitte der Tragfelder, nämlich in B_1, B_2, B_3 und B_4 aber nach aufwärts zu verzeichnen, auf denselben die entsprechenden Werthe der statischen Kraftmomente nach irgend einem Masstabe aufzutragen, und die so erhaltenen Endpuncte der Ordinaten auf die angezeigte Weise zu verbinden. Hiernach ist in dem gewählten Beispiele

$$\overline{A_2 a_2} : \overline{A_3 a_3} : \overline{A_4 a_4} : \overline{B_1 b_1} : \overline{B_2 b_2} : \overline{B_3 b_3} : \overline{B_4 b_4} =$$
$$18\frac{Ql}{112} : 12\frac{Ql}{112} : 18\frac{Ql}{112} : 19\frac{Ql}{112} : 13\frac{Ql}{112} : 13\frac{Ql}{112} : 19\frac{Ql}{112} =$$
$$18 : 12 : 18 : 19 : 13 : 13 : 19.$$

Die Durchschnittspuncte der Verbindungslinien mit der Längenaxe bezeichnen diejenigen Stellen, wo die Wendepuncte der Biegungscurve liegen.

6. Dem Vorstehenden gemäss hat unter allen positiven Kraftmomenten $St.(A_2)$, und unter allen negativen Kraftmomenten $St.(B_1)$ den g r ö s s t e n n u m e r i s c h e n Werth. Bezeichnet man diese beiden Werthe im Sinne des §. 124 mit $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, und benützt man die für $St.(A_2)$ und $St.(B_1)$ gegebenen Relationen (469) und (470), so folgt, wenn der Kürze halber $\frac{D_1}{Q} = \gamma$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} R_1 z_1 &= (Q - 2D_1)\frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}(1-2\gamma)Ql \\ \text{und } R_2 z_2 &= D_1 \cdot \frac{l}{2} = \tfrac{1}{2}\gamma\, Ql \end{aligned}\right\} \quad . \quad (472).$$

Die betreffenden Werthe nach den verschiedenen Zahlen N sind in der 3. und 4. verticalen Spalte der vorstehenden Tabelle bereits enthalten, nur ist das Zeichen — in der 3. Spalte nicht mehr zu beachten.

Tragvermögen.

§. 216.

Allgemeine Formeln. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt nach Umständen entweder in A_2, wo die zweite Stütze sich befindet, oder in B_1, nämlich in der Mitte des ersten Tragfeldes. Dasselbe gilt auch für die symmetrisch gelegenen Stellen A_{N-1} und B_{N-1}. Bezeichnet man im Sinne des §. 121 das Tragmoment des Querschnittes in A_2 mit M_1 und jenes in B_1 mit M_2, das Tragvermögen eines Tragfeldes aber mit $Max.\,Q$, und berücksichtigt man die Bemerkungen im §. 124, so wie die Gleichungen (472), so hat man allgemein

$$\text{entweder } M_1 = (1-2\gamma)\frac{l}{2}\,.\,Max.\,Q$$

$$\text{oder } M_2 = \frac{\gamma l}{2}\,.\,Max.\,Q,$$

und hieraus

$$Max.\,Q = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{2M_1}{(1-2\gamma)l} \\ \text{oder } \dfrac{2M_2}{\gamma l} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (473).$$

Sind nun 2, 3, 4 etc. Stützen vorhanden, und sucht man der Reihe nach die entsprechenden Tragfähigkeiten per Tragfeld, so erhält man mit Berücksichtigung der correspondirenden Werthe für γ, welche in der 2. verticalen Colonne der Tabelle im §. 211 enthalten sind, folgende besondere Resultate:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{Für } N = 2, \; Max.\,Q = & 4\,.\,\dfrac{M_1}{l} \\[2ex]
\text{„ } N = 3, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{16}{3}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 5{\cdot}3333\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{32}{5}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 6{\cdot}4000\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 4, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{20}{3}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}6667\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{40}{7}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}7143\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 5, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{56}{9}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}2222\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{112}{19}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8947\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 6, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{76}{12}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}3333\,\dfrac{M^1}{l} \\ \text{oder } \frac{76}{13}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8462\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 7, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{208}{33}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}3111\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{416}{71}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8557\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 8, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{284}{45}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}3030\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{568}{97}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8592\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{„ } N = 9, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{776}{123}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}3089\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{1552}{265}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8566\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right. \\[4ex]
\text{für } N = 10, \; Max.\,Q = & \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \frac{1060}{168}\,.\,\dfrac{M_1}{l} = 6{\cdot}3095\,\dfrac{M_1}{l} \\ \text{oder } \frac{1060}{181}\,.\,\dfrac{M_2}{l} = 5{\cdot}8564\,\dfrac{M_2}{l} \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (474).
$$

Von den betreffenden Alternativwerthen ist stets der kleinere zu wählen.

§. 217.

Besondere Eigenschaften.

1. Bei zwei Stützen hat das Tragvermögen nur den Werth $\dfrac{4\,M_2}{l}$, und der gefährliche Querschnitt ist in der Mitte des Trägers vorhanden.

2. Mit der Zunahme der Stützenzahl N nähert sich der Werth des Tragvermögens der Gränze

$$lim.\ Max.\ Q = \begin{cases} \text{entw. } 4\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\frac{M_1}{l} = 6\cdot3094\frac{M_1}{l} \\ \text{oder } 8\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{M_2}{l} = 5\cdot8564\frac{M_2}{l} \end{cases} \quad . \quad (475).$$

3. Ist $M_1 = M_2 = M$, so gelten von den Alternativwerthen jene mit den kleineren numerischen Coefficienten. Der gefährliche Querschnitt liegt sodann für $N=3$ bei der zweiten Stütze, für jede übrige Stützenzahl aber stets in der Mitte des ersten Tragfeldes. Bezeichnet man die Werthe von $Max.\ Q$ mit Zeigern, welche der Stützenzahl N entsprechen, so hat man insbesondere

$Max.\ Q_2 = 4.0000\ \frac{M}{l}$	$Max.\ Q_7 = 5\cdot8557\ \frac{M}{l}$
$Max.\ Q_3 = 5\cdot3333\ \frac{M}{l}$	$Max.\ Q_8 = 5\cdot8592\ \frac{M}{l}$
$Max.\ Q_4 = 5\cdot7143\ \frac{M}{l}$	$Max.\ Q_9 = 5\cdot8566\ \frac{M}{l}$
$Max.\ Q_5 = 5\cdot8947\ \frac{M}{l}$	$Max.\ Q_{10} = 5\cdot8564\ \frac{M}{l}$
$Max.\ Q_6 = 5\cdot8462\ \frac{M}{l}$	$Max.\ Q_\infty = 5\cdot8564\ \frac{M}{l}$.

Wenn daher Träger von einem bestimmten Querschnitte und Materiale auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stets dieselbe Entfernung der Tragstützen gilt, so ist in dem Falle $M_1 = M_2$ (§. 125 ad 1 und 2) das grösste Tragvermögen per Tragfeld für $N=5$, das kleinste hingegen für $N=2$ Stützen vorhanden. Das Verhältniss zwischen den Werthen dieses kleinsten und grössten Tragvermögens ist

$$Max.\ Q_2 : Max.\ Q_5 = 1 : 1\cdot4737.$$

Von diesem alleinigen Standpuncte aus betrachtet, würde es also beispielsweise vortheilhaft sein, den in Fig. 265 auf neun Stützen ruhenden continuirlichen Träger in zwei Hälften zu theilen, und die eine Hälfte auf den Stützen 1, 2, 3, 4 und 5, die andere Hälfte hingegen auf den Stützen 5, 6, 7, 8 und 9 ruhen zu lassen. Das Tragvermögen per Tragfeld würde in diesem Falle in dem Verhältnisse von

$$Max.\ Q_9 : Max.\ Q_5 = 1 : 1\cdot10065$$

gesteigert.

Obwohl dieser Vortheil nur unwesentlich ist, und andere Rücksichten es nicht wünschenswerth erscheinen lassen, den ununterbrochenen Zusammenhang des Trägers zu stören, so bleibt dieses Resultat nichts desto weniger merkwürdig, zumal es eine gewöhnliche Meinung ist, dass bei einer derartigen Vergleichung das Tragvermögen per Tragfeld mit der Zunahme der Stützen wachse.

4. Ist M_1 von M_2 verschieden, so kommt man zu analogen Resultaten. Wäre etwa $M_1 = \mu$ und $M_2 = 2\mu$, also $M_1 : M_2 = 1 : 2$, wie diess z. B. bei einem ⊥förmigen Träger aus Gusseisen sein kann, so hätte man den Gleichungen (474) zufolge, wenn man die Werthe für $Max. Q$ wieder mit Zeigern übereinstimmend mit der Stützenzahl bezeichnet,

$$\begin{array}{ll|ll}
Max.\,Q_2 & = 8 \;.\; \frac{\mu}{l} & Max.\,Q_7 & = 6\cdot3111\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_3 & = 5\cdot3333\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_8 & = 6\cdot3130\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_4 & = 6\cdot6667\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_9 & = 6\cdot3089\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_5 & = 6\cdot2222\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_{10} & = 6\cdot3095\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_6 & = 6\cdot3333\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_{\infty} & = 6\cdot3094\,\frac{\mu}{l}.
\end{array}$$

Jetzt resultirt das grösste Tragvermögen für $N = 2$, das kleinste aber für $N = 3$ Stützen. Das Verhältniss zwischen dem entsprechenden kleinsten und grössten Werthe wird in diesem Falle

$$Max\,Q_3 : Max\,Q_2 = 1 : 1\cdot5.$$

Wäre der vorhin angenommene Querschnitt umgekehrt (⊤), und nunmehr $M_1 = 2\mu$ und $M_2 = \mu$, so werden sich die Resultate verändern. In diesem Falle ist nämlich

$$\begin{array}{ll|ll}
Max.\,Q_2 & = 4 \;.\; \frac{\mu}{l} & Max.\,Q_7 & = 5\cdot8557\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_3 & = 6\cdot4 \;.\; \frac{\mu}{l} & Max.\,Q_8 & = 5\cdot8592\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_4 & = 5\cdot7147\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_9 & = 5\cdot8566\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_5 & = 5\cdot8947\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_{10} & = 5\cdot8564\,\frac{\mu}{l} \\
Max.\,Q_6 & = 5\cdot8462\,\frac{\mu}{l} & Max.\,Q_{\infty} & = 5\cdot8464\,\frac{\mu}{l}
\end{array}$$

Man hat daher in diesem Falle gerade umgekehrt das grösste Tragvermögen per Tragfeld für $N = 3$, und das kleinste für

$N = 2$ Stützen. Auch wird das Verhältniss zwischen dem kleinsten und dem grössten Werthe ein anderes, nämlich

$$Max. Q_2 : Max. Q_3 = 1 : 1{\cdot}6.$$

5. Die grösste zulässige Biegung im ersten (und letzten) Tragfelde lässt sich in den verschiedenen Fällen durch Combinirung der betreffenden Werthe aus den Gleichungen (463) und (474) ohne Anstand bestimmen.

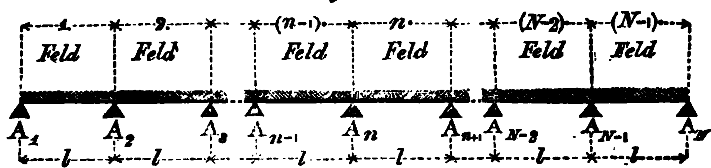
Achtes Kapitel.

Widerstand eines auf mehreren gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhenden Trägers, wenn derselbe seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist.

§. 218.

Annahmen. In Uebereinstimmung mit dem Inhalte des §. 205 werde in diesem Kapitel ein auf N gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhender Träger (Fig. 268) betrachtet, von welchem

Fig 268.



jedes Tragfeld die der Länge nach gleichförmig vertheilte Belastung Q zu tragen hat. Man setze analog, wie im §. 206 die Entfernung der Stützen von einander . . . . $= l$,

das Biegungsmoment nach §. 53 . . . . $= mt$,

betrachte die Längenaxe des Trägers als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, bei welchem die positiven Abscissen von A_1 gegen A_N, die positiven Ordinaten hingegen nach abwärts gezählt werden,

bezeichne ferner die Drücke auf die Stützen mit . . . . D,

die Biegungen in der Mitte zwischen denselben mit . . . δ

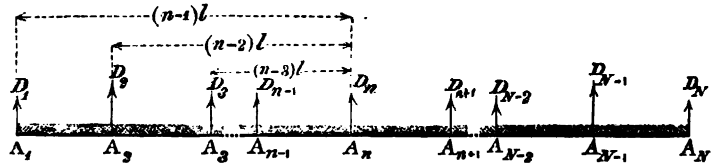
und die Winkel, welche die Tangenten der Biegungscurve an den Stützpuncten mit dem Horizonte bilden, mit . . . φ,

diese 3 Buchstaben aber noch mit den entsprechenden Zeigern, so dass wieder D_n den Druck auf die n^{te} Stütze, φ_n den Winkel zwischen der Tangente und dem Horizonte daselbst, und δ_n die Biegung in der Mitte des n^{ten} Tragfeldes vorstellt.

§. 219.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Zur Erlangung der Kenntniss von den Bedingungen des Gleichgewichtes bei dem Träger denke man sich (Fig. 269) seine Stützen weggenommen, und an

Fig. 269.



deren Statt Kräfte angebracht, welche gleich und entgegengesetzt den Drücken auf jene Stützen sind. Hiernach muss vor Allem, wie im §. 207, die Relation

$$\Sigma D_N = (N-1)Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (476)$$

vorhanden sein.

Fig. 270.

Sogleich auf die Betrachtung der Biegungscurve in einem beliebigen Tragfelde $A_n A_{n+1}$ übergehend, sei der Coordinatenursprung in A_n, und für irgend einen Punct M des betreffenden Curventheils (Fig. 270) die Abscisse $\overline{A_n M'} = x$ und die Ordinate $\overline{MM'} = y$. Das statische Kraftmoment in Beziehung auf die gewählte Stelle M ist nach den Fig. 269 und 270

$$\frac{1}{2}\overline{A_1 M'}^2 \cdot \frac{Q}{l} - [D_1 . \overline{A_1 M'} + D_2 . \overline{A_2 M'} + \ldots + D_n . \overline{A_n M'}] =$$

$$= \frac{1}{2}[(n-1)l + x]^2 \frac{Q}{l} - \Big[D_n x + D_{n-1}(l+x) + \ldots$$

$$\ldots + [(n-1)l + x]D_1\Big] =$$

$$= \Big[(n-1)^2 Q - 2[D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1]\Big]\frac{l}{2} +$$

$$+ [(n-1)Q - \Sigma D_n]x + \frac{1}{2}\frac{Q}{l}x^2,$$

wenn man die Reduction auf ähnliche Weise, wie im §. 207, vornimmt.

Man hat jetzt nach der Normalgleichung (47)

$$mt\frac{d^2y}{dx^2}=\Big[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\Big]\frac{l}{2}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]x+\tfrac{1}{2}\frac{Qx^2}{l}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(477)$$

und durch zweimalige Integration

$$mt\frac{dy}{dx}=mt\,tg\,\varphi_n+$$
$$+\Big[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\Big]\frac{lx}{2}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]\frac{x^2}{2}+\tfrac{1}{6}\frac{Qx^3}{l}\quad.\quad.\quad(478),$$

so wie

$$mt\;y=mt\,tg\,\varphi_n x+$$
$$+\Big[(n-1)^2Q-2[D_{n-1}+2D_{n-2}+\ldots+(n-1)D_1]\Big]\frac{lx^2}{4}+$$
$$+[(n-1)Q-\Sigma D_n]\frac{x^3}{6}+\frac{Qx^4}{24l}\quad.\quad.\quad.\quad(479).$$

Bei diesen Integrationen ist zu beachten, dass für den Punct A_n gleichzeitig $x=o$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\varphi_n$ und $y=o$ werden muss. Nachdem aber auch für den Punct A_{n+1} die gleichzeitigen Werthe $x=l$, $\frac{dy}{dx}=tg\,\varphi_{n+1}$ und $y=o$ existiren, so erhält man noch aus den Gleichungen (478) und (479)

$$\frac{4mt}{l^2}\,tg\,\varphi_{n+1}=\frac{4mt}{l^2}\,tg\,\varphi_n+\tfrac{2}{3}(3n^2-3n+1)Q-$$
$$-2[D_n+3D_{n-1}+5D_{n-2}+\ldots+(2n-1)D_1]\quad.\quad(480)$$

und

$$\frac{4mt}{l^2}\,tg\,\varphi_n=\tfrac{1}{6}(-3+8n-6n^2)Q+$$
$$+\tfrac{2}{3}[D_n+4D_{n-1}+7D_{n-2}+\ldots+(3n-2)D_1]\quad.\quad(481).$$

Endlich folgt die Biegung δ_n in der Mitte des Tragfeldes aus der Gleichung (479) für $x=\frac{1}{2}l$, welche in diesem Falle übergeht in

$$mt\,\delta_n=\tfrac{1}{2}mt\,tg\,\varphi_n l+$$
$$+\tfrac{1}{48}[(n-1)(3n-2)Q-D_n-7D_{n-1}-13D_{n-2}-\ldots$$
$$\ldots-(6n-5)D_1]l^3+\frac{Ql^3}{384}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(482).$$

Wird der Werth von $\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_n$ aus der Gleichung (481) in die Gleichung (480) gesetzt, so findet man nach gehöriger Reduction

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_{n+1} = \tfrac{1}{6}(1 - 4n + 6n^2)\,Q - \\ - \tfrac{2}{3}[2D_n + 5D_{n-1} + 8D_{n-2} + \ldots + (3n-1)D_1]\,. \quad (483)$$

und wird jetzt in der Gleichung (481) $(n+1)$ statt n gesetzt, so hat man überdiess

$$\frac{4mt}{l^3} tg\,\varphi_{n+1} = -\tfrac{1}{6}(1 + 4n + 6n^2)\,Q + \\ + \tfrac{2}{3}[D_{n+1} + 4D_n + 7D_{n-1} + \ldots + (3n+1)D_1]\,. \quad (484).$$

Die Relationen (483) und (484) mit einander verglichen, führen endlich auf die wichtige Bedingungsgleichung

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(1+6n^2)\,Q - 6(D_n + 2D_{n-1} + 3D_{n-2} + \ldots + nD_1) \quad (485).$$

Von den Drücken auf die Stützen.

§. 220.

Abhängigkeit der Drücke unter einander. Die Gleichung (485) lehrt, wie man den Druck auf die $(n+1)^{te}$ Stütze finden kann, wenn man den Druck auf jede vorhergehende Stütze kennt. Ist, wie vorausgesetzt, N die Anzahl der Stützen, so kann eben so, wie im §. 208, der Zeiger n von 1 bis $(N-2)$ variiren, darf jedoch diese Gränzen nicht überschreiten. Führt man diese Substitution durch, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
D_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots = \tfrac{7}{2}\,Q - 6D_1\,,\\
D_3 &= \tfrac{25}{2}Q - 6(D_2 + 2D_1) \;\ldots = -\tfrac{17}{2}\,Q + 24D_1\,,\\
D_4 &= \tfrac{55}{2}Q - 6(D_3 + 2D_2 + 3D_1) \;. = \tfrac{73}{2}\,Q - 90D_1\,,\\
D_5 &= \tfrac{97}{2}Q - 6(D_4 + 2D_3 + 3D_2 + 4D_1) = -\tfrac{263}{2}\,Q + 336D_1\,,\\
D_6 &= \tfrac{151}{2}Q - 6(D_5 + 2D_4 + 3D_3 + \\
&\qquad + 4D_2 + 5D_1) = \tfrac{991}{2}\,Q - 1254D_1\,,\\
&\text{u. s. w., so dass allgemein}\\
D_{n+1} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = a_n Q + b_n D_1\;{}^{*)}\\
D_{N-1} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = a_{N-2}\,Q + b_{N-2}\,D_1
\end{aligned}\right\} (486)$$

gesetzt werden kann, wenn a und b mit den betreffenden Zeigern die Coefficienten von Q und D_1 bezeichnen. Uebrigens finden die Schluss-

---

*) Anmerkung. Wegen der Statthaftigkeit dieser Form siehe die Anmerkung zum §. 208.

bemerkungen im §. 208, so wie die dort vorkommenden Gleichungen (440) und (441) auch hier Anwendung.

§. 221.

Besondere Relation zwischen den Drücken auf drei unmittelbar auf einander folgende Stützen. Wird in der Gleichung (485)

$$D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(1 + 6\,n^2)\,Q - 6\,(D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1)$$

$(n-1)$ statt n gesetzt, und von ihr der auf diese Weise entstehende Ausdruck

$$D_n = \tfrac{1}{2}[1 + 6(n-1)^2]\,Q - 6\,[D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1]$$

abgezogen, so ergibt sich als Differenz die Gleichung

$$(D_{n+1} - D_n) = 3\,(2\,n - 1)\,Q - 6\,\Sigma D_n.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der im §. 209 gefundenen. Verfährt man mit ihr eben so, wie im erwähnten §., so findet man wieder die Normalgleichung (442), nämlich:

$$D_{n+1} + 4\,D_n + D_{n-1} = 6\,Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (487).$$

Es besteht daher zwischen den Werthen von drei aufeinander folgenden Drücken D_{n-1}, D_n und D_{n+1} das gleiche Gesetz, ob man den Fall des gegenwärtigen oder jenen des vorhergehenden Kapitels betrachtet; was jedenfalls merkwürdig ist.

Die am Schlusse des §. 209 erwähnte Beschränkung für die Anwendung der besagten Normalgleichung ist selbstverständlich auch hier giltig.

§. 222.

Bestimmung des Druckes D_1 auf die erste Stütze. Nach den Gleichungen (486) lassen sich sämmtliche Drücke als Functionen des Druckes auf die erste Stütze darstellen. Es ist daher wichtig, diesen Druck D_1 kennen zu lernen. Zur Bestimmung desselben kann man wieder dieselben zwei Methoden anwenden, welche im §. 210 erörtert worden sind.

I. Methode. Man stelle die einzelnen Werthe der Drücke D_2, D_3, D_4 etc. für die erste Hälfte des Trägers, einschliesslich der

etwa vorhandenen Mittelstütze, nach den Gleichungen (486) dar. Hiernach erhält man aufeinanderfolgend

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \tfrac{7}{2}\,Q - 6\,D_1,\\
D_3 &= -\tfrac{17}{2}\,Q + 24\,D_1,\\
D_4 &= \tfrac{73}{2}\,Q - 90\,D_1,\\
D_5 &= -\tfrac{263}{2}\,Q + 336\,D_1,\\
D_6 &= \tfrac{991}{2}\,Q - 1254\,D_1,\\
D_7 &= -\tfrac{3689}{2}\,Q + 4680\,D_1,\\
D_8 &= \tfrac{13777}{2}\,Q - 17466\,D_1,\\
D_9 &= -\tfrac{51407}{2}\,Q + 65184\,D_1,\\
D_{10} &= \tfrac{191863}{2}\,Q - 243270\,D_1 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Das weitere Verfahren ist wie im §. 210. Sei z. B. $N=8$, so findet man

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \ldots\ldots\ D_1,\\
D_2 &= \tfrac{7}{2}\,Q - 6\,D_1,\\
D_3 &= -\tfrac{17}{2}\,Q + 24\,D_1,\\
D_4 &= \tfrac{73}{2}\,Q - 90\,D_1,
\end{aligned}
$$

$$\Sigma D_8 = 2(D_1+D_2+D_3+D_4) = 63\,Q - 142\,D_1 = (N-1)Q = 7Q,$$

und hieraus

$$D_1 = \tfrac{56}{142}\,Q = \tfrac{28}{71}\,Q.$$

Berechnet man auf diese Weise den Druck auf die erste Stütze für Träger, welche auf 2, 3, 4, etc. Stützen ruhen, so erhält man

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{für } N = 2, \ldots D_1 = \tfrac{1}{2}\,Q \ldots = 0{\cdot}5000\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 3, \ldots D_1 = \tfrac{3}{8}\,Q \ldots = 0{\cdot}3750\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 4, \ldots D_1 = \tfrac{4}{10}\,Q \ldots = 0{\cdot}4000\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 5, \ldots D_1 = \tfrac{11}{28}\,Q \ldots = 0{\cdot}3929\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 6, \ldots D_1 = \tfrac{15}{38}\,Q \ldots = 0{\cdot}3947\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 7, \ldots D_1 = \tfrac{41}{104}\,Q \ldots = 0{\cdot}3942\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 8, \ldots D_1 = \tfrac{56}{142}\,Q \ldots = 0{\cdot}3944\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 9, \ldots D_1 = \tfrac{153}{388}\,Q \ldots = 0{\cdot}3943\,.\,Q,\\
&\text{„ } N = 10, \ldots D_1 = \tfrac{209}{530}\,Q \ldots = 0{\cdot}3943\,.\,Q,
\end{aligned}
\right\}\ (488).
$$

u. s. w.

II. Methode. Man setze die ebenfalls aus den Gleichungen (486) entwickelten Werthe der Drücke auf zwei symmetrisch gelegene Stützen einander gleich, und bestimme aus der so ent-

stehenden Gleichung die Unbekannte D_1. Nur müssen dabei die Endstützen ausser Betracht bleiben. Hat man z. B. wieder $N = 8$, so ist wegen der bemerkten Symmetrie $D_2 = D_7$, $D_3 = D_6$ und $D_4 = D_5$, sonach mit Rücksicht auf die Werthe unter (486)

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{2}\,Q - 6\,D_1 &= -\tfrac{3689}{2}\,Q + 4680\,D_1, \\ -\tfrac{17}{2}\,Q + 24\,D_1 &= \tfrac{991}{2}\,Q - 1254\,D_1 \text{ und} \\ \tfrac{73}{2}\,Q - 90\,D_1 &= -\tfrac{263}{2}\,Q + 336\,D_1. \end{aligned}$$

Aus jeder dieser drei Gleichungen folgt übereinstimmend

$$D_1 = \tfrac{28}{71}\,Q.$$

Es ist übrigens nur nothwendig, eine einzige Gleichung aufzustellen und aufzulösen.

Berechnet man nach dieser Methode den Druck D_1 für Träger, welche auf mehr als drei Stützen ruhen, so findet man ebenfalls die Resultate (488).

§. 223.

Bestimmung der Drücke auf die übrigen Stützen. Hat man den Druck D_1 auf die erste Stütze gefunden, so können die übrigen Drücke nach den Gleichungen (486) und (487) leicht gefunden werden. Ist z. B. der Träger auf acht Stützen gelagert, so hat man wegen $N = 8$

nach §. 222 . . .	$D_1 = \ldots\ldots$	$= \frac{56}{142}\,Q = 0{\cdot}3944\,.\,Q,$
nach den Gleichungen (486)	$D_2 = \frac{7}{2}\,Q - 6\,D_1$	$= \frac{161}{142}\,Q = 1{\cdot}1338\,.\,Q,$
	$D_3 = -\frac{17}{2}\,Q + 24\,D_1$	$= \frac{137}{142}\,Q = 0{\cdot}9648\,.\,Q,$
nach d. Gleich. (487)	$D_4 = 6Q - 4D_3 - D_2$	$= \frac{143}{142}\,Q = 1{\cdot}0070\,.\,Q,$
nach den Gleichungen (440)	$D_5 = D_4 \ldots\ldots$	$= \frac{143}{142}\,Q = 1{\cdot}0070\,.\,Q,$
	$D_6 = D_3 \ldots\ldots$	$= \frac{137}{142}\,Q = 0{\cdot}9648\,.\,Q,$
	$D_7 = D_2 \ldots\ldots$	$= \frac{161}{142}\,Q = 1{\cdot}1338\,.\,Q,$
	$D_8 = D_1 \ldots\ldots$	$= \frac{56}{142}\,Q = 0{\cdot}3944\,.\,Q,$
also übereinstimmend mit der Gleichung (476)	$\Sigma D_8 =$	$7\,Q.$

Bestimmt man auf diese Weise die Drücke auf die Stützen für Träger, welche auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stellt man die Resultate zusammen, so erhält man folgende Tabelle:

Anzahl der Stützen N	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$	$\frac{D_{10}}{Q}$
2	$\frac{1}{2}$ 0·5000	$\frac{1}{2}$ 0·5000	—	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{3}{8}$ 0·3750	$\frac{10}{8}$ 1·2500	$\frac{3}{8}$ 0·3750	—	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{4}{10}$ 0·4000	$\frac{11}{10}$ 1·1000	$\frac{11}{10}$ 1·1000	$\frac{4}{10}$ 0·4000	—	—	—	—	—	—
5 *)	$\frac{11}{28}$ 0·3929	$\frac{32}{28}$ 1·1428	$\frac{26}{28}$ 0·9286	$\frac{32}{28}$ 1·1428	$\frac{11}{28}$ 0·3929	—	—	—	—	—
6	$\frac{15}{38}$ 0·3947	$\frac{43}{38}$ 1·1316	$\frac{37}{38}$ 0·9737	$\frac{37}{38}$ 0·9737	$\frac{43}{38}$ 1·1316	$\frac{15}{38}$ 0·3947	—	—	—	—
7	$\frac{41}{104}$ 0·3942	$\frac{118}{104}$ 1·1346	$\frac{100}{104}$ 0·9616	$\frac{106}{104}$ 1·0192	$\frac{100}{104}$ 0·9616	$\frac{118}{104}$ 1·1346	$\frac{41}{104}$ 0·3942	—	—	—
8	$\frac{56}{142}$ 0·3944	$\frac{161}{142}$ 1·1338	$\frac{137}{142}$ 0·9648	$\frac{143}{142}$ 1·0070	$\frac{143}{142}$ 1·0070	$\frac{137}{142}$ 0·9648	$\frac{161}{142}$ 1·1338	$\frac{56}{142}$ 0·3944	—	—
9	$\frac{153}{388}$ 0.3943	$\frac{440}{388}$ 1·1340	$\frac{374}{388}$ 0·9639	$\frac{392}{388}$ 1·0103	$\frac{386}{388}$ 0·9949	$\frac{392}{388}$ 1·0103	$\frac{374}{388}$ 0·9639	$\frac{440}{388}$ 1·1340	$\frac{153}{388}$ 0·3943	—
10	$\frac{209}{530}$ 0·3943	$\frac{601}{580}$ 1·1340	$\frac{511}{530}$ 0·9642	$\frac{535}{530}$ 1·0094	$\frac{529}{530}$ 0·9981	$\frac{529}{530}$ 0·9981	$\frac{535}{530}$ 1·0094	$\frac{511}{530}$ 0·9642	$\frac{601}{530}$ 1·1340	$\frac{209}{530}$ 0·3943

*) Anmerkung. Der Uebersetzer des Navier'schen Werkes „Mechanik der Baukunst“ hat in seinen Zusätzen

Der Gebrauch dieser Tabelle ist klar, übrigens analog jenem der Tabelle im §. 211.

Auf eine zweckmässige Weise kann man sich die Drücke auf die Stützen mittelst der Figur 271 (Seite 404) anschaulich machen. Daselbst sind nämlich die auf 2, 3, 4,... Stützen gelagerten Träger verzeichnet, und bei jeder Stütze ist der Druck, den sie zu erleiden hat, darüber geschrieben.

Auch können diese Drücke als nach aufwärts wirkende Kräfte in graphischer Weise mittelst Linien dargestellt werden, deren Längen der Intensität jener Drücke proportional sind.

§. 224.

Besondere Eigenschaften der Drücke. Die besonderen Eigenschaften der Drücke, welche im §. 212 für den im 7. Kapitel angenommenen Fall abgeleitet worden sind, haben der Hauptsache nach auch im gegenwärtigen Falle zu gelten. Man bemerkt nämlich, dass die dort erwähnten Eigenschaften sich in der Wesenheit auf die Existenz der Normalgleichung (442) gründen, welche zeuge der Relation (487) auch in dem Falle des gegenwärtigen Kapitels vorhanden ist. Behält man daher die im §. 212 eingeführten Differenzen Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. zwischen den Drücken und den Belastungsgewichten Q bei, so können die in dem erwähnten §. unter 1, 2 und 3 angegebenen Eigenschaften unverändert hierher übertragen werden. Nur hinsichtlich der vierten Eigenschaft ergibt sich in so ferne eine Veränderung, als die Gränzwerthe für

---

unter andern angeführt, dass im Notizenblatte des Architekten-Vereines zu Berlin (Nr. 25 und 26 ex 1845) für den Fall $N = 5$ folgende Resultate angegeben sind:

$$D_1 = \tfrac{11}{112} P,\ D_2 = \tfrac{1}{21} P,\ D_3 = \tfrac{103}{168} P,\ D_4 = D_2 \text{ und } D_5 = D_1,$$

wenn P die Totalbelastung (also nach obiger Bezeichnung $= 4\,Q$) vorstellt. Die Werthe für D_2, D_3 und D_4 stimmen mit den diessfälligen in der vorigen Tabelle nicht überein, und können schon aus dem einfachen Grunde nicht richtig sein, weil die Summe aller Drücke nicht der Totalbelastung gleich ist. Nur die Drücke D_1 und D_5 sind dort richtig angegeben, denn es ist $D_1 = D_5 = \frac{11}{112} P = \frac{11}{28} Q$.

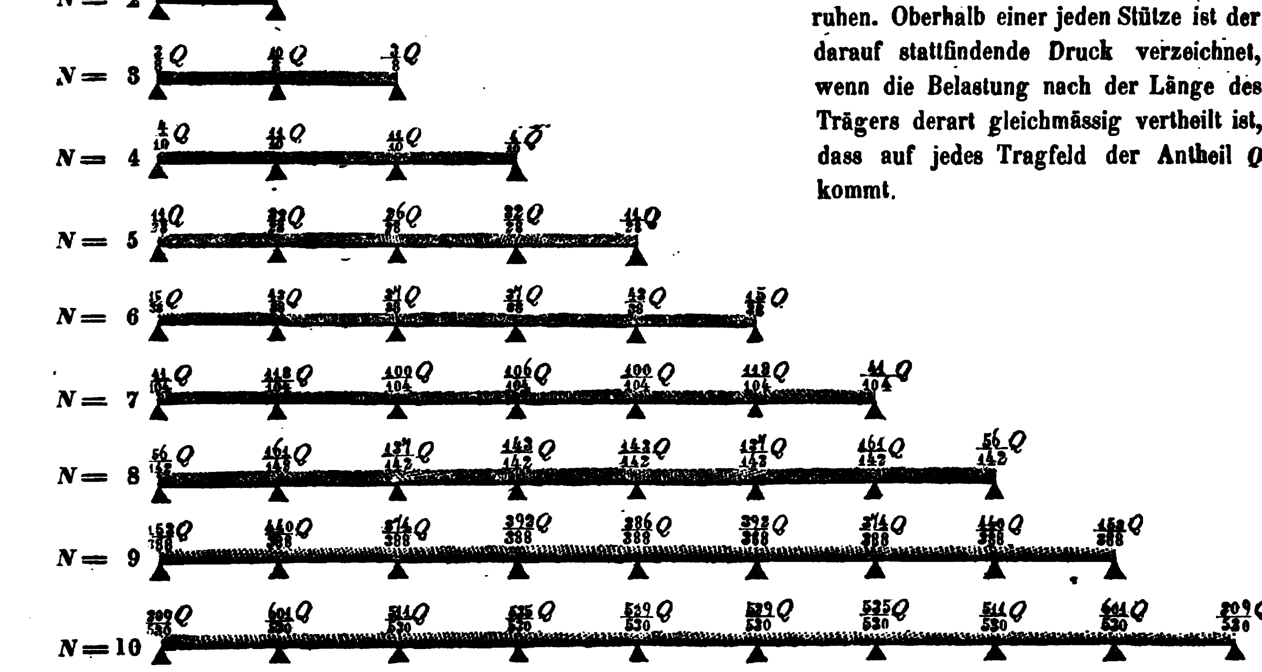


Fig. 271.

Nebige Figur bezieht sich auf Träger, welche auf 2, 3, 4, ... 10 gleich weit von einander abstehenden Stützen ruhen. Oberhalb einer jeden Stütze ist der darauf stattfindende Druck verzeichnet, wenn die Belastung nach der Länge des Trägers derart gleichmässig vertheilt ist, dass auf jedes Tragfeld der Antheil Q kommt.

die einzelnen Drücke bei dem fortwährenden Wachsen von N anders ausfallen. Man hat nämlich nach den Gleichungen (486)

$$D_2 = \frac{7}{2}Q - 6D_1$$
$$\text{und } D_3 = -\frac{17}{2}Q + 24D_1,$$

ferner nach den Gleichungen (444)

$$\Delta_2 = D_2 - Q = \frac{5}{2}Q - 6D_1$$
$$\text{und } \Delta_3 = D_3 - Q = -\frac{19}{2}Q + 24D_1,$$

somit

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-19Q + 48D_1}{5Q - 12D_1},$$

und sofort

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{-19Q + 48\,lim\,D_1}{5Q - 12\,lim.\,D_1}.$$

Uebereinstimmend mit der Gleichung (451) ist ferner

$$lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = q = (-2 + \sqrt{3}).$$

Werden die beiden für $lim.\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right)$ gefundenen Werthe einander gleich gesetzt, und sodann die erscheinende Unbekannte $lim.\,D_1$ bestimmt, so erhält man

$$lim.\,D_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{19 + 5q}{4 + q}\right)Q = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right)Q = 0\cdot394338\,.\,Q \quad (489).$$

Bei der gleichförmig vertheilten Belastung nähert sich daher der Druck D_1 auf die erste Stütze desto mehr dem Werthe $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right)Q = 0\cdot394338\,.\,Q$, je grösser die Anzahl der Stützen ist.

Da den Gleichungen (486) gemäss die übrigen Drücke D_2, D_3, D_4 etc, von dem ersten Drucke abhängen, so findet man leicht auch die Gränzwerthe für diese übrigen Drücke, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
lim. D_2 &= 1\cdot133975 \,.\, Q \\
lim. D_3 &= 0.964102 \,.\, Q \\
lim. D_4 &= 1\cdot009619 \,.\, Q \\
lim. D_5 &= 0\cdot997423 \,.\, Q \\
lim. D_6 &= 1.000691 \,.\, Q \\
lim. D_7 &= 0\cdot999815 \,.\, Q \\
lim. D_8 &= 1\cdot000049 \,.\, Q \\
lim. D_9 &= 0\cdot999987 \,.\, Q \\
lim. D_{10} &= 1\cdot000003 \,.\, Q \\
lim. D_{11} &= 0\cdot999999 \,.\, Q
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (490).$$

Alle hier erörterten Eigenschaften findet man bei der Betrachtung der im §. 223 erscheinenden Tabelle in der That vorhanden.

Biegung.

§. 225.

Form der Biegungscurve. Die Form der Biegungscurve ist aus der Gleichung (479) zu beurtheilen, welche nunmehr bestimmt erscheint, weil die darin anfänglich unbekannt gewesenen Werthe von $tg\,\varphi_n$ und von den Drücken mit Rücksicht auf die Gleichungen (481) und den §. 223 bereits bekannt sind. Insbesondere wird der Werth von $tg\,\varphi_n$ die Curvenform anschaulich machen, weil er die Richtung der Tangente an jedem Stützpuncte angibt. Um diese tangentielle Richtung näher zu untersuchen, bemerke man, dass zunächst aus der Gleichung (480)

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) =$$
$$= \tfrac{2}{3}(3n^2 - 3n + 1)\,Q - 2\,[D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)\,D_1]$$

folgt. Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern

$$D_n + 3\,D_{n-1} + 5\,D_{n-2} + \ldots + (2\,n - 1)\,D_1 =$$
$$= [D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1] +$$
$$+ [D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + 3\,D_{n-3} + \ldots + (n-1)\,D_1],$$

und nach der Gleichung (485)

$$D_n + 2\,D_{n-1} + 3\,D_{n-2} + \ldots + n\,D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{12}(1 + 6\,n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,D_{n+1},$$

daher, wenn man $(n - 1)$ mit n verwechselt,

$$D_{n-1} + 2D_{n-2} + 3D_{n-3} + \ldots + (n-1)D_1 =$$
$$= \tfrac{1}{12}(7 - 12n + 6n^2)Q - \tfrac{1}{6}D_n,$$

wornach man findet:

$$D_n + 3D_{n-1} + 5D_{n-2} + \ldots + (2n-1)D_1 =$$
$$= \left(\frac{2 - 3n + 3n^2}{3}\right)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n+1} + D_n).$$

Benützt man dieses Resultat, und nimmt man unter Einem auf die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} Rücksicht, so geht die obige Gleichung über in:

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} - tg\,\varphi_n) = -\tfrac{2}{3}Q + \tfrac{1}{3}(D_n + D_{n+1}) = \tfrac{1}{3}(\Delta_n + \Delta_{n+1}) \quad (491).$$

Eine zweite Relation zwischen $tg\,\varphi_{n+1}$ und $tg\,\varphi_n$ erhält man durch Addition der Gleichungen (481) und (483). Dadurch wird

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{3}(2n - 1)Q - \tfrac{2}{3}(D_n + D_{n-1} + \ldots + D_1).$$

Es ist aber der Ausdruck in den letzten Klammern, nämlich ΣD_n, dem §. 221 gemäss

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2n - 1)Q - \tfrac{1}{6}(D_{n+1} - D_n),$$

somit nach Benützung dieses Werthes

$$\frac{4mt}{l^2}(tg\,\varphi_{n+1} + tg\,\varphi_n) = \tfrac{1}{9}(D_{n+1} - D_n) = \tfrac{1}{9}(\Delta_{n+1} - \Delta_n) \quad . \quad (492).$$

Die Combinirung der Gleichungen (491) und (492) ergibt nunmehr ganz einfach

$$tg\,\varphi_n = -(2\Delta_n + \Delta_{n+1})\frac{l^2}{36mt} = -\Delta_n\left(2 + \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)\frac{l^2}{36mt} \quad . \quad (493).$$

Es ist bemerkenswerth, dass die obigen Gleichungen (491), (492) und (493) mit den im 7. Kapitel gefundenen (454), (455) und (456) gleichförmig sind.

Die Biegungscurve besitzt daher der Hauptsache nach dieselben Eigenschaften, welche im §. 218 bezüglich des dort untersuchten Falles erörtert wurden. Hiernach befindet sich das Tragfeld zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} desto mehr in dem mit VI (Fig. 259) bezeichneten Falle, je weiter diese Stützen von den Trägerenden entfernt liegen. Auch findet die grösste Neigung der Tangenten bei

der ersten Stütze statt, und ihre Grösse ergibt sich aus der Gleichung

$$tg\,\varphi_1 = (4\,D_1 - Q)\,\frac{l^2}{24\,m\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (494),$$

welche nämlich für $n=1$ aus der Gleichung (481) folgt. [Die Gleichung (493) ist hier nicht anzuwenden.] Insbesondere findet man nach jener Gleichung für verschiedene N, wenn man unter Einem die entsprechenden Werthe von D_1 nach §. 222 und nach Gleichung (489) substituirt, und zwar für

$$\left.\begin{array}{llll}
N = 2 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 1\cdot0000\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 3 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{1}{2}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5000\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 4 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{3}{5}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot6000\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 5 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{4}{7}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5714\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 6 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{11}{19}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0.5789\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 7 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{15}{26}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5769\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 8 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{41}{71}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5775\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 9 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{56}{97}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5773\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
N = 10 \ldots\ldots & tg\,\varphi_1 = & \frac{153}{265}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5774\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
N = \infty, & tg\,\varphi_1 = & \frac{1}{3}\sqrt{3}\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t} & = 0\cdot5774\,.\,\frac{Q\,l^2}{24\,m\,t}
\end{array}\right\} \quad (495).$$

Der Werth für $N=2$ stimmt mit der Gleichung (78) überein. Auch ist unter sonst gleichen Umständen die kleinste Neigung der Tangente für $N=3$ Stützen in A_1 vorhanden und die numerischen Coefficienten von $\frac{Q\,l^2}{m\,t}$ betragen der Reihe nach zwei Drittel von jenen, welche man aus demselben Grunde im 7. Kapitel unter (458) zusammengestellt hat.

§. 226.

Biegung in der Mitte der Tragfelder. Der Werth dieser Biegung (δ_n) folgt aus der Gleichung (482)

$$mt\,\delta_n = \tfrac{1}{2}\,mt\,tg\,\varphi_n\,l + \tfrac{1}{48}\left[(n-1)(3n-2)\,Q - D_n - 7\,D_{n-1} - \right.$$
$$\left. - 13\,D_{n-2} - \ldots - (6n-5)\,D_1\right] l^3 + \frac{Q\,l^4}{384}.$$

Es ist aber, wie im §. 214,

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6\,n-5)\,D_1 =$$
$$= [D_n + D_{n-1} + D_{n-2} + \ldots + D_1] +$$
$$+ 6\,[D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1],$$

ferner nach dem vorigen §.

$$\Sigma D_n = \tfrac{1}{2}(2\,n-1)\,Q - \tfrac{1}{6}(\Delta_{n+1} - \Delta_n), \text{ und}$$
$$D_{n-1} + 2\,D_{n-2} + \ldots + (n-1)\,D_1 = \tfrac{1}{12}(5 - 12n + 6n^2)\,Q - \tfrac{1}{6}\,\Delta_n,$$

somit

$$D_n + 7\,D_{n-1} + 13\,D_{n-2} + \ldots + (6\,n-5)\,D_1 =$$
$$= (2 - 5n + 3\,n^2)\,Q - \left(\frac{\Delta_{n+1} + 5\,\Delta_n}{6}\right).$$

Substituirt man diesen Werth, so wie jenen aus der Gleichung (493) für $tg\,\varphi_n$ in die obige Relation für δ_n, so reducirt sich dieselbe auf:

$$\delta_n = [Q - 4\,(\Delta_n + \Delta_{n+1})]\,\frac{l^4}{384\,mt} \quad . \quad . \quad . \quad (496).$$

Hieraus kann, wenn bei der Betrachtung die Mitte des Trägers nicht überschritten wird, Folgendes geschlossen werden:

1. Aus derselben Ursache, wie im §. 214, ist die Biegung in den ungerade numerirten Tragfeldern grösser, in den gerade numerirten aber kleiner als $\dfrac{Q\,l^4}{384\,mt}$.

2. Von diesem Werthe werden sich die Biegungen desto weniger entfernen, je weiter die betreffenden Tragfelder von den Enden des Trägers entfernt sind.

Man hat nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 > \delta_3 > \delta_5 > \ldots \text{ und alle } > \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \\ \text{ferner} \\ \delta_2 > \delta_4 > \delta_6 > \ldots \text{ und alle } < \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \\ \text{endlich} \\ \delta_1 > \delta_2 < \delta_3 > \delta_4 < \delta_5 > \delta_6 < \text{etc.} \ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (497).$$

Dieses Verhalten ist analog mit jenem, welches sich auf den Fall im 7. Kapitel bezieht.

3. Würden die Zahlen N und n ohne Ende wachsen, daher in Gemässheit des §. 224 die Differenzen Δ_n und Δ_{n+1} ohne Ende abnehmen, so wäre der Gränzwerth, welchem sich δ_n fortwährend nähert

$$\delta_\infty = \frac{Q\,l^3}{384\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (498),$$

also eben so gross, wie der Werth in der Formel (412) für den im §. 203 mit VI bezeichneten Fall. In der That muss dieses Resultat zum Vorschein kommen, weil nach Inhalt des vorhergehenden §. bei dem unendlichen Wachsen von N und n das Tragfeld in einem Zustande anzunehmen ist, welcher sich jenem des Falles VI ohne Ende nähert.

4. Nach Punct 2 befindet sich von allen Biegungen, die in der Mitte der Tragfelder stattfinden, die grösste in dem ersten und selbstverständlich auch in dem letzten Tragfelde. Diese besondere Biegung erhält man für $n = 1$ aus der Gleichung (482), da zu diesem Behufe die Gleichung (496) nicht anzuwenden ist. Hiernach hat man

$$m\,t\,\delta_1 = \tfrac{1}{2}\,m\,t\;tg\,\varphi_1\,l - \tfrac{1}{48}\,D_1\,l^3 + \tfrac{1}{384}\,Q\,l^3,$$

daher wegen der Relation (494),

$$\delta_1 = (24\,D_1 - 7\,Q)\,\frac{l^3}{384\,m\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (499).$$

Insbesondere wird für verschiedene N, wenn man die entsprechenden Werthe für D_1 nach §. 222 und nach der Gleichung (489) substituirt, nämlich für

$$\left.\begin{aligned}
N &= 2 \ldots \delta_1 = 5 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 5{\cdot}0000 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 3 \ldots \delta_1 = 2 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}0000 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 4 \ldots \delta_1 = \tfrac{13}{5} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}6000 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 5 \ldots \delta_1 = \tfrac{17}{7} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4286 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 6 \ldots \delta_1 = \tfrac{47}{19} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4737 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 7 \ldots \delta_1 = \tfrac{32}{13} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4615 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 8 \ldots \delta_1 = \tfrac{175}{71} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4648 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 9 \ldots \delta_1 = \tfrac{239}{97} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4639 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= 10 \ldots \delta_1 = \tfrac{653}{265} \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4642 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} \\
N &= \infty, \lim.\delta_1 = (2\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt} = 2{\cdot}4641 \cdot \frac{Q\,l^3}{384mt}
\end{aligned}\right\} (500).$$

Das Resultat für $N=2$ stimmt mit der Formel (77), und für $N=3$ mit der Formel $\delta = \frac{1}{192} \cdot \frac{Q\,l^3}{m\,t}$ im §. 185 ad 2 überein, wie man diess auch in der That erwarten musste, zumal im letzten Falle das Tragfeld in demselben Zustande sich befindet, wie wenn es bei der zweiten Stütze festgehalten und auf der ersten Stütze aufliegen würde. Dass von allen Biegungen im ersten Tragfelde unter sonst gleichen Umständen die kleinste für $N=3$ Stützen vorhanden ist, steht im Zusammenhange mit der am Schlusse des vorigen §. bemerkten Eigenschaft.

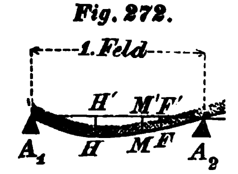
§. 227.

Statische Kraftmomente. Der Werth des statischen Kraftmomentes in Bezug auf irgend eine Stelle in einem beliebigen (n^{ten}) Tragfelde, ist aus der Gleichung (477) zu berechnen, welche nunmehr bestimmt erscheint, indem die Werthe der Drücke bekannt sind. Man kann bei den allgemeinen Betrachtungen auf eine ähnliche Weise zu Werke gehen, wie im §. 215. Demgemäss und mit Rücksicht auf die beiden vorhergehenden §§. 225 und 226 findet man Folgendes:

1) Das statische Kraftmoment an einem Stützpuncte A_n, welches mit $St.(A_n)$ bezeichnet wird, nähert sich desto mehr dem Werthe $\frac{1}{12} Q l$, und das Tragfeld $A_n A_{n+1}$ befindet sich desto mehr in dem mit VI bezeichneten Falle (Fig. 259), je grösser die Anzahl der Stützen N ist, und je weiter die bezügliche Stütze von den Enden des Trägers entfernt liegt *).

2. Die grössten numerischen Werthe für die positiven und negativen Kraftmomente sind in der Strecke des ersten (und letzten) Tragfeldes zu suchen. Das statische Kraftmoment für irgend einen Punct M (Fig. 272) im ersten Tragfelde findet man aus der Gleichung (477) für $n = 1$. Wird jener Werth mit $St.(M)$ bezeichnet, so ist

Fig. 272.



$$St.(M) = - D_1 x + \tfrac{1}{2} \frac{Q x^2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (501).$$

Da für die Abscisse des Wendepunctes F der Curve, d. i. für $x = \overline{AF'}$, das statische Kraftmoment verschwinden muss, so findet man allgemein

$$\overline{AF'} = 2 \left(\frac{D_1}{Q}\right) l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (502).$$

Man beachte jetzt, dass man die Gleichung (501) der statischen Kraftmomente im Sinne des § 128 auf eine graphische Weise dar-

*) Ghega hat in seinem Werke „Ueber nordamerikanischen Brückenbau" (Seite 62) angeführt, dass der Zustand eines solchen Tragfeldes ($A_n A_{n+1}$) nicht genau mit dem Falle übereinstimme, wo die beiden Enden des Tragfeldes fest vermauert sind. Diese Anomalie ist in der That vorhanden, wenn man für den erwähnten letzten Fall (VI) das herkömmliche Resultat $\frac{1}{16} Q l$ vor Augen behält. Allein, wie man bereits in der Anmerkung zum §. 199 auseinander gesetzt hat, ist dieses Resultat $\frac{1}{16} Q l$ unrichtig, und dafür $\frac{1}{12} Q l$ zu setzen. Wird diese Verbesserung eingeführt, so verschwindet die beobachtete Anomalie. Indessen ist nicht zu übersehen, dass bei einer solchen Vergleichung keineswegs die Identität der beiderseitigen Zustände erwartet werden darf, indem diese eigentlich nur bei dem fortwährenden Wachsen von N und n immer näher kommen, ohne jemals vollkommen gleich zu werden.

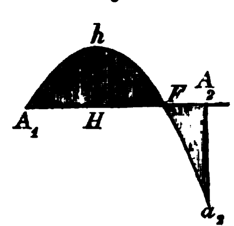


Fig. 273.

stellen kann, wobei x die Abscissen, und $St.(M)$ die Ordinaten repräsentiren. Geschieht diess, so kommt man auf die Fig. 273. Die Curve daselbst ist eine Parabel, welche durch den Wendepunct F geht. Ihre Axe $\overline{Hh}$ liegt vertical, und es ist

$$\overline{A_1 H} = \overline{HF} = \tfrac{1}{2}\overline{A_1 F} = \left(\frac{D_1}{Q}\right) l \quad . \quad . \quad (503).$$

Ferner ist der grösste numerische Werth von den positiven Kraftmomenten durch die Ordinate $\overline{A_2 a_2}$, von den negativen hingegen durch die Ordinate $\overline{Hh}$ repräsentirt. Hiernach findet die grösste Anspruchsnahme an einer der Stellen A_2 und H, oder an beiden zugleich statt. Die Lage der Stelle H ergibt sich aus der Gleichung (503), und zwar ist für

$$\left.\begin{array}{l|l}
N=2, \overline{A_1 H} = \frac{1}{2} l = 0{\cdot}5000\, l & N=7, \overline{A_1 H} = \frac{41}{104} l = 0{\cdot}3942\, l \\
N=3, \overline{A_1 H} = \frac{3}{8} l = 0{\cdot}3750\, l & N=8, \overline{A_1 H} = \frac{56}{142} l = 0{\cdot}3944\, l \\
N=4, \overline{A_1 H} = \frac{4}{10} l = 0{\cdot}4000\, l & N=9, \overline{A_1 H} = \frac{153}{388} l = 0{\cdot}3943\, l \\
N=5, \overline{A_1 H} = \frac{11}{28} l = 0{\cdot}3929\, l & N=10, \overline{A_1 H} = \frac{209}{530} l = 0{\cdot}3943\, l \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
N=6, \overline{A_1 H} = \frac{15}{38} l = 0{\cdot}3947\, l & N=\infty, \overline{A_1 H} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right) l = 0{\cdot}3943\, l
\end{array}\right\} (504).$$

Heisst man die beiden grössten numerischen Werthe der positiven und negativen statischen Kraftmomente in Uebereinstimmung mit dem §. 124, $R_1 z_1$ und $R_2 z_2$, so hat man den ersten aus der Gleichung (501) für $x = l$, den letzten aber aus derselben Gleichung für $x = \overline{A_1 H} = \left(\frac{D_1}{Q}\right) l$, und zwar ohne Rücksicht auf das Zeichen, zu bestimmen. Führt man diese Substitutionen aus, so erhält man, wenn man der Kürze halber $\frac{D_1}{Q} = \gamma$ setzt,

$$\left.\begin{array}{l}
R_1 z_1 = (\tfrac{1}{2} Q - D_1) l = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{D_1}{Q}\right) Q l = (\tfrac{1}{2} - \gamma) Q l \\
\text{und} \\
R_2 z_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D_1^2}{Q}\right) l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D_1}{Q}\right)^2 Q l = \tfrac{1}{2}\gamma^2 Q l
\end{array}\right\} (505).$$

Tragvermögen.

§. 228.

Allgemeine Formeln. Mit Rücksicht auf den vorigen §. liegt der gefährliche Querschnitt nach Umständen entweder in A_2 oder in H, oder an beiden Stellen zugleich. Natürlich gilt diess auch für die symmetrisch gelegenen Stellen. Bezeichnet man daher im Sinne des §. 124 das Tragmoment des Querschnittes in A_2 mit M_1, und in H mit M_2, das Tragvermögen aber mit $Max.Q$, und berücksichtigt man die Bemerkungen im §. 124, so wie die Gleichungen (505), so hat man allgemein

$$\text{entweder } M_1 = (\tfrac{1}{2} - \gamma)\, l \;.\; Max.Q$$
$$\text{oder } M_2 = \tfrac{1}{2}\gamma^2\, l \;.\; Max.Q$$

und hieraus

$$Max.Q = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{2M_1}{(1-2\gamma)\,l} \\ \text{oder } \dfrac{2M_2}{\gamma^2 l} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (506).$$

Sind nun 2, 3, 4, etc. Stützen vorhanden und sucht man der Reihe nach die entsprechenden Tragfähigkeiten per Tragfeld, so erhält man mit Berücksichtigung der correspondirenden Werthe für γ, welche in der zweiten verticalen Colonne der Tabelle im §. 223 enthalten sind, folgende besondere Resultate:

$$\left.\begin{array}{ll}
N = 2, \; Max.\, Q = & 8 \frac{M_2}{l} \\
N = 3, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 8 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 14{\cdot}2222 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 4, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 10 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}5 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 5, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}3333 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}9587 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 6, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}5000 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8356 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 7, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}4545 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8685 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 8, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}4667 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8571 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 9, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}4634 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8621 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
N = 10, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}4643 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8614 \frac{M_2}{l} \end{cases} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
N = \infty, \; Max.\, Q = & \begin{cases} \text{entw.} & 9{\cdot}4641 \frac{M_1}{l} \\ \text{oder} & 12{\cdot}8616 \frac{M_2}{l} \end{cases}
\end{array}\right\} \quad . \quad (507).$$

Von den Alternativwerthen ist stets der kleinere zu wählen.

§. 229.

Besondere Eigenschaften.

1. Bei zwei Stützen hat das Tragvermögen nur den Werth $\frac{8 M_2}{l}$, und der gefährliche Querschnitt ist in der Mitte des Trägers vorhanden.

2. Ist $M_1 = M_2 = M$, so gelten von den Alternativwerthen jene mit den kleineren numerischen Coefficienten. Der gefährliche Querschnitt liegt sodann von $N = 3$ Stützen angefangen stets bei der zweiten Stütze. Bezeichnet man die Werthe von $Max. Q$ mit Zeigern, welche der Stützenzahl N entsprechen, so hat man

$$\left.\begin{array}{ll} Max. Q_2 = 8 \cdot \frac{M}{l} & Max. Q_7 = 9 \cdot 4545 \cdot \frac{M}{l} \\ Max. Q_3 = 8 \cdot \frac{M}{l} & Max. Q_8 = 9 \cdot 4667 \cdot \frac{M}{l} \\ Max. Q_4 = 10 \cdot \frac{M}{l} & Max. Q_9 = 9 \cdot 4634 \cdot \frac{M}{l} \\ Max. Q_5 = 9 \cdot 3333 \cdot \frac{M}{l} & Max. Q_{10} = 9 \cdot 4643 \cdot \frac{M}{l} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ Max. Q_6 = 9 \cdot 5 \cdot \frac{M}{l} & Max. Q_\infty = 9 \cdot 4641 \cdot \frac{M}{l} \end{array}\right\} \quad . \quad (508).$$

Wenn daher Träger von einem bestimmten Querschnitte und Materiale auf 2, 3, 4 etc. Stützen ruhen, und stets dieselbe Entfernung der Tragstützen gilt, so ist in dem Falle $M_1 = M_2 = M$ (§. 125 ad 1 und 2) das **grösste** Tragvermögen per Tragfeld bei $N = 4$, das **kleinste** Tragvermögen hingegen bei $N = 2$ und $N = 3$ Stützen vorhanden, in welchen beiden letzten Fällen **gleiche** Werthe zum Vorschein kommen. Das Verhältniss zwischen den Werthen dieses kleinsten und grössten Tragvermögens ist.

$$Max. Q_2 : Max. Q_3 : Max. Q_4 = 1 : 1 : 1 \cdot 25.$$

3. Ist M_1 von M_2 verschieden, so gelangt man auch hier, wie im §. 217, zu analogen Schlussfolgerungen.

Anhang zum 7. und 8. Kapitel.

Bemerkungen für die Praxis. Bei den Betrachtungen in den vorigen zwei Kapiteln wurde vorausgesetzt, dass der auf mehreren Stützen ruhende Träger seiner ganzen Länge nach

aus einer ununterbrochenen Materie bestehe, und dass die einzelnen Stützpuncte unverrückbar seien. Es ist daher in einem vorkommenden Falle zu überlegen, inwieferne diese Bedingungen erfüllt werden können. Was die letzte Bedingung betrifft, so kann dieselbe in der Regel auf eine genügende Weise erreicht werden. Nicht so die erste. Die Annahme der Ununterbrochenheit der Materie des Trägers ist oft von der Wahrheit zu weit entfernt, als dass man dieselbe gelten lassen kann. Manchmal ist der Träger aus mehreren Theilen zusammengesetzt, manchmal ist er an mehreren Stellen durchlöchert, eingeschnitten u. s. w. Man hat sodann den Einfluss dieser Umstände auf das Verhalten des Trägers einer Schätzung zu unterziehen. Diese wird sich durch passende Combinirung der Resultate, welche auf die Ununterbrochenheit der Materie Bezug nehmen, mit der practischen Anschauung, welche sich auf den jedesmal vorliegenden Fall bezieht, ergeben. Dafür lassen sich keine eigentlichen Regeln aufstellen. Es werden sich jedoch immer Anhaltspuncte finden lassen, welche solche Abschätzungen ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums ermöglichen können. Wird z. B. der Dachsparren $A_1 A_3$ (Fig. 274) der Betrachtung unterzogen, so ist, abgesehen von seiner schiefen Lage, zunächst der Fall der Unterstützung eines Trägers $A_1 A_3$ an den drei Puncten A_1, A_2 und A_3 vorhanden. Wäre nur der Sparren von A_1 bis A_3 ein vollkommenes und homogenes Prisma, und die Hypothese der Unverrückbarkeit der drei Stützpuncte zulässig, so hätte man unter der Voraussetzung einer gleichförmig vertheilten Belastung, wenn der Stützpunct A_2 in der Mitte zwischen A_1 und A_3 liegt, nach der Tabelle im §. 223 für den Druck auf den Stützpunct

Fig. 274.

A_3, A_2, A_1

$$A_1 \quad . \quad . \quad . \quad D_1 = \tfrac{3}{8}\, Q$$
$$A_2 \quad . \quad . \quad . \quad D_2 = \tfrac{10}{8}\, Q$$
$$\text{und } A_3 \quad . \quad . \quad . \quad D_3 = \tfrac{3}{8}\, Q.$$

Q bezeichnet die von jeder Sparrenhälfte $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ zu tragende Belastung, und es ist sowohl die Wirkung dieser, als auch jene der Drücke normal auf die Sparrenrichtung zu verstehen. Die gefundenen Resultate können jedoch nicht dem practisch vorliegenden Falle genügen. Es hat nämlich der Sparren keineswegs die prismatische Form, denn diese ist durch die Verschneidungen an den beiden Enden und durch das Zapfenloch in der Mitte unterbro-

chen. Da das statische Kraftmoment in der Gegend der Enden des Sparrens sehr klein ist, so leuchtet ein, dass die erwähnten Verschneidungen diejenigen Resultate, welche ohne deren Berücksichtigung sich ergeben, nicht wesentlich stören werden, wenn dieselben nur überhaupt der gewünschten Solidität der Verbindung entsprechen. Eben so wird man einen erheblichen Fehler nicht begehen, wenn man die Unterstützungspuncte in der Ueberzeugung als unausweichbar gelten lässt, dass die Praxis genügende Mittel besitzt, um diese Puncte gehörig zu fixiren. Es handelt sich also eigentlich nur um die Abschätzung des Einflusses, welchen das Zapfenloch in der Mitte A_2 haben kann. Zu diesem Behufe beachte man, dass die fraglichen Drücke die Werthe

$$D_1 = \tfrac{1}{2} Q,\ D_2 = Q \text{ und } D_3 = \tfrac{1}{2} Q$$

annehmen, wenn jede Sparrenhälfte für sich, also zwischen beiden in A_2 keine Verbindung vorhanden wäre. Man kennt jetzt die Resultate für zwei Zustände, von welchen zwar keiner der wahre, jedoch zuzugeben ist, dass dieser zwischen beide fallen muss. Lässt man daher die Wahrheit in der Mitte liegen, und nimmt demgemäss an, es sei eigentlich

$$D_1 = \tfrac{7}{16} Q,\ D_2 = \tfrac{18}{16} Q \text{ und } D_3 = \tfrac{7}{16} Q,$$

so wird man in diesem Falle einen gefährlichen Irrthum um so weniger zu besorgen haben, als die Resultate für die beiden hypothetischen Gränzzustände selbst nicht viel von einander differiren.

Ist man einmal so weit gelangt, so unterliegt die Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens nach der gegebenen Anleitung keinem Anstande.

Was die Combinirung der im 7. und 8. Kapitel erörterten Fälle, wenn nämlich Belastungen in der Mitte der Tragfelder sich concentriren, und ausserdem eine gleichförmige vertheilte Last vorhanden ist, anbelangt, so bietet dieselbe gleichfalls keine Schwierigkeiten dar.



Dritter Abschnitt.

Widerstand eines prismatischen Trägers, wenn die einwirkenden Kräfte nicht normal auf seine Längenaxe gerichtet sind.

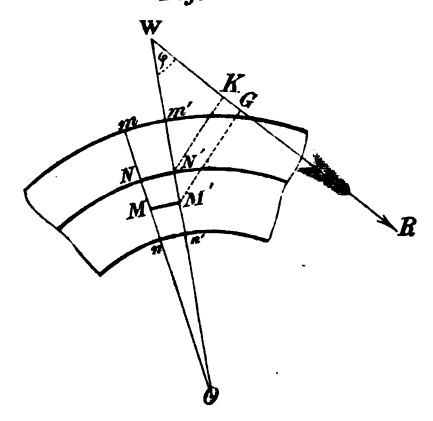
---

§. 230.

Vorerinnerung. Bisher hat man den Widerstand eines prismatischen Trägers unter der Voraussetzung behandelt, wenn die einwirkenden Kräfte normal auf seine Längenaxe gerichtet sind. Es erübrigt daher noch die Untersuchung solcher Fälle, wo jene normale Richtung nicht vorhanden ist. Es leuchtet ein, dass auch dann die mittelst der Figuren 19, 20 und 21 gewählte Anschauungsweise der Hauptsache nach beibehalten werden kann, wenn nur die Resultirende R (anstatt wie dort normal auf die Längenaxe) in die entsprechende schiefe Richtung gebracht wird. Doch ist die Zerlegung der Resultirenden in die zwei Componenten R_1 und R_2 (Fig. 21), beziehungsweise parallel zu dem Querschnitte und normal auf diesen, beizubehalten, so dass dieselben eben so, wie in den Gleichungen (28) und (29) durch die Relationen $R_1 = R \cos \varphi$ und $R_2 = R \sin \varphi$ ausgedrückt sind, wenn der Winkel φ auch hier die Neigung der Resultirenden R gegen die Richtung des Querschnittes mn anzeigt. Nur entspricht jener Winkel nicht mehr, wie in der Fig. 39, der Gleichung $\tang \varphi = \frac{dy}{dx}$, und er darf auch nicht, wie dort, als durchgehends klein angesehen werden, indem er je nach Umständen alle Werthe von 0 bis 360° annehmen kann. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen kann man sich erlauben, die auf die Biegung Bezug nehmenden allgemeinen Resultate aus dem zweiten Abschnitte ersten Hauptstückes in ihrer Wesenheit hierher zu übertragen.

§. 231.

Fig. 275.



Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichtes. Dem vorigen §. zu Folge und unter Beibehaltung der im zweiten Abschnitte des ersten Hauptstückes gewählten Bezeichnungen ist die Fig. 275 auf folgende Weise zu verstehen: In mn und $m'n'$ sind zwei unendlich nahe Querschnitte, NN' ist die durch ihre Schwerpuncte gehende Längenaxe, und MM' zeigt die Lage der neutralen Schichte an, während R die Resultirende der einwirkenden Kräfte vorstellt, die in Bezug auf den Querschnitt mn in Betracht zu kommen haben. Ferner hat man

$mn = h$	$MO = \varrho$	die Spannung per □'' in m . $= s$,
$Mm = h_1$	$NO = \varrho'$	die Pressung per □'' in n . $= p$,
$Mn = h_2$	$NK = z$	und das Trägheitsmoment des
$Nm = h'$	$M'G = Z$	Querschnittes in Bezug auf die
$Nn = h''$	$N'W = w$	durch seinen Schwerpunct parallel
$MN = e$		zur neutralen Schichte gehende
		Axe . . . . $t = fd^2$

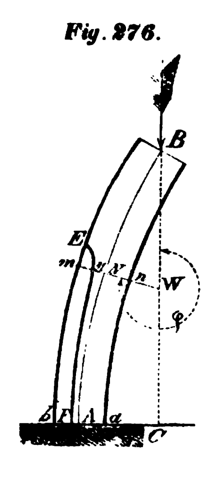
zu setzen, und sofort von den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l|l|c} e = \frac{d^2}{w} = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} & \varrho = \frac{mt}{Rz} & \text{und} \\ h_1 = h' + e & \varrho' = \varrho + e & \frac{s}{h_1} = \frac{p}{h_2} = \frac{m}{\varrho} \\ h_2 = h'' - e & \varrho' = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right) & \end{array}\right\} \quad (509)$$

Gebrauch zu machen.

Ungeachtet diese Gleichungen aus dem ersten Hauptstücke anzuwenden sind, so erhalten doch die Endresultate zuweilen eine andere Gestalt als dort. So kommt z. B. hinsichtlich der neutralen Schichte zu bemerken:

1. Wenn, wie in der Fig. 276, für einen Querschnitt mn der Durchschnittspunct W auf der concaven Seite der Biegung liegt, so



wird $\varphi > 180^\circ$, daher e mit $\sin\varphi$ negativ, was anzeigt, dass sodann die neutrale Schichte, nicht zwischen N und n, sondern zwischen N und m fällt.

2. Es kann geschehen, dass

$$e = \frac{d^2 \sin\varphi}{z} = \frac{d^2}{w}$$

für keinen Querschnitt verschwindet, daher auch die neutrale Schichte nirgends durch den Schwerpunct des Querschnittes gehen wird. Dieser Fall tritt z. B. bei dem Ständer (Fig. 276) ein. Es ist nämlich daselbst

$$e = \overline{MN} = \frac{d^2}{\overline{NW}},$$

wo $\overline{NW}$ nie ∞, also e nie Null werden kann, so dass die neutrale Schichte EMF nirgends mit der Längenaxe zusammentrifft.

3. In manchen Fällen existirt keine neutrale Schichte. Gesetzt, es wäre in dem gewählten Falle (Fig. 276) für jeden Querschnitt

$$e = \frac{d^2}{w} > \overline{Nm} = h',$$

so würde die krumme Linie, welche die Lage der neutralen Schichte vorzustellen hätte, ausserhalb des Ständers fallen, also eine solche eigentlich nicht vorhanden sein. Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe h wäre z. B., wenn die Biegung $\overline{AC} = \delta$ in der Höhenrichtung h stattfindet, somit $t = \frac{1}{12} f h^2$ und $d^2 = \frac{1}{12} h^2$ zu setzen ist,

$$e = \overline{AF} = \frac{d^2}{\delta} = \frac{h^2}{12\delta},$$

wesshalb wegen $h' = \frac{1}{2} h$ die obige Ungleichung auf die Bedingung

$$\delta < 6h$$

führt, bei welcher sowohl in dem Querschnitte ab, als auch in den anderen Querschnitten keine neutralen Fasern vorkommen, zumal in jedem anders gelegenen Querschnitt mn

$$\overline{NW} = w < \overline{AC} = \delta \text{ und } \overline{MN} > \overline{AF}$$

anzunehmen ist. Jene Bedingung aber ist in der Praxis in der Regel vorhanden.

§. 232.

Biegungscurve. Zur Bestimmung der Form der Biegungscurve in einem solchen Falle, wenn die einwirkenden Kräfte nicht normal auf die Längenaxe gerichtet sind, hat man die Gleichung $\varrho' = \frac{d^2}{z}\left(\frac{mf}{R} + \sin\varphi\right)$ zu benützen. Obwohl der Werth von $\sin\varphi$ nicht als klein angenommen werden darf, sondern derselbe sogar bis zur Höhe 1 gelangen kann, so wird er doch immerhin gegen die Grösse $\frac{mf}{R}$ vernachlässigt werden können, weil in den gewöhnlichen Fällen diese letzte bedeutend grösser ist. Hieraus folgt, dass man Behufs der Aufsuchung der Biegungscurve eben so, wie in den bisher betrachteten Fällen annäherungsweise von der Gleichung $\varrho = \varrho' = \frac{mt}{Rz}$ Gebrauch machen, somit auch die Relationen (47), (48) und (49) benützen kann, wenn nur das statische Kraftmoment Rz dem betreffenden Falle angepasst wird. Dieses Verfahren ist offenbar gleichbedeutend mit jenem, welches sich ergäbe, wenn man die neutrale Schichte und die Längenaxe des Prismas zusammenfallen liesse.

§. 233.

Anspruchsnahme des Materiales. Gefährlicher Querschnitt. Tragvermögen. Auf die Betrachtungen im §. 74 zurückkehrend, und in Berücksichtigung des in diesem Abschnitte bereits Gesagten leuchtet ein, dass die Fig. 72 auch in denjenigen Fällen massgebend sein kann, wo die Resultirende R nicht, wie dort, normal auf die Längenaxe gerichtet ist. Es werden nämlich die gegebenen Gleichungen (92)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h' Rz}{t} + \frac{R\sin\varphi}{f} \\ \text{und } p &= \frac{h'' Rz}{t} - \frac{R\sin\varphi}{f} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (510)$$

in solchen Fällen ebenfalls stattfinden, wenn nur statt R, z, φ die richtigen Werthe substituirt werden. Demgemäss und mit Beziehung auf den §. 74 kann für jeden Querschnitt mn (Fig. 275) Folgendes behauptet werden:

α) Die Spannung s, welche in m vorwaltet, besteht aus der Summe zweier Anspruchsnahmen, nämlich

$$s_1 = \frac{h' R x}{t} \text{ und } s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f};$$

die Pressung p in n hingegen aus der Differenz zweier Anspruchsnahmen

$$p_1 = \frac{h'' R x}{t} \text{ und } s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f}.$$

β) Die Spannung s_1 und die Pressung p_1 würden allein vorhanden sein, wenn die durch die Biegung entstehende neutrale Schichte überall durch den Schwerpunct des Querschnittes gehen, also in dieser Hinsicht von dem Einflusse der Componenten R_2 (Fig. 72) abstrahirt würde.

γ) Die Anspruchsnahme s_2 wird durch die Componente R_2 hervorgerufen und besteht in einer Spannung oder Pressung, je nachdem $s_2 = \frac{R \sin \varphi}{f}$ positiv oder negativ ist. Die Componente R_2 erzeugt nämlich für sich allein betrachtet nach Umständen eine Spannung oder eine Pressung, welche man sich gleichmässig über den Querschnitt f vertheilt vorzustellen hat.

Diese Bemerkungen führen zur Ueberzeugung, dass man bei der Berechnung der Anspruchsnahme des Materiales die ad β und γ erwähnten Wirkungen abgesondert behandeln darf, wodurch ein Anhaltspunct geboten ist, eine solche Untersuchung auf eine einfache Weise durchzuführen. Es versteht sich übrigens von selbst, dass bei dem Umstande, als s_2 bald eine Spannung, bald eine Pressung vorstellt, jede der eigentlichen Anspruchsnahmen in m und n, nämlich sowohl s als auch p bald aus einer Summe, bald aus einer Differenz jener Theile bestehen, und letztere auch Null oder negativ werden kann, so dass zuweilen s und p gleichzeitig Spannungen, oder gleichzeitig Pressungen sein können.

Wird diese Anschauung festgehalten, so ergeben sich zur Bestimmung der Lage des gefährlichen Querschnittes und des Tragvermögens folgende Regeln:

1. Man suche die Biegungscurve nach §. 232 unter der Voraussetzung auf, dass die neutrale Axe überall durch den Schwerpunct

des Querschnittes geht. Diese Biegungscurve wird sich der Wahrheit hinreichend annähern.

2. Man suche sodann für einen beliebig gelegenen Querschnitt die Spannung s_1 und die Pressung p_1 in denjenigen Fasern, welche von der neutralen Axe am entferntesten liegen.

3. Hierauf suche man die in jenen Fasern entstehende Anspruchsnahme s_2, welche zufolge der Componenten $R_2 = R \sin \varphi$ zu berücksichtigen ist.

4. Man setze endlich nach der Relation (510) $s = s_1 + s_2$ und $p = p_1 - s_2$, und untersuche, an welchen Stellen des Prismas die grössten numerischen Werthe von s und p eintreten. Diese Stellen werden die Lage des gefährlichen Querschnittes entscheiden.

5. Die gefundenen grössten numerischen Werthe für s und p dürfen die Elasticitätsgränzen nicht überschreiten, sondern höchstens erreichen. Diese Bedingung ist geeignet, auf die grössten zulässigen offensiven Kräfte und sofort auf das Tragvermögen zu schliessen.

Nach dieser Methode hat man bereits im §. 74 ein Beispiel behandelt, nur sind dort die Werthe von s_2 so gering ausgefallen, dass sie fast durchgehends vernachlässigt werden konnten. Eine solche Vernachlässigung darf jedoch nicht immer eintreten, wenn die Resultirende R eine schiefe Richtung gegen die Längenaxe hat, denn die Kraft s_2 kann manchmal so bedeutend sein, dass sie sogar die Anspruchsnahmen s_1 und p_1 übertrifft.

Erstes Kapitel.

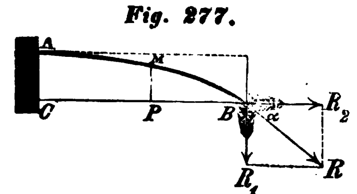
Widerstand eines Trägers, welcher an einem Ende festgehalten, und am andern Ende von zwei Kräften in Anspruch genommen wird, von denen die eine in der Richtung der Längenaxe, die andere aber normal darauf wirkt.

§. 234.

Bedingungen des Gleichgewichtes. Es sei der Träger AB, Fig. 277, an einem Ende festgehalten, am andern

Ende aber von den Kräften R_1 und R_2 in Anspruch genommen, von denen vor Eintritt der Biegung R_2 in der Richtung der Längenaxe, R_1 aber normal auf derselben wirkend war. Diese beiden Kräfte haben offenbar eine Resultirende R, die mit der ursprünglichen geraden Richtung der Längenaxe einen stumpfen Winkel einschliesst.

Fig. 277.



Es sei in Folge der Biegung die Längenaxe aus ihrer geraden Richtung in die Biegungscurve AB übergegangen, jedoch die Biegung so klein, dass noch immer nahezu die Kraft R_1 parallel zu einem beliebigen Querschnitt in M, die Kraft R_2 aber normal auf denselben wirkend angesehen werden kann. Man nehme ferner Behufs der anzustellenden Untersuchung B als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, und die zur ursprünglichen Längenaxe parallele Gerade BC als Abscissenaxe an, so dass für die gewählte Stelle in M die Abscisse $\overline{BP} = x$ und die Ordinate $\overline{MP} = y$ wird. Endlich setze man die Coordinaten für die Wurzel A, nämlich $\overline{BC} = l$ und $\overline{AC} = \delta$, wobei l sehr nahe die Länge des Trägers AB und δ seine Biegung vorstellt. Nimmt man jetzt im Sinne des §. 232 an, dass AB die Lage der neutralen Schichte selbst wäre, so kann man im Geiste der Gleichung (47) unter Vernachlässigung des eigenen Trägergewichtes die Bedingungsgleichung aufstellen:

$$-mt\frac{d^2y}{dx^2} = R_1 x - R_2 y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (511)^{*}).$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{R_1}{mt} = n$ und $\frac{R_2}{mt} = q$, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = nx - qy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (512).$$

Das Integral hiervon, zugleich die Gleichung der Biegungscurve, ist

$$y = \frac{n}{q}\left[x - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (513),$$

*) $mt\frac{d^2y}{dx^2}$ ist hier negativ zu nehmen, weil die positiven Ordinaten oberhalb der Abscissenaxe liegen, während dieselben bei der Bildung der Gleichung (47) unterhalb der genannten Axe angenommen worden sind.

wenn $e = 2{\cdot}7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und bedacht wird, dass für den Punct B die Coordinaten x und y verschwinden müssen.

Biegung.

§. 235.

Allgemeine Gleichung. Aus der Gleichung (513) erhält man die Biegung $y = \delta$ für $x = l$. Es wird nämlich

$$\delta = \frac{n}{q}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{l\sqrt{q}} - e^{-l\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right], \text{ oder}$$

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (514)$$

Z. B. Es befinde sich eine schmiedeeiserne Stange in dem Falle Fig. 277. Dieselbe sei horizontal, und ihr Querschnitt ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h. Es sei ferner

$b = 1\frac{1}{2}''$	$R_1 = 2$ Ztr.	und es werde von
$h = 2''$	$R_2 = 400$ Ztr.	dem eigenen Ge-
$l = 100''$	$m = 250000$	wichte abstrahirt.

Nach diesen Daten findet man

$f = bh = 3\square''$	$n = \frac{R_1}{mt} = 0{\cdot}000008$	$2l\sqrt{q} = 8$
$t = \frac{1}{12}fh^2 = 1$	$q = \frac{R_2}{mt} = 0{\cdot}0016$	und
$mt = 250000$	$\sqrt{q} = 0{\cdot}04$	$e^{2l\sqrt{q}} = e^8 = 2982,$

also die Biegung

$$\delta = \frac{1}{200}\left[100 - 25 \,.\, \tfrac{2981}{2983}\right] = 0{\cdot}375 \text{ Zoll.}$$

§. 236.

Näherungsformeln. I. Sind die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{2l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise

$$\delta = \frac{1}{3}\,\frac{R_1\,l^3}{m\,t}\,(1 - \tfrac{2}{5}\,q\,l^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (515)\ ^{*)}$$

setzen. Ist insbesondere $R_2 = o$, also auch $q = o$, so erhält man

$$\delta = \frac{1}{3}\,\frac{R_1\,l^3}{m\,t}.$$

Dieses Resultat stimmt in der That mit der im ersten Hauptstücke gefundenen Relation (61) überein, welche sich auf den dort mit I bezeichneten Fall bezieht, wo das eine Ende des Prismas festgehalten und das andere Ende normal auf die Längenaxe belastet erscheint.

Betrachtet man z. B. wieder die vorige schmiedeeiserne Stange, und nimmt $R_2 = 2$ Zentner an, während man die übrigen Daten beibehält, so ist $q = \frac{R_2}{m\,t} = 0{\cdot}000008$, und $\frac{2}{5}\,q\,l^2 = 0{\cdot}032$, also klein genug, um die Anwendung der angenäherten Formel (515) zu rechtfertigen, nach welcher man findet:

$$\delta = \frac{1}{3}\,\frac{R_1\,l^3}{m\,t}\,(1 - \tfrac{2}{5}\,q\,l^2) = \tfrac{8}{3}\,(1 - 0{\cdot}032) = 2''{\cdot}584.$$

Vernachlässigt man auch das Glied $\frac{2}{5}\,q\,l^2$, so wird $\delta = 2\tfrac{2}{3}''$, also ein von der Wahrheit noch immer nicht wesentlich abweichendes Resultat.

II. Sind die Werthe von l und R_2 gross genug, damit $\left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right)$ sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich

---

*) Es ist allgemein

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + \ldots,$$

also auch

$$e^{2l\sqrt{q}} = 1 + 2\,l\,q^{\frac{1}{2}} + 2\,l^2\,q + \tfrac{4}{3}\,l^3 q^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}\,l^4 q^2 + \tfrac{4}{15}\,l^5 q^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

und hiernach

$$\delta = \frac{p}{q}\left[l - \frac{1}{\sqrt{q}}\cdot\frac{2\,l q^{\frac{1}{2}} + 2\,l^2 q + \frac{4}{3}\,l^3 q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\,l^4 q^2 + \frac{4}{15}\,l^5 q^{\frac{5}{2}} + \ldots}{2 + 2\,l\,q^{\frac{1}{2}} + 2\,l^2 q + \frac{4}{3}\,l^3 q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\,l^4 q^2 + \ldots}\right] =$$

$$= \frac{p\,l}{q}\left[1 - \frac{1 + l q^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\,l^2 q + \frac{1}{3}\,l^3 q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}\,l^4 q^2 + \ldots}{1 + l q^{\frac{1}{2}} + l^2 q + \frac{2}{3}\,l^3 q^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\,l^4 q^2 + \ldots}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{3}\,p\,l^3\left[\frac{1 + l\,q^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}\,l^2 q + \ldots}{1 + l\,q^{\frac{1}{2}} + l^2 q + \ldots}\right] = \tfrac{1}{3}\,\frac{R_1\,l^3}{m\,t}\,(1 - \tfrac{2}{5}\,q\,l^2 + \ldots).$$

erlauben, diesen Bruch mit der Einheit selbst zu verwechseln. Dann ist näherungsweise

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}\left(l - \frac{1}{\sqrt{q}}\right) = \frac{R_1}{R_2} l \left(1 - \frac{1}{l\sqrt{q}}\right) = \frac{R_1}{R_2}\left(l - \sqrt{\frac{mt}{R_2}}\right) \quad (516).$$

Diese Formel kann Anwendung finden, wenn die Länge des Prismas im Vergleiche zum Querschnitte, und die Kraft R_2 im Vergleiche zur Kraft R_1 so gross sind, dass der Exponent von e, nämlich $2l\sqrt{q} = 2l\sqrt{\frac{R_2}{mt}}$, die Zahl 5 überschreitet, wie diess in dem Beispiele am Schlusse des §. 235 der Fall gewesen ist.

Tragvermögen.

§. 237.

Allgemeine Relation.

Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct M ist mittelst der Gleichung (511) ausgedrückt. Bezeichnet man dasselbe dem §. 233 gemäss mit Rz, so hat man

$$Rz = R_1 x - R_2 y = R_2\left(\frac{R_1}{R_2} x - y\right),$$

und mit Rücksicht auf den Werth (513) für y

$$Rz = \frac{R_1}{\sqrt{q}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\} = R_1\sqrt{\frac{mt}{R_2}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\}.$$

Nach den in der Fig 275 angenommenen Bezeichnungen und nach dem §. 233 ist die Spannung der Fasern in m

$$s_1 = \frac{h' Rz}{t} = h' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\}$$

und die Pressung in n

$$p_1 = \frac{h'' Rz}{t} = h'' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right\},$$

welche Anspruchsnahmen in Folge der Biegung stattfinden.

Nach dem §. 233 bringt aber auch die Kraft R_2 in sämmtlichen Fasern des Querschnittes in M eine Spannung hervor, die per $\square''$ mit $s_2 = \frac{R_2}{f}$ auszudrücken ist. Man hat daher als die eigentliche Spannung in m (Fig. 275)

$$s = s_1 + s_2 = h' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left(\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right) + \frac{R_2}{f},$$

und als die eigentliche Pressung in n

$$p = p_1 - s_2 = h'' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left(\frac{e^{x\sqrt{q}} - e^{-x\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right) - \frac{R_2}{f}.$$

Wird in dem letzten Ausdruck das zweite Glied grösser als das erste, somit p negativ, so findet in n gleichfalls eine Spannung statt. Jedenfalls aber nehmen die beiden Werthe für s und p mit x zu, sie werden daher für $x = l$ am grössten, wonach der gefährliche Querschnitt an dem festgehaltenen Ende A anzunehmen kommt. Dort sind die Anspruchsnahmen in den äussersten Fasern

$$\left.\begin{aligned} s &= h' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right) + \frac{R_2}{f} \\ &\text{und} \\ p &= h'' R_1 \sqrt{\frac{m}{R_2 t}} \left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right) - \frac{R_2}{f} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (517).$$

Soll nun die Elasticitätsgränze weder bei der Ausdehnung noch bei der Zusammendrückung überschritten werden, so darf höchstens $s = a$ oder $p = r$ werden.

Setzt man der Kürze wegen $\left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right) = c$, und nennt man die grösste zulässige Verticalkraft, also das Tragvermögen, $Max. R_1$, so ist bei Erreichung einer oder beider der Elasticitätsgränzen

$$\text{entweder } a = c h' \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\, Max.\, R_1 + \frac{R_2}{f}$$

$$\text{oder } r = c h'' \sqrt{\frac{m}{R_2 t}}\, Max.\, R_1 - \frac{R_2}{f}$$

und sofort das Tragvermögen

$$Max.\, R_1 = \left\{\begin{aligned} &\text{entw. } \left(\frac{af - R_2}{c f h'}\right) \sqrt{\frac{R_2 t}{m}} \\ &\text{oder } \left(\frac{rf + R_2}{c f h''}\right) \sqrt{\frac{R_2 t}{m}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (518),$$

von diesen Alternativwerthen aber der kleinere zu nehmen.

Z. B. Man suche das Tragvermögen von der im §. 235 betrachteten

schmiedeeisernen Schiene mit Rücksicht auf die dortigen Daten; nur lasse man die Kraft R_1 unbestimmt, indem man das Maximum derselben zu berechnen hat. Da der Querschnitt ein Rechteck ist, so befindet sich die durch den Schwerpunct gehende Axe in der halben Höhe, und es ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$. Nimmt man die grösste zulässige Spannung a und die gleichnamige Pressung r je mit 200 Zentnern an, so hat man in die Formeln (518) folgende Werthe zu substituiren: $a = r = 200$, $R_2 = 400$, $f = 3$, $h' = h'' = 1$, $t = 1$, $m = 250000$,

$$c = \left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right) = \left(\frac{e^8 - 1}{e^8 + 1}\right) \simeq \frac{2981}{2983}, \text{ daher nahe} = 1,$$

und man erhält für das Tragvermögen

$$Max.\, R_1 = 2{\cdot}668 \text{ Zentner.}$$

Augenscheinlich ist in diesem Falle der erste der beiden Alternativwerthe (518) der kleinere.

Die erste der beiden Formeln (518) zeigt übrigens, dass für $R_2 = af$ kein Tragvermögen vorhanden ist. Diess erklärt sich dadurch, dass sodann der Zug R_2 in der Richtung der Längenaxe allein schon genügt, die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung zu erreichen.

§. 238.

Näherungsformeln.

I. Sind wie im §. 236 ad I die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{2l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man näherungsweise

$$Max.\, R_1 = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{at}{l\,h'} \left[1 + R_2 \left(\dfrac{l^2}{3mt} - \dfrac{1}{af}\right)\right] \\ \text{oder } \dfrac{rt}{l\,h''} \left[1 + R_2 \left(\dfrac{l^2}{3mt} + \dfrac{1}{rf}\right)\right] \end{cases} \quad . \quad (519)^{*)}$$

setzen.

---

*) Es ist

$$\frac{1}{c} = \left(\frac{e^{2l\sqrt{q}} + 1}{e^{2l\sqrt{q}} - 1}\right) = \frac{2 + 2lq^{\frac{1}{2}} + 2l^2q + \frac{4}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}l^4q^2 + \ldots}{2lq^{\frac{1}{2}} + 2l^2q + \frac{4}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}l^4q^2 + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{lq^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1 + lq^{\frac{1}{2}} + l^2q + \frac{2}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \ldots}{1 + lq^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}l^2q + \frac{1}{3}l^3q^{\frac{3}{2}} + \ldots}\right) = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{mt}{R_2}}\left(1 + \tfrac{1}{3}l^2q + \ldots\right),$$

also auch

Für $R_2 = 0$ wird insbesondere

$$Max.\,R_1 = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{a\,t}{l\,h'} \\ \text{oder } \dfrac{r\,t}{l\,h''} \end{cases}$$

übereinstimmend mit der Relation (106) im ersten Hauptstücke, wie diess auch zu erwarten war, nachdem für $R_2 = 0$ offenbar der vorliegende Fall in den dort behandelten übergeht.

Um auch die Anwendung der Formeln (519) auf ein Beispiel zu zeigen, sei wie im §. 236 für die daselbst betrachtete schmiedeeiserne Stange $t = 1$, $l = 100$, $h' = h'' = 1$, $R_2 = 2$, $f = 3$, $m = 250000$ und $a = r = 200$. Mit diesen Werthen findet aus der ersten der beiden Alternativformeln, welche den kleineren Werth gibt, $Max.\,R_1 = 2{\cdot}046$ Ztr. Für $R_2 = 0$ fände man $Max.\,R_1 = 2$ Ztr., also nahezu dasselbe Resultat.

II. Sind, wie im §. 236 ad II, die Werthe von l und q gross genug, damit $c = \left(\dfrac{e^{2l\sqrt{q}} - 1}{e^{2l\sqrt{q}} + 1}\right)$ sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich erlauben, $c = 1$ zu setzen, und das Tragvermögen aus den Alternativ-Relationen

$$Max.\,R_1 = \begin{cases} \text{entw. } \left(\dfrac{af - R_2}{fh'}\right)\sqrt{\dfrac{R_2 t}{m}} \\ \text{oder } \left(\dfrac{rf + R_2}{fh''}\right)\sqrt{\dfrac{R_2 t}{m}} \end{cases} \quad . \quad . \quad (520).$$

zu bestimmen.

So ist diese Näherungsmethode für das Beispiel im §. 237 unbedenklich zulässig. Man findet hiermit $Max.\,R_1 = 2\tfrac{2}{3} = 2{\cdot}667$ Ztr., also nur um $0{\cdot}001$ von dem genaueren Werthe verschieden.

$$\left(\frac{af - R_2}{cfh'}\right)\sqrt{\frac{R_2 t}{m}} = \left(\frac{af - R_2}{fh'}\right)\frac{t}{l}\,(1 + \tfrac{1}{3}l^2 q + \ldots) =$$

$$= \frac{a\,t}{l\,h'}\left(1 - \frac{R_2}{af}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{l^2 R_2}{m\,t} + \ldots\right) = \frac{a\,t}{lh'}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3\,m\,t} - \frac{1}{af}\right) + \right]$$

und ebenso

$$\left(\frac{rf + R_2}{cfh''}\right)\sqrt{\frac{R_2 t}{m}} = \frac{r\,t}{l\,h''}\left[1 + R_2\left(\frac{l^2}{3\,m\,t} + \frac{1}{rf}\right) + \right].$$

In dem untersuchten Falle dieses Kapitels wird in der Regel der erste Alternativwerth

$$Max.\ R_1 = \left(\frac{af - R_2}{fh'}\right)\sqrt{\frac{R_2 t}{m}}$$

massgebend sein, und man sieht, dass das Tragvermögen unter sonst gleichen Umständen mit dem Zuge R_2 variirt. Dasselbe wird am grössten für $\frac{d\,(Max.\ R_1)}{d\,R_2} = 0$, d. h. für

$$R_2 = \tfrac{1}{3} a f,$$

und ist sodann

$$Max.\ R_1 = \tfrac{2}{9}\sqrt{3}\,.\,\frac{a}{h'}\sqrt{\frac{aft}{m}} = \tfrac{2}{9}\sqrt{3}\,.\,\frac{afd}{h'}\sqrt{\frac{a}{m}} \quad (521),$$

wenn man $t = fd^2$ setzt.

Dieses Resultat ist wichtig. Es zeigt, dass es am vortheilhaftesten ist, wenn der Zug R_2 den dritten Theil der grössten zulässigen Spannung (af) ausmacht.

Für ein Rechteck ist $h' = \frac{1}{2}h$, $d^2 = \frac{1}{12}h^2$ und $f = bh$, daher

$$Max.\ R_1 = \tfrac{2}{9}\,abh\sqrt{\frac{a}{m}} = \tfrac{2}{9}\,af\sqrt{\frac{a}{m}} \quad . \quad . \quad (522).$$

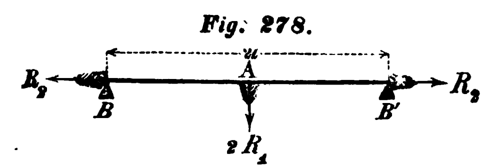
Nach Substitution der speciellen Werthe aus dem vorigen Beispiele findet man insbesondere $Max.\ R_1 = \frac{8}{3}\sqrt{2} = 3{\cdot}771$ Zentner, wenn der Bedingung gemäss $R_2 = \frac{1}{3} af = 200$ Zentner ist. Wird der Zug R_2 anders gewählt, entweder grösser oder kleiner, so wird jedenfalls das Tragvermögen verringert. Auch hat man für das vortheilhafteste Verhältniss zwischen den beiden einwirkenden Kräften

$$Max.\ R_1 : R_2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{m}} : 1 = 1 : 37{\cdot}5\sqrt{2} = 1 : 53{\cdot}03.$$

§. 239.

Anwendung auf den Fall Fig. 278. Liegt das Prisma horizontal auf zwei Stützen, und man belastet es nicht nur in der Mitte, sondern zieht auch seine Enden auseinander, so lässt sich dieser Fall auf jenen in der Fig. 277 zurückführen, wenn man

Fig. 278.



die Länge des Prismas in der Fig. 278 mit $2l$ und die Last in der Mitte mit $2R_1$ bezeichnet.

Wird von dem eigenen Gewichte des Prismas abstrahirt, so kann man von den in diesem Kapitel gegebenen Formeln Gebrauch machen, und falls der im §. 237 gegebene Werth von c der Einheit nahe genug kommt, behaupten, es sei in einem solchen Falle am zweckmässigsten,

1. den Horizontalzug R_2 so zu wählen, dass zufolge des §. 238 das Verhältniss

$$R_1 : R_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\frac{d}{h'}\sqrt{\frac{a}{m}} : 1$$

stattfindet, und

2. den Querschnitt dreimal so gross zu machen, als er für den alleinigen Zug R_2 nothwendig wäre, um nämlich die Bedingung $R_2 = \frac{1}{3}af$ oder $f = \frac{3R_2}{a}$ zu entsprechen.

Diese Regeln können Anwendung finden bei der Spannung von eisernen Schliessen.

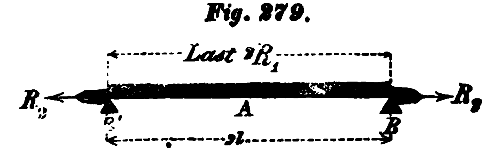
Zweites Kapitel.

Widerstand eines prismatischen Trägers, welcher seiner ganzen Länge nach gleichförmig belastet ist, wenn derselbe auf beiden Enden aufliegt, und diese letzteren auseinandergezogen werden.

§. 240.

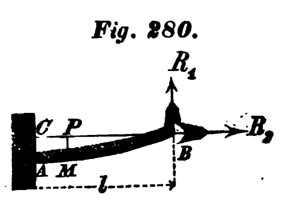
Bedingungen des Gleichgewichtes. Dieser Fall ist in der Fig. 279 dargestellt. Ist die ganze Belastung $2R_1$, so erleidet jede Stütze den Druck R_1. Werden daher die Stützen weggenommen, und an deren Statt den Drücken gleiche Kräfte nach aufwärts wirkend angebracht, so tritt keine Störung des Gleichgewichtes ein. In der Mitte A muss wegen der Symmetrie

Fig. 279.



der Anordnung die Tangente an die Biegungscurve horizontal gehen. Hiernach lässt sich der in Rede stehende Fall auf den in der Fig. 280 angezeigten zurückführen, wo der halbe Träger AB in A festgehalten, und am Ende B von den Kräften R_1 und R_2 in Anspruch genommen wird, während zwischen A und B die gleichmässig vertheilte Belastung R_1 sich befindet.

Fig. 280.



Es sei nun AB die Biegungscurve, B der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, wo die Abscissen von B gegen C und die Ordinaten nach abwärts gezählt werden, und man setze für eine beliebige Stelle M, $\overline{BP} = x$ und $\overline{MP} = y$, für den Punct A aber $\overline{BC} = l$ und die Biegung $\overline{AC} = \delta$.

In Gemässheit des §. 232 hat man jetzt

$$mt\,\frac{d^2 y}{d x^2} = -R_1 x + \tfrac{1}{2}\,\frac{R_1 x^2}{l} + R_2 y \quad . \quad (523)$$

und wenn man der Kürze wegen $\frac{R_1}{mt} = n$ und $\frac{R_2}{mt} = q$ setzt, auch

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = n\left(-x + \frac{x^2}{2l}\right) + qy \quad . \quad . \quad . \quad (524).$$

Das Integrale hiervon, zugleich die Gleichung der Biegungscurve, ist

$$y = \frac{n}{q}\left[x - \frac{x^2}{2l} + \frac{1}{lq}\left(\frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} - 1\right)\right] \quad (525),$$

wo $e = 2\cdot7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, und zu beachten ist, dass für den Punct B die Coordinaten x und y verschwinden müssen.

Biegung.

§. 241.

Allgemeine Gleichung. Aus der Gleichung (525) erhält man die Biegung $y = \delta$ für $x = l$. Es wird nämlich

$$\delta = \frac{n}{q}\left[\tfrac{1}{2}l - \frac{1}{lq}\left(1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{R_1}{2R_2}\left[l - \frac{2mt}{R_2 l}\left(1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right)\right] = \quad (526).$$

Z. B. Es befinde sich eine schmiedeeiserne Schliesse in dem Falle wie in der Fig. 279. Ihr Querschnitt sei ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h, und es sei insbesondere

$b = 1\frac{1}{2}''$	R_1 das eigene Gewicht der halben Schiene $= 1\frac{1}{2}$ Ztr.,	
$h = 2''$	$R_2 = 400$ Ztr.	Hiernach hat man
$l = 200''$	$m = 250000$.	

$f = bh = 8\square''$	$n = \frac{R_1}{mt} = 0{\cdot}000006$	$l\sqrt{q} = 8$
$t = \frac{1}{12} f h^2 = 1$	$q = \frac{R_2}{mt} = 0{\cdot}0016$	$e^{l\sqrt{q}} = e^8 = 2982$
$mt = 250000$	$\sqrt{q} = 0{\cdot}04$	$e^{-l\sqrt{q}} = e^{-8} = \frac{1}{2982}$

somit

$$\delta = \frac{3}{1600}\left[200 - \frac{2}{0{\cdot}32}\left(1 - \frac{2}{2982 + \frac{1}{2982}}\right)\right] = 0''{\cdot}363.$$

§. 242.

Näherungsformeln.

I. Sind die Werthe von l und R_2 so klein, dass sich $e^{l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise setzen:

$$\delta = \frac{5}{24}\,\frac{R_1\,l^3}{mt}\left(1 - \frac{61}{150}\,q\,l^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (527)^{*)}$$

---

*) Es ist allgemein

$$e^u + e^{-u} = 2\left[1 \quad \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + \ldots\right],$$

somit

$$\frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + \ldots} = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{24}u^4 - \frac{61}{720}u^6 + \ldots,$$

und

$$1 - \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{5}{24}u^4 + \frac{61}{720}u^6 - \ldots = \frac{1}{2}u^2\left(1 - \frac{5}{12}u^2 + \frac{61}{360}u^4 - \ldots\right).$$

Für $u = l\sqrt{q}$ wird

$$1 - \frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}} = \frac{1}{2}q\,l^2\left(1 - \frac{5}{12}q\,l^2 + \frac{61}{360}q^2\,l^4 - \ldots\right),$$

Für $R_2 = o$ wird auch $q = o$, und man erhält insbesondere

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{R_1 l^3}{m t} = \frac{5}{384} \cdot \frac{(2 R_1)(2 l)^3}{m t},$$

übereinstimmend mit der im ersten Hauptstücke gefundenen Relation (77), welche sich auf den Fall bezieht, wo die gleichmässig belastete Schiene bloss an beiden Enden aufliegen würde.

II. Ist $e^{l\sqrt{q}}$ gross genug, um $\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}$ gegen die Einheit vernachlässigen zu dürfen, so kann man sich erlauben, von der annäherungsweisen Formel

$$\delta = \frac{R_1}{2 R_2}\left(l - \frac{2 m t}{R_2 l}\right) = \frac{R_1}{2 R_2} l \left(1 - \frac{2}{q l^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (528)$$

Gebrauch zu machen. Diese Formel kann Anwendung finden, wenn die Länge der Schiene im Vergleiche zum Querschnitte, und die Kraft R_2 im Vergleiche zu R_1 gross ist, wie diess in dem Beispiele des vorigen §. der Fall war.

Wird die Belastung per Längeneinheit der Schiene mit g bezeichnet, so hat man $R_1 = g l$ und hiermit

$$\delta = \frac{g}{2 R_2}\left(l^2 - \frac{2 m t}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (529),$$

Hat die Schiene nur ihr eigenes Gewicht zu tragen, und ist dasselbe $= \gamma$ Zentner per Cubikzoll, so wird noch $g = f\gamma$, daher

$$\delta = \frac{f\gamma}{2 R_2}\left(l^2 - \frac{2 m t}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (530).$$

wo f die Querschnittsfläche der Schiene ist.

---

und in Folge dessen nach der Formel (526)

$$\delta = \frac{R_1}{2 R_2}[l - l(1 - \tfrac{5}{12} q l^2 + \tfrac{61}{360} q^2 l^4 - ..)] =$$

$$= \frac{R_1}{2 R_2}[\tfrac{5}{12} q l^3 - \tfrac{61}{360} q^2 l^5 + ..] = \tfrac{5}{24}\frac{R_1 l^3}{m t}(1 - \tfrac{61}{150} q l^2 + ..).$$

Vernachlässigt man die höheren Potenzen von $q l^2$, so ist annäherungsweise

$$\delta = \tfrac{5}{24}\frac{R_1 l^3}{m t}(1 - \tfrac{61}{150} q l^2).$$

Tragvermögen.

§. 243.

Allgemeine Relation. Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct M ist mittelst der Gleichung (523) ausgedrückt. Bezeichnet man dasselbe dem §. 233 gemäss mit $R z$, so hat man

$$R z = -R_1 x + R_2 y + \tfrac{1}{2} \frac{R_1 x^2}{l},$$

und mit Rücksicht auf den Werth (525) für y

$$R z = -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{m t}{l} \left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] \quad (531).$$

Das negative Zeichen zeigt bloss an, dass die Curve AB nach aufwärts gekrümmt ist, ohne dass dasselbe weiter in Betracht zu kommen hat.

Nach den in der Figur 275 angenommenen Bezeichnungen und dem §. 233 würde an der Stelle M die Spannung der äussersten Fasern an der convexen Seite der Krümmung

$$s_1 = \frac{h' R z}{t} = \frac{m h' R_1}{l R_2} \left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right],$$

die Pressung der äussersten Fasern an der concaven Seite der Krümmung aber

$$p_1 = \frac{h'' R z}{t} = \frac{m h'' R_1}{l R_2} \left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right]$$

sein, wenn die Länge des Prismas neutral geblieben wäre. Nach dem §. 233 bringt aber auch der Zug R_2 in sämmtlichen Fasern des Querschnittes eine Spannung hervor, die per □' mit $s_2 = \frac{R_2}{f}$ zu bemessen ist. Durch Combination dieser Resultate findet man nunmehr bezüglich des gewählten Querschnittes in M, die grösste Spannung

$$s = (s_1 + s_2) = \frac{m h' R_1}{l R_2} \left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right] + \frac{R_2}{f},$$

und die grösste Pressung

$$p = (p_1 - s_2) = \frac{m h' R_1}{l R_2} \left[1 - \frac{e^{(l-x)\sqrt{q}} + e^{-(l-x)\sqrt{q}}}{e^{l\sqrt{q}} + e^{l-\sqrt{q}}}\right] - \frac{R_2}{f}.$$

Diese Werthe für s und p wachsen in numerischer Hinsicht

mit x, und werden für $x=l$ am grössten, wornach der gefährliche Querschnitt an der Stelle A (Fig. 280) liegen muss. In diesem besonderen Querschnitte sind die Anspruchsnahmen in den äussersten Fasern

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{mh' R_1}{l R_2}\left[1-\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}\right]+\frac{R_2}{f} \\ \text{und } p &= \frac{mh'' R_1}{l R_2}\left[1-\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}\right]-\frac{R_2}{f} \end{aligned}\right\} \quad (532).$$

Sollen die Elasticitätsgränzen weder bei der Ausdehnung, noch bei der Zusammendrückung überschritten werden, so darf höchstens $s=a$ oder $p=r$ sein. Setzt man daher

$$1-\left(\frac{2}{e^{l\sqrt{q}}+e^{-l\sqrt{q}}}\right)=c,$$

und nennt man die grösste zulässige Belastung, d. i. das Tragvermögen $Max.\,R_1$, so ist bei Erreichung der einen oder der andern Elasticitätzgränze

$$\text{entweder } a = \frac{m\,h' c}{l\,R_2}\,Max.\,R_1 + \frac{R_2}{f}$$
$$\text{oder } r = \frac{m\,h'' c}{l\,R_2}\,Max.\,R_1 - \frac{R_2}{f},$$

und hieraus

$$Max.\,R_1 = \left\{\begin{aligned} &\text{entw. } (af-R_2)\,\frac{R_2\,l}{m\,c\,f\,h'} \\ &\text{oder } (rf+R_2)\,\frac{R_2\,l}{m\,c\,f\,h''} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (533)$$

von diesen Alternativwerthen aber stets der kleinere auszuwählen.

Für das im §. 241 gewählte Beispiel ist $f=3\,\square''$, $R_2=400$ Ztr., $l=200''$, $m=250000$, $h'=h''=\frac{1}{2}h=1''$, und wegen $l\sqrt{q}=8$

$$c = 1-\left(\frac{2}{e^{8}+e^{-8}}\right), \text{ daher nahe } = 1.$$

Sei noch $a=200$ Zentner, so erhält man aus der ersten Alternative, welche augenscheinlich den kleineren Werth gibt,

$$Max.\,R_1 = 21\tfrac{1}{3} \text{ Zentner},$$

und das Tragvermögen per Längeneinheit (Zoll) ist hiernach

$$g = \frac{Max.\,R_1}{l} = \frac{8}{75} \text{ Zentner}.$$

Für $R_2=af$ ist gar kein Tragvermögen vorhanden. Diess

erklärt sich dadurch, dass sodann der Zug R_2 in der Richtung der Längenaxe allein schon genügt, um die Elasticitätsgränze für die Ausdehnung zu erreichen.

§. 244.

Näherungsformeln.

I. Sind — wie im §. 242 ad I — die Werthe von R_2 und l so klein, dass sich $e^{l\sqrt{q}}$ nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man annäherungsweise setzen

$$Max.\, R_1 = \begin{cases} \text{entw. } \frac{2at}{lh'}\left[1 + R_2\left(\frac{5}{12}\frac{l^2}{mt} - \frac{1}{af}\right)\right] \\ \text{oder } \frac{2rt}{lh''}\left[1 + R_2\left(\frac{5}{12}\frac{l^2}{mt} + \frac{1}{rf}\right)\right] \end{cases} \quad (534)\text{*}).$$

Für $R_2 = 0$ erhält man insbesondere

$$Max.\, R_1 = \begin{cases} \text{entw. } \frac{2at}{lh'} \\ \text{oder } \frac{2rt}{lh''}, \end{cases} \text{ folglich } Max.\,(2R_1) = \begin{cases} \text{entw. } \frac{8at}{(2l)h'}, \\ \text{oder } \frac{8rt}{(2l)h''}, \end{cases}$$

übereinstimmend mit der Relation (109) im ersten Hauptstücke, wie diess zu erwarten war, da für $R_2 = 0$ der in der Figur 279 dargestellte Fall in den dortigen Fall IV (Fig. 64) übergeht.

Für die früher gewählte Durchzugschiene und für $R_2 = 2$ Ztr. wäre z. B. $Max.\, R_1 = 2{\cdot}026$, für $R_2 = 0$ aber $Max.\, R_1 = 2$ Ztr.

---

*) Nach der Anmerkung zum §. 242 ist

$$c = 1 - \left(\frac{2}{e^{l\sqrt{q}} + e^{-l\sqrt{q}}}\right) = \tfrac{1}{2} q l^2 \left[1 - \tfrac{5}{12} q l^2 + \ldots\right] \text{ und}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{2}{q l^2}\left[1 + \tfrac{5}{12} q l^2 + \ldots\right] = \frac{2mt}{R_2 l^2}\left(1 + \tfrac{5}{12} q l^2 + \ldots\right),$$

somit einerseits

$$(af - R_2)\frac{R_2 l}{mcfh'} = \left(\frac{af - R_2}{fh'}\right) \cdot \frac{2t}{l}\left(1 + \tfrac{5}{12} q l^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2at}{lh'}\left(1 - \frac{R_2}{af}\right)\left(1 + \tfrac{5}{12}\frac{R_2 l^2}{mt} + \ldots\right) = \frac{2at}{lh'}\left[1 + R_2\left(\tfrac{5}{12}\frac{l^2}{mt} - \frac{1}{af}\right) + \right]$$

und andererseits

$$(rf + R_2)\frac{R_2 l}{mcfh''} = \frac{2rt}{lh''}\left[1 + R_2\left(\tfrac{5}{12}\frac{l^2}{mt} + \frac{1}{rf}\right) + \right],$$

woraus sich die angenäherten Gleichungen (534) ergeben.

II. Sind — wie im §. 542 ad II — die Werthe von l und q gross genug, damit c sich nur wenig von der Einheit unterscheidet, so kann man sich erlauben, $c = 1$ selbst zu setzen, und das Tragvermögen aus den Alternativ-Relationen

$$Max. R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{entw.} \left(\frac{af - R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h} \\ \text{oder} \left(\frac{rf + R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h''} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (535)$$

zu bestimmen.

So ist z. B. diese Näherungsmethode bei der oben betrachteten Schiene für $R_2 = 400$ Ztr. zulässig.

In diesem Falle II wird in der Regel der erste Alternativwerth massgebend sein, nämlich

$$Max. R_1 = \left(\frac{af - R_2}{f}\right) \frac{R_2 l}{m h'}.$$

Man bemerkt, dass hier das Tragvermögen mit dem Zuge R_2 variirt, und am grössten wird für

$$\frac{d\,(Max. R_1)}{d R_2} = 0, \text{ d.h. für } R_2 = \tfrac{1}{2} af.$$

Dasselbe wird sodann

$$Max. R_1 = \tfrac{1}{4} \frac{a^2 f l}{m h'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (536).$$

Dieses Resultat ist wichtig. Es zeigt, dass es unter den bezeichneten Umständen vortheilhaft ist, wenn der Zug R_2 die Hälfte von der grössten zulässigen Spannung af ausmacht.

Ex. Für die oben betrachtete Durchzugschiene ist $f = bh$, und $h' = \frac{1}{2} h$, also

$$Max. R_1 = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{m} b l.$$

Die betreffenden speciellen Werthe substituirt zeigen, dass das grösste Tragvermögen $Max. R_1 = 24$ Ztr. dann vorhanden ist, wenn der Bedingung gemäss der Horizontalzug $R_2 = \frac{1}{2} af = 300$ Ztr. ist. Wird dieser Zug anders gewählt, entweder grösser oder kleiner, so wird jedenfalls das Tragvermögen vermindert.

Auch hat man für das Verhältniss zwischen den beiden einwirkenden Kräften

$$Max. R_1 : R_2 = \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{m} b l : \tfrac{1}{2} abh = 1 : \frac{hm}{al},$$

also in dem speciellen Falle $= 1 : 12\frac{1}{2}$.

Bei der Anwendung dieser Formeln muss man sich jedoch versichern, ob c in der That der Einheit nahe kommt, was dann der Fall sein wird, wenn der Exponent von e, nämlich $l\sqrt{q}$, nicht kleiner als 6 ist, wie in dem obigen Beispiele.

§. 245.

Regeln für die practische Anwendung von Schliessen.

Die Resultate dieses Kapitels führen zu nützlichen Regeln, welche bei der Anwendung von Schliessen zu beachten sind.

Man setze (Fig. 279)

die Länge der horizontal liegenden Schiene . . . $= 2l = L$,
den beiderseitigen Horizontalzug . . . . $= R_2$,
das eigene Gewicht der Schiene . . . . $= G$,
das Gewicht der Längeneinheit derselben . . . . . $= g = \frac{G}{L}$,
das Gewicht der cubischen Einheit aber . . . . $= \gamma$,
den Schienenquerschnitt . . . . $= f$,
den Abstand des Schwerpunctes dieses Querschnittes von den untersten Fasern . . . . $= h'$,
jenen von den obersten Fasern . . . . $= h''$,
die ganze verticale Höhe . . . . $(h' + h'') = h$,
das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct gehende horizontale Axe $= t = fd^2$,
die grösste zulässige Spannung, welcher das Schienenmaterial ausgesetzt werden kann . . . . $= a$,
und den Modul der Längenveränderung desselben . . . $= m$.

Hat die Schiene bloss ihr eigenes Gewicht zu tragen, so ist

$$R_1 = \tfrac{1}{2}G = \tfrac{1}{2}gL = \tfrac{1}{2}\gamma f L,$$

und

$$u = l\sqrt{q} = l\sqrt{\frac{R_2}{mt}} = \tfrac{1}{2}L\sqrt{\frac{R_2}{mfd^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{d}\sqrt{\frac{R_2}{mf}} = \tfrac{1}{2}\frac{L}{d}\sqrt{\frac{s_2}{m}},$$

wo s_2 den horizontalen Zug per □'' Querschnitt bedeutet, und der Werth von $l\sqrt{q}$ wieder mit u bezeichnet ist. Auch wird der in diesem Kapitel angegebene Werth für c

$$c = 1 - \frac{2}{(e^u + e^{-u})}.$$

Diess vorausgesetzt, ist Folgendes zu bemerken:

1. Das eigene Gewicht der Schiene darf nie das Tragvermögen überschreiten. Dieses letztere ist in der Regel nach der ersten Alternative aus der Relation (533) zu bestimmen. Man hat also wegen

$$G \overset{=}{<} Max.\,2\,R_1$$

$$G \overset{=}{<} (af - R_2)\,\frac{R_1 L}{m h' c f},$$

$$\gamma f L \overset{=}{<} (a - s_2)\,\frac{s_2 f L}{m c h'},$$

und hieraus die Bedingung

$$\gamma \overset{=}{<} (a - s_2)\,\frac{s_2}{m h' c} \quad \ldots\ldots \quad (537).$$

Ist z. B. eine schmiedeeiserne Schiene von 1000 Zollen Länge mit einem rechteckigen Querschnitte, dessen Breite $b = 1''$ und Höhe $h = 4''$ beträgt, versehen, und das Eisen von der Beschaffenheit, dass man $\gamma = \frac{1}{400}$ Ztr., $a = 180$ Ztr. und $m = 250000$ setzen kann, so muss wegen $h' = \frac{1}{2} h = 2''$, und $d^2 = \frac{1}{12} h^2 = \frac{4}{3}$ für jeden Horizontalzug die Bedingung

$$1250\,c \overset{=}{<} (180 - s_2)\,s_2$$

vorhanden sein, wenn $u = \frac{1}{2}\sqrt{3 s_2}$ und $c = 1 - \frac{2}{(e^u + e^{-u})}$ bedeutet. Erreicht u den Werth 6, so kann man c mit der Einheit verwechseln.

2. Die Biegung in der Mitte der Schiene, welche durch das eigene Gewicht hervorgebracht wird, ist nach der Formel (526) für jeden Horizontalzug

$$\delta = \frac{R_1}{2 R_2}\,l \left[1 - \frac{2 m t}{R_1 l^2}\,c\right],$$

daher wegen $R_1 = \frac{1}{2} f L \gamma$, $R_2 = s_2 f$, $l = \frac{1}{2} L$ und $\frac{2 m t}{l^2 R_2} = \frac{2}{u^2}$ auch

$$\delta = \frac{1}{8}\,\frac{\gamma L^2}{s_2}\left(1 - \frac{2 c}{u^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (538).$$

Für die in dem vorigen Beispiel gegebenen speciellen Werthe erhält man

$$\delta = \frac{625}{2 s_2}\left(1 - \frac{8 c}{3 s_2}\right).$$

3. Verlangt man, dass bei der gespannten Schiene das grösstmögliche Tragvermögen vorhanden ist, so hat man im Sinne der Gleichung (536) den Horizontalzug $R_2 = \frac{1}{2} a f$, daher $s_2 = \frac{1}{2} a$ zu wählen, wenn $c = 1$ anzunehmen erlaubt ist. In dem gewählten Beispiele hat man für $s_2 = \frac{1}{2} a = 90$ Ztr., $u = \frac{3}{2}\sqrt{30} = 8{\cdot}2$, daher ist c sehr nahe die Einheit. Da übrigens der Werth von $s_2 = 90$ Ztr. der allgemeinen Bedingung

$$1250 c \gtreqless (180 - s_2) s_2$$

Genüge leistet, so ist der proponirte Horizontalzug unbedenklich zulässig. Bei diesem Horizontalzuge ist die Biegung

$$\delta \quad \frac{625}{2 s_2} \left(1 - \frac{8 c}{3 s_2}\right) = 3{\cdot}37 \text{ Zoll},$$

jener Horizontalzug aber

$$R_2 = f s_2 = 360 \text{ Ztr.}$$

Wird der Horizontalzug anders gewählt, so vermindert sich das Tragvermögen.

4. Es ist oft wünschenswerth, den Horizontalzug so zu wählen, dass die Durchbiegung der Schiene ein Minimum wird. Zu diesem Behufe muss man s_2 so gross, als es angeht, nehmen, und das eigene Gewicht der Schiene das Tragvermögen erreichen lassen, welche Bedingung offenbar auf die Gleichung

$$\gamma = (a - s_2) \frac{s_2}{m h' c}$$

führt. Ist c nahe gleich der Einheit, so erhält man

$$s_2 = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 m \gamma h'}{a^2}}\right).$$

Für das vorige Beispiel ist $s_2 = 0{\cdot}96 a = 172{\cdot}8$ Ztr., somit

$$R_2 = f s_2 = 691{\cdot}2 \text{ Ztr.},$$

und diese Resultate sind brauchbar, weil wegen $u = 11{\cdot}4$ der Werth von c der Einheit sehr nahe kommt. Die Biegung selbst wird

$$\delta = \frac{625}{2 s_2} \left(1 - \frac{8}{3 s_2}\right) = 1{\cdot}78 \text{ Zoll},$$

und sie ist die kleinste, welche unter den angegebenen Umständen möglich ist, wenn die Sicherheit nicht gefährdet werden soll. Das Tragvermögen ist jedoch nicht so gross, wie unter den ad 3 bezeichneten Umständen, sondern bedeutend geringer. Es genügt jedoch, weil die Schiene noch immer ihr eigenes Gewicht mit Sicherheit tragen kann.

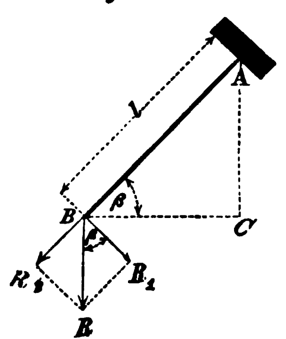
Die Fälle in der Praxis, wo c nahe der Einheit kommt, treten bei langen Schienen und bei grossen Horizontalzügen ein, sie sind also gerade die wichtigeren.

Hat die Schiene ausser dem eigenen Gewichte noch eine andere gleichförmige Belastung zu tragen, so ist Behufs der Durchführung der nöthigen Untersuchung statt g nur das entsprechende Totalgewicht per Längeneinheit zu setzen.

Anhang zum 1. und 2. Kapitel.

Wird (Fig. 281) ein schief gelagerter Träger AB an einem Ende festgehalten, und am andern Ende B mit der Belastung R beansprucht, so befindet sich derselbe in dem im 1. Kapitel betrachteten Falle, wenn man für die Componenten von R die Werthe $R_1 = R \cos\beta$ und $R_2 = R \sin\beta$ substituirt. Unter dieser Bedingung kann man von den dort gegebenen Formeln Gebrauch machen. Selbstverständlich ist dann auch betreffenden Orts $Max. R_1 = \cos\beta \, (Max. R)$ und zugleich $R_2 = \sin\beta \, (Max. R)$ zu setzen, und hiernach die Bestimmung von $Max. R$ zu veranlassen. In den meisten vorkommenden Fällen wird man in der Regel von den genäherten Formeln (519) Gebrauch machen können. Lässt man den ersten Alternativwerth als den kleineren gelten, was gewöhnlich der Fall ist, so erhält man

Fig. 281.



$$\cos\beta \, (Max. R) = \frac{at}{l h'} \left[1 + \sin\beta \left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af} \right) Max. R \right],$$

und hieraus

$$Max. R = \frac{at}{h' l \cos\beta} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{at}{l h'} \, tg\,\beta \left(\frac{l^2}{3mt} - \frac{1}{af} \right)} \right\},$$

endlich näherungsweise

$$Max. R = \frac{at}{h' l \cos\beta} \left[1 + \frac{l}{h'} \, tg\,\beta \left(\frac{1}{3} \frac{a}{m} - \frac{d^2}{l^2} \right) \right] \quad . \quad (539).$$

Der Factor $\frac{at}{h' l \cos\beta}$ vor der Klammer bedeutet offenbar das Tragvermögen in dem Falle, wenn der Träger die Lage und Länge

von BC hätte, wo BC die horizontale Projection der wirklichen Trägerlänge ist. Das eigentliche Tragvermögen $Max.\,R$ ist also nach Umständen bald **kleiner**, bald **grösser** als der erwähnte Werth $\frac{at}{k' l \cos\beta}$, kann übrigens auch **eben so gross** sein. Diess hängt davon ab, ob $\frac{1}{3}\frac{a}{m} >$ oder $<$ oder $= \frac{d^2}{l^2}$ ist.

Uebrigens ist der Gebrauch der Formel (539) an die Bedingung geknüpft, dass das 2. Glied in den Klammern, nämlich $\frac{l}{k'}\, tg\,\beta \left(\frac{1}{3}\frac{a}{m} - \frac{d^2}{l^2}\right)$ im Vergleiche zur Einheit nicht beträchtlich ist. Ist dieses Glied so klein, dass es ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden kann, so wird annäherungsweise $Max.\,R = \frac{at}{k' l \cos\beta}$, also das Tragvermögen beinahe so gross, wie wenn der Träger horizontal gelegen, und seine Länge mit der horizontalen Projection BC übereinstimmend wäre. In den meisten Fällen der Praxis wird diese Berechnungsweise hinreichend genau sein.

Drittes Kapitel.

Widerstand eines verticalen Ständers, dessen oberes Ende belastet und dessen unteres Ende unterstützt ist. (Fig. 282.)

§. 246.

Biegungscurve. Wäre das Material vollkommen homogen, und die Belastung über den Querschnitt gleichmässig vertheilt, so würde der Ständer bloss eine Zusammendrückung in der Richtung der Längenaxe erfahren, diese letztere aber ihre geradlinige Form beibehalten, wie diess auch in den Abschnitten des ersten Hauptstückes angenommen worden ist. Diese Bedingungen sind indessen nicht immer in genügender Weise vorhanden. Sodann ist zu besorgen, dass eine Ausbiegung der Längenaxe erfolgt. Die Untersuchung des Gleichgewichtes in diesem Falle bildet den Gegenstand dieses Kapitels.

Fig. 282.

Zu diesem Behufe sei *ADB* die Biegungscurve, welche auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem derart bezogen wird, dass in *A* der Coordinatenursprung ist, von wo aus die Abscissen vertical nach abwärts und die Ordinaten horizontal gezählt werden. Dabei wird angenommen, dass die Endpuncte *A* und *B* auch nach der Biegung in derselben Verticalen liegen.

Man setze jetzt für irgend einen Punct *M* der Curve
die Abscisse *AP* . . . . $= x$,
und die Ordinate *MP* . . . . $= y$,
ferner die Höhe des Ständers *AB* . . . . $= l$,
seine grösste Ausbiegung *CD* . . . . $= \delta$,
seinen Querschnitt . . . . $= f$,
den Modul der Längenveränderung des Materiales . . . $= m$
und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die durch den Schwerpunct desselben normal auf die Biegungsrichtung gezogene Axe . . . . $= t$.

Das statische Kraftmoment in Bezug auf den Punct *M* ist Qy, daher hat man in Gemässheit des §. 232

$$m t \frac{d^2 y}{d x^2} = - Q y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (540).$$

Das Integrale dieser Differentialgleichung ist

$$y = \delta \sin \left(x \sqrt{\frac{Q}{mt}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (541)^{*)},$$

zugleich die Gleichung der Biegungscurve.

---

*) Setzt man $\frac{dy}{dx} = u$, so wird

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{u\,du}{dy}, \text{ somit } mt \frac{u\,du}{dy} = - Qy$$

und hiernach

$$u^2 = \frac{Q}{mt} (\delta^2 - y^2),$$

wenn man beachtet, dass für $y = \delta$ die Grösse u verschwinden muss. Substituirt man wieder statt u den Werth $\frac{dy}{dx}$ und reducirt, so hat man

$$\sqrt{\frac{Q}{mt}}\, dx = \frac{dy}{\sqrt{\delta^2 - y^2}}.$$

In der Gleichung (541) muss für $x = l$ die Ordinate $y = 0$, daher auch $sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{mt}}\right) = 0$ werden, falls δ nicht selbst Null ist. Diess kann nur für $l\sqrt{\frac{Q}{mt}} = i\pi$ geschehen, wenn $\pi = 3{\cdot}1415926$, nämlich das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser des Kreises, i aber eine der auf einander folgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... ist.

Hiernach hat man

$$Q = \frac{i^2 \pi^2 m t}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (542)$$

und

$$y = \delta \sin\left(\frac{i \pi x}{l}\right) \quad \ldots \ldots \quad (543).$$

Der Werth von i ist im Allgemeinen unbestimmt. Er bezieht sich auf die nähere Gestalt der Biegungscurve. So z. B. hat diese für $i = 1$ die Gestalt Fig. 282, für $i = 2$ jene der Fig. 283, für $i = 3$ jene der Fig. 284, u. s. w., wornach die Zahl der Wendepuncte der Curve stets durch $(i - 1)$ ausgedrückt erscheint. Merkwürdig bleibt es übrigens, dass, wie auch der Werth von i sein mag, die Biegung δ ihrer Grösse nach nicht berechnet werden kann.

Fig. 283. Fig. 284.

A A

B B

Für diese Wahrnehmung lässt sich wohl eine Erklärung geben. In der Gleichung (540) bedeutet nämlich das erste Glied $mt\frac{d^2y}{dx^2}$ das statische Moment des Widerstandes von Seite des Materiales, das andere aber, nämlich $-Qy$, das statische Moment der wirkenden Belastung. Mit der Zunahme der Biegung, also auch mit

---

Das Integrale hiervon ist mit Rücksicht auf die Bedingung, dass die Coordinaten x und y zugleich verschwinden,

$$x\sqrt{\frac{Q}{mt}} = arc.\ sin\left(\frac{y}{d}\right),$$

woraus, wie oben folgt

$$y = \delta \sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{mt}}\right).$$

jener von y, wachsen beide Glieder gleichmässig, so dass, wenn bei einer gewissen Biegung Gleichgewicht bestanden hat, das letztere auch bei einer grösseren Biegung nicht gestört wird, vorausgesetzt, dass die Elasticitätsgränzen nicht überschritten werden. Es kann sich also bei verschiedenen Biegungen unter sonst gleichen Umständen der Ständer im Gleichgewichte befinden, und die Kenntniss von dem Stattfinden des letzteren ist nicht genügend, um auf die Grösse der Biegung zurück zu schliessen.

§. 247.

Grösse der Last Q, welche eine Biegung hervorbringen kann. Richtung der Biegung. Nach der Relation (542) ist allgemein

$$Q = \frac{i^2 \pi^2 m t}{l^2}$$

diejenige Last, welche den Ständer in der gebogenen Form erhalten kann. Durch eine kleinere Last kann diess nicht geschehen. Die obige Belastung ist mit i variabel, und nimmt mit m und t im geraden und einfachen Verhältnisse zu, hingegen mit dem Quadrate der Ständerhöhe ab. Der ungünstigste Fall findet für $i = 1$ (Fig. 282) statt, und für diesen ist

$$Q = \frac{\pi^2 m t}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (544).$$

Zur Bestimmung von t ist die Kenntniss nöthig, in welcher Richtung die Ausbiegung erfolgt. Im Allgemeinen ist diejenige Richtung als massgebend anzunehmen, für welche das Trägheitsmoment t des Querschnittes am kleinsten wird. Wäre z. B. der Querschnitt ein Rechteck, und dessen kleinere Seite h, die grössere aber b, so wird die Biegung nach der Richtung der kleineren Seite h zu wählen, somit $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$, und hiernach

$$Q = \frac{\pi^2}{12} \frac{m b h^3}{l^2} = \frac{\pi^2}{12} \frac{m f h^2}{l^2}$$

zu setzen sein. Es ist nämlich in diesem Falle das Trägheitsmoment $t = \frac{1}{12} b h^3$ das kleinste von allen, welche sich auf die verschiedenen Biegungsrichtungen beziehen (§. 120 ad 1). Differiren die Seiten b und h nur wenig von einander, so ist es bei der grösseren oder geringeren Ungleichförmigkeit in der Materie auch wohl mög-

lich, dass die Biegung nicht in der Richtung der kleineren Seite eintritt.

Die Betrachtungen in den §§ 117 bis inclusive 122 finden hier insoferne zweckmässige Anwendung, als es sich um die Bestimmung der Biegungsrichtung handelt. Dabei hat man nämlich im Querschnitte des Ständers die Drehungsaxe so zu wählen, dass in Bezug auf dieselbe das Trägheitsmoment am kleinsten wird, sodann aber normal auf diese Drehungsaxe die Biegungsrichtung anzunehmen. Nach den §§. 120 und 121 gibt es unzählige Figuren, bei welchen das Trägheitsmoment t constant bleibt, wie auch die fragliche Drehungsaxe durch den Schwerpunct gezogen wird.

Hat daher der Ständer eine solche Querschnittsform (z. B. ein Quadrat), so ist seine Biegung in jeder Richtung gleich wahrscheinlich, und diese wird lediglich von Zufälligkeiten bestimmt.

Bei Versuchen mit Stäben quadratischen Querschnittes erfolgte in der That die Biegung ohne Unterschied bald in der Richtung der Diagonalen, bald in jener der Seiten.

Tragvermögen.

§. 248.

Unbestimmte Gleichung für das Tragvermögen. Behält man ausser den Bezeichnungen in diesem Kapitel noch jene im §. 233 bei, und beachtet man, dass in dem vorliegenden Falle $Rz = Qy$, und nahezu $R_2 = Q$ gesetzt werden kann, wenn, wie vorausgesetzt ist, es sich nur um eine kleine Ausbiegung handelt, so hat man für jeden beliebig gelegenen Querschnitt M (Fig. 282) die Anspruchsnahme in den äussersten Fasern, und zwar an der convexen Seite

$$s = \frac{h' Q y}{t} - \frac{Q}{f} = Q\left(\frac{h' y}{t} - \frac{1}{f}\right),$$

an der concaven aber

$$p = \frac{h'' Q y}{t} + \frac{Q}{f} = Q\left(\frac{h'' y}{t} + \frac{1}{f}\right).$$

Die grössten Anspruchsnahmen finden für den grössten Werth von y, d. i. für $y = \delta$ statt, und der gefährliche Querschnitt liegt an

der Stelle D, wo jene Biegung δ vorhanden ist. An dieser Stelle darf für das Tragvermögen ($Max. Q$) höchstens $s = a$ oder $p = r$ werden. Man hat daher

$$\text{entweder } a = Max.\, Q\left(\frac{h'\,\delta}{t} - \frac{1}{f}\right)$$

$$\text{oder } r = Max.\, Q\left(\frac{h''\,\delta}{t} + \frac{1}{f}\right),$$

und hieraus das Tragvermögen, da $t = f\,d^2$ ist,

$$Max.\, Q = \left\{\begin{array}{l} \text{entw. } \dfrac{a f}{\left(\dfrac{h'\,\delta}{d^2} - 1\right)} \\ \text{oder } \dfrac{r f}{\left(\dfrac{h''\,\delta}{d^2} + 1\right)} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (545).$$

Von diesen Alternativwerthen gilt der kleinere, welcher in der Regel der zweite sein wird. Die Anwendung dieser Methode setzt jedoch die Ausbiegung δ als bekannt voraus. Da indessen diese Ausbiegung nicht berechnet werden kann, so lässt sich die Bestimmung des Tragvermögens auf die obige Weise nicht durchführen.

§ 219.

Zuhilfenahme practischer Resultate für die Bestimmung des Tragvermögens. Um der im vorigen §. sich ergebenen Unbestimmtheit in Betreff des Tragvermögens zu entgehen, erübrigt nichts anders, als geeignete Erfahrungsresultate zu benützen. Nur zwei Anhaltspuncte sind durch die Theorie geboten. Es dient nämlich die Formel (544) als erster Anhaltspunct, da in dem Falle, als die Belastung dieser Formel gemäss die Grösse $Q = \frac{\pi^2 m t}{l^2}$ erreicht, ein Ausbiegen des Ständers zu besorgen ist. Indem nun die Grösse dieser Ausbiegung unbestimmt bleibt, so kann dieselbe auch so weit gehen, dass die Sicherheit gefährdet wird. Diese Möglichkeit vor Augen gehalten, führt zu dem Schlusse, dass die grösste zulässige Belastung, nämlich das Tragvermögen $Max. Q$ jedenfalls kleiner, als der nach der Formel (544) berechnete Werth anzunehmen ist. Man kann daher setzen

$$Max.\, Q < \frac{\pi^2 m t}{l^2}.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe h, wenn $h < b$ ist, hat man insbesondere wegen $t = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} f h^2$.

$$Max\ Q < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{f h^2}{l^2} \text{ und hieraus } \frac{Max.\, Q}{f} < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{h^2}{l^2}.$$

Auch ist $\frac{Max.\, Q}{f}$ die grösste zulässige Pressung per □″ Querschnitt. Bezeichnet man dieselbe mit r', und setzt man unter Einem $l = nh$, so erhält man

$$r' < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{1}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (546).$$

In Anbetracht dieser Relation ist es möglich, dass die grösste zulässige Pressung per □″, wenigstens bei hohen Ständern, sich durch die Gleichung

$$r' = \frac{C}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (547)$$

genau genug ausdrücken lasse, wenn $C < \frac{\pi^2 m}{12}$ einen der Materialgattung und den Umständen entsprechenden Coefficienten bezeichnet. Hiernach wäre $Max.\, Q = \frac{Cf}{n^2}$.

Die Zahl $n = \frac{l}{h}$ zeigt an, wie oft die kleinere Seite des Querschnittes in der Ständerhöhe enthalten ist. Es folgt übrigens daraus nicht, dass das Tragvermögen gerade auf die bezeichnete Weise von n abhängen müsse. Diese Abhängigkeit könnte auch eine andere sein, ohne dass der Relation (546) widersprochen würde. Ob die oben gewählte Form annehmbar ist, hat die Erfahrung zu entscheiden. Diese lehrt nun, dass man die Gleichung (547) gelten lassen könne, wenn $n > 20$ ist, indem sodann die nach ihr berechneten Belastungen jene aus der Erfahrung abgeleiteten nicht übertreffen. Ist hingegen $n < 20$, so darf die obige Formel nicht mehr angewendet werden, weil sodann die nach ihr berechneten Belastungen zu gross würden. In solchen Fällen tritt der Nachtheil des Ausbiegens des Ständers desto mehr in den Hintergrund, und es wird das Tragvermögen r' per □′ desto mehr dem Werthe r für kurze Stücke (siehe erstes Hauptstück) nahe gerückt, je kleiner n ist. Für $n = 1$ hat der Ständer die Würfelform, in welchem Falle man $r' = r$ setzen kann. Aus dieser Bemerkung ergibt sich der zweite Anhalts-

punct zur Beurtheilung. Es leuchtet ein, dass die Werthe von r' abnehmen, wenn man n zunehmen lässt. Diese Abnahme ist je nach dem Materiale eine verschiedene. Nach den bisherigen Erfahrungen kann man Folgendes annehmen:

1. **Für Holzmaterialien.** Rondelet schliesst aus seinen Versuchen, dass man

für $n = 12$, $r' = \frac{5}{6} r$	für $n = 48$, $r' = \frac{1}{6} r$
„ $n = 24$, $r' = \frac{1}{2} r$	„ $n = 60$, $r' = \frac{1}{12} r$
„ $n = 36$, $r' = \frac{1}{3} r$	„ $n = 72$, $r' = \frac{1}{24} r$,

setzen darf, wenn für $n = 1$, $r' = r$ ist.

Um aus diesen Daten auch Zwischenwerthe für r' zu finden, kann man die Werthe von n als Abscissen und jene von r' als Ordinaten einer Curve betrachten, von welcher eben so viele Puncte bestimmt werden, als gleichzeitige Werthe von n und r' bekannt sind. Stellt man sich diese Puncte mittelst einer continuirlichen Linie verbunden vor, und beobachtet, wie sich die Ordinaten r' für andere Werthe von n herausstellen, so findet man ungefähr

für $n = 5$, $r' = 0{\cdot}96\, r$	für $n = 15$, $r' = 0{\cdot}75\, r$	(548).
„ $n = 10$, $r' = 0{\cdot}87\, r$	„ $n = 20$, $r' = 0{\cdot}62\, r$	

Von $n = 20$ angefangen, wird man es vorziehen, die Bestimmung der diessfälligen Werthe von r' aus der Formel (547) zu veranlassen, und man wird sich leicht darüber vereinigen, dass aus jener Formel für $n = 20$ gleichfalls der aus den Erfahrungsresultaten combinirte Werth $r' = 0{\cdot}62\, r$ zu folgen hat. Diese Bedingung führt zur Kenntniss des mit C bezeichneten Coefficienten; denn es ist allgemein $C = r' n^2$, somit wegen $r' = 0{\cdot}62\, r$ und $n = 20$, jener Coefficient $C = 248\, r$.

Auf diese Weise hat man für Holzmaterialien, wenn $n \overline{>} 20$ ist,

$$r' = \frac{248}{n^2} r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (549).$$

Diese Formel stimmt zwar nicht genau mit den angeführten Versuchsresultaten überein, sie genügt aber dennoch für den Gebrauch, wenn $n > 20$ ist, indem man versichert sein kann, dass so-

dann das Tragvermögen nicht zu gross erhalten wird. Dieses Tragvermögen wird nämlich

$$Max.\ Q = r'f = \frac{248\, r f}{n^2} = 248\, r \frac{b h^3}{l^2},$$

wenn der Querschnitt ein Rechteck, und bei diesem $h < b$ ist.

Nimmt man z. B. für vorzügliches Eichenholz und für andauernde Sicherheit $r = 12\frac{1}{2}$ Ztr., so würde

$$Max.\ Q = 3100 \frac{b h^3}{l^2},$$

ein Resultat, das mit den Erfahrungen Hodgkinson's nahe genug übereinstimmt. Geht man jetzt auf die Formel

$$Max.\ Q < \frac{\pi^2 m}{12} \frac{b h^3}{l^2} = \frac{\pi^2 m t}{l^2}$$

zurück, und setzt man für Eichenholz $m = 15000$, so wird in runder Zahl

$$Max.\ Q < 12600 \frac{b h^3}{l^2}.$$

Der letzte Werth ist ungefähr viermal so gross, wie das berechnete Tragvermögen $3100 \frac{b h^3}{l^2}$. Navier hält es für räthlich das Tragvermögen nur mit dem zehnten Theile jenes Ausdruckes $\frac{\pi^2 m t}{l^2}$ zu bemessen. Doch spricht er sich nicht über die näheren Umstände aus, unter welchen er das Tragvermögen erreicht wissen will. Mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen kann man die Meinung Navier's bei dem Vorhandensein von sehr ungünstigen Umständen gelten lassen.

2. Für Schmiedeeisen. In Betreff des Schmiedeeisens gib Navier gestützt auf mehrere Veruche an, dass

$$r' = r \text{ für } n = 1 \text{ bis } 2,$$
$$\text{ferner } r' = \tfrac{5}{8} r \text{ für } n = 12,$$
$$\text{und } r' = \tfrac{1}{2} r \text{ für } n = 24$$

angenommen werden kann. Die Zwischenwerthe lassen sich nicht mit Genauigkeit bestimmen. Es scheint, dass man sich der Wahrheit hinreichend annähern werde, wenn man gelten lässt,

$$\left.\begin{array}{ll|ll} \text{für } n = 5, & r' = 0{\cdot}90\, r & \text{für } n = 15, & r' = 0{\cdot}60\, r \\ \text{„ } n = 10, & r' = 0{\cdot}70\, r & \text{„ } n = 20, & r' = 0{\cdot}55\, r \end{array}\right\} (550).$$

Von $n = 20$ angefangen hat man wieder die Formel (547) zu benützen. Gibt man zu, dass aus dieser Formel für $n = 20$ der aus den Versuchen combinirte Werth $r' = 0{\cdot}55\,r$ folgen soll, so wird $C = r' n^2 = 220\,r$, und hiernach für Schmiedeeisen

$$r' = \frac{220\,r}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (551),$$

daher insbesondere für den rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, das Tragvermögen

$$Max.\,Q = 220\,r\,\frac{b\,h^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (552),$$

wenn $n \overline{\gtrless} 20$ und $b > h$ ist.

Sei nun für gutes Schmiedeeisen, wenn eine lange Dauer unter sonst nicht allzu ungünstigen Umständen verlangt wird, $r = 180$ Ztr., so erhält man

$$Max.\,Q = 39600\,\frac{b\,h^2}{l^2}.$$

Nach der Relation

$$Max.\,Q < \frac{\pi^2 m}{12} \cdot \frac{f b^2}{l^2} = \frac{\pi^2 m t}{l^2}$$

wäre aber, wenn man z. B. $m = 240000$ setzt,

$$Max.\,Q < 201400\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Von dem letzten Werthe beträgt das obige Tragvermögen ungefähr den fünften Theil. Dieses Resultat stimmt mit der Meinung Navier's überein. Es ist indessen räthlich, bei minderer Materialqualität und bei sehr ungünstigen Umständen das Tragvermögen noch kleiner zu nehmen. Desshalb wird man sich zuweilen entschliessen müssen, das Tragvermögen nur mit dem achten, neunten, zehnten Theile von $\frac{\pi^2 m t}{l^2}$ zu bemessen.

3. Für Gusseisen. In Betreff des Gusseisens gibt Navier auf Versuche gestützt an, dass man annehmen kann,

$$r' = \tfrac{2}{3}\,r \text{ für } n = 4,$$
$$r' = \tfrac{1}{2}\,r \text{ für } n = 8$$
$$\text{und } r' = \tfrac{1}{15}\,r \text{ für } n = 36,$$

wenn wieder $r' = r$ für $n = 1$ ist.

Versucht man aus diesen wenigen Daten nach dem Gesetze der Continuirlichkeit auf die Zwischenwerthe zu schliessen, so findet man ungefähr

$$\left.\begin{array}{ll|ll} \text{für } n = 5, & r' = 0{\cdot}62\,r & \text{für } n = 25, & r' = 0{\cdot}19\,r \\ \text{,, } n = 10, & r' = 0{\cdot}45\,r & \text{,, } n = 30, & r' = 0{\cdot}13\,r \\ \text{,, } n = 15, & r' = 0{\cdot}32\,r & \text{,, } n = 35, & r' = 0{\cdot}10\,r \\ \text{,, } n = 20, & r' = 0{\cdot}25\,r & & \end{array}\right\} \quad (553).$$

Indem man von $n = 20$ angefangen ebenfalls die Formel (547) $r' = \frac{C}{n^2}$ benützt, und annimmt, dass für $n = 20$ aus dieser Formel der unter (553) gegebene Werth $0{\cdot}25\,r$ folgen soll, so erhält man für den Coefficienten $C = n^2\,r' = 100\,r$, und hiernach für Gusseisen

$$r' = \frac{100\,r}{n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (554),$$

daher bei einem rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, das Tragvermögen

$$Max.\,Q = 100\,r\,\frac{b\,h^3}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (555),$$

wenn $n \overline{\gtrless} 20$ und $b > h$ ist.

Sei nun für Gusseisen von guter Qualität, wenn eine lange Dauer unter sonst nicht allzu ungünstigen Umständen verlangt wird, $r = 220$ Ztr., so erhält man

$$Max.\,Q = 22000\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Nach der Relation

$$Max.\,Q < \frac{\pi\,m}{12} \cdot \frac{b\,h^3}{l^2} = \frac{\pi^2\,m\,t}{l^2}$$

wäre aber, wenn man z. B. $m = 125000$ setzt,

$$Max.\,Q = 92500\,\frac{b\,h^3}{l^2}.$$

Von dem letzten Werthe beträgt das ausgemittelte Tragvermögen $18000\,\frac{b\,h^3}{l^2}$ nicht ganz den fünften Theil. Dieses Resultat stimmt mit der Meinung Navier's überein. Es ist indessen räthlich, bei minderer Materialqualität und bei sehr ungünstigen Umständen das Tragvermögen noch kleiner zu nehmen.

§. 250.

Ständer mit anderen, als mit rechteckigen Querschnitten. Massive und hohle Säulen. Ist die Höhe des Ständers nicht sehr gross im Vergleiche zu derjenigen Querschnittsdimension, in der die Richtung der Biegung geschieht, so hat man die Resultate (548), (550) und (553) zu benützen, sonst aber ist das Tragvermögen nach der Formel (544) derart zu berechnen, dass man von dem Resultate nur einen gewissen (vierten, fünften, zehnten u. s. w.) Theil annimmt. Die Grösse dieses Antheiles hängt von der Materialqualität und den besonderen Umständen ab, welche die Einwirkung der Belastung begleiten. Aus dem vorigen §. kann man in dieser Beziehung mehrere Daten entnehmen. Wird allgemein als Tragvermögen der N^{te} Theil von dem Werthe (544) zugelassen, so hat man

$$Max. Q = \frac{\pi^2}{N} \frac{m t}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (556),$$

wo für die verschiedenen Querschnittsformen nur mehr der entsprechende Werth von t zu substituiren kommt.

Für massive cylindrische Säulen ist nach der Formel (53) $t = \frac{1}{16} f D^2$, wenn D den Säulendurchmesser und $f = \frac{\pi}{4} D^2$ den Flächenraum des Säulenquerschnittes bezeichnet. Das Tragvermögen ist sodann

$$Max. Q = \frac{\pi^3 m}{64 N} \frac{D^4}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (557).$$

Sei z. B. für eine gusseiserne Säule $m = 125000$, $N = 5$, $D = 5''$ und $l = 150''$, so findet man

$$Max. Q = 12116 \frac{D^4}{l^2} = 336 \text{ Ztr.}$$

Da der Querschnitt $f = \frac{\pi}{4} D^2 = 19{\cdot}6 \square''$ beträgt, so kommt somit auf jeden Quadratzoll Querschnitt eine Pressung von

$$r' = \frac{336}{19{\cdot}6} = 17{\cdot}1 \text{ Ztr.}$$

Eben so hat man für einen hohlen Cylinder, wenn der Durchmesser des äusseren Kreises D, jener des inneren aber D', und die Ringfläche F genannt wird, wegen

$$t = \frac{\pi}{64} (D^4 - D_1^4) = \frac{1}{8} F (D^2 + D_1^2),$$

das Tragvermögen der hohlen Säule im Ganzen

$$Max.\,Q = \frac{\pi^2 m}{64N}\left(\frac{D^4 - D_1^4}{l^2}\right) = \frac{\pi^2 m}{8N} F\left(\frac{D^2 + D_1^2}{l^2}\right) \quad (558),$$

daher für die Pressung per □'' Querschnitt

$$r' = \frac{Max.\,Q}{f} = \frac{m\pi^2}{8N}\left(\frac{D^2 + D_1^2}{l^2}\right).$$

Wird nun das Tragvermögen einer massiven Säule mit jenem einer hohlen bei gleichem Materialaufwande und sonst gleichen Umständen verglichen, so sieht man, dass es vortheilhaft ist, hohle Säulen anzuwenden; denn das Verhältniss der beiden Tragfähigkeiten ist gleich jenem der betreffenden Trägheitsmomente t, welches in Gemässheit des §. 138 zu Gunsten der Röhre spricht.

Anmerkung 1. Der Widerstand des in der Fig. 285 dargestellten Ständers AB, dessen Ende bei B gezwungen wird, die ursprüngliche Richtung beizubehalten, kann nach den Regeln des vorstehenden Kapitels beurtheilt werden, wenn man die dort vorkommende Länge $l = 2\overline{AB}$ setzt, weil der betrachtete Ständer AB in einem Zustande sich befindet, der mit jenem des halben Ständers in der Fig. 282 correspondirt.

Fig. 285 u. Fig. 286.

Eben so kann der Widerstand des in der Fig. 286 dargestellten Ständers AB, wo beide Enden bei A und B gezwungen werden, die ursprüngliche Richtung beizubehalten, nach den erwähnten Regeln beurtheilt werden, wenn man $l = \frac{1}{2}\overline{AB}$ setzt, weil der Theil $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ des betrachteten Ständers in einem Zustande sich befindet, welcher mit jenem des ganzen Ständers in der Fig. 282 analog ist.

Anmerkung 2. Bei der Bestimmung des Tragvermögens von den betrachteten verticalen Ständern tritt der besondere Fall ein, dass die Theorie nicht solche genügende Anhaltspuncte zur Beurtheilung liefert, wie dies bei der Betrachtung anderer Fälle ermöglicht wurde. Es ist daher die Ausbildung dieser Lehre grösstentheils nur auf empirischem Wege durch Kenntnissnahme geeigneter Versuchs-Resultate möglich, und da diese letzteren noch nicht zahlreich und umfassend genug sind, so ist es erklärlich, dass in der angeregten Beziehung die Meinungen noch nicht gehörig festgestellt werden konnten. So gibt z. B. Hodgkinson an, aus seinen Versuchen über

gusseiserne Säulen mit ebener Basis folgende empirische Formeln gefunden zu haben:

a) für massive Säulen . . . $P = 44 \cdot 16 \, \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}}$,

b) für hohle Säulen aber . . $P = 43 \cdot 30 \left(\frac{D^{3.6} - D'^{3.6}}{l^{1.7}} \right)$,

wobei D und D' die Kreisdurchmesser in Zollen, und l die Ständerhöhle in Fussen nach englischem Masse, das den Bruch herbeiführende Gewicht P aber in englischen Tonnen verstanden, endlich vorausgesetzt ist, dass die Säulenhöhe l zwischen dem 25 und 120fachen des Durchmessers D liege. Führt man in diese Formel Wiener Mass und Gewicht ein, und lässt, in Uebereinstimmung mit der Ansicht Morins, nur den sechsten Theil von P als das Tragvermögen $Max.\,Q$ gelten, so findet man:

$$\text{ad a) } Max.\,Q = 9763 \, \frac{D^{3.6}}{l^{1.7}} \text{ und}$$

$$\text{ad b) } Max.\,Q = 9573 \left(\frac{D^{3.6} - D'^{3.6}}{l^{1.7}} \right),$$

wobei man jetzt D, D' und l in Zollen und $Max.\,Q$ in Zentnern zu verstehen hat. Für das im §. 250 gewählte Beispiel wäre hiernach wegen $D = 5''$ und $l = 150''$, $Max.\,Q = 640$ Ztr., und das Tragvermögen per □″

$$r' = \frac{640}{19 \cdot 6} = 32 \cdot 7 \text{ Ztr.}$$

Dieses Resultat weicht von dem nach der Formel (557) abgeleiteten wesentlich ab, und kann auch nicht mit der Zahlenreihe (553) vereinigt werden. Man erhält, wie man sieht, nach dieser den Angaben Hodgkinsons gemäss durchgeführten Berechnung das Tragvermögen gusseiserner Säulen bedeutend grösser, als die von Navier angeführten Erfahrungs-Resultate schliessen lassen. Nur weitere Erfahrungen werden geeignet sein, über diese Differenz die nöthige Aufklärung zu liefern. Bis dahin mag man in zweifelhaften Fällen sich dem kleineren von den nach beiden Methoden berechneten Resultaten nähern, und zwar um so mehr, als Hodgkinson bei seinen Versuchen keineswegs innerhalb der Elasticitätsgränzen verblieben ist, sondern sich vorzüglich mit dem Bruche beschäftigt hat, folglich auch seine empirische Formel nicht so ganz unbedenklich zugelassen werden kann, wenn man von der Bruchbelastung rückwärts auf das Tragvermögen schliesst.



Vierter Abschnitt.

Widerstand von Körpern, deren Materie eine vollkommene Ununterbrochenheit und einen gänzlichen Zusammenhang ihrer Theile nicht besitzt.

---

§. 251.

Erklärung. Die bisherigen Erörterungen über den Widerstand der Körper stützen sich auf die Voraussetzung, dass die Materie derselben homogen sei, daher eine vollkommene Ununterbrochenheit und einen gänzlichen Zusammenhang ihrer Theile besitze. Diese Voraussetzung ist, abgesehen von den Ungleichheiten in der Qualität der Materie, in vielen Fällen auch insoferne nicht vorhanden, als die Ununterbrochenheit derselben durch die Zusammensetzung von mehreren Theilen zu einem Ganzen, oder durch Oeffnungen und Einschneidungen für Zapfen, Bolzen, Nägel, Nieten, Schrauben, Schliessen etc. in der Absicht gestört wird, um aus Stücken von geringen Dimensionen durch Zusammensetzung ein Stück von grossen Dimensionen zu bilden. Sodann kommt zu erwägen, auf welche Weise bei solchen Körpern die Beurtheilung ihres Widerstandes vorgenommen werden kann.

§. 252.

Verfahren in solchen Fällen. Es leuchtet ein, dass der Widerstand eines in seiner Materie unterbrochenen Körpers kleiner sein muss, als jener, welchen er bei gänzlichem Zusammenhange der Materie zu leisten fähig wäre. Der Erfahrung gemäss ist man im Stande, die Theile eines Ganzen auf solche Weise solid und zweckmässig zu verbinden, dass der Widerstand (abgesehen von seiner

eigentlichen Grösse) innerhalb der Sicherheitsgränzen beinahe nach denselben Gesetzen erfolgt, welche für homogene Körper giltig erscheinen. Dann aber kann man sich erlauben, das Tragvermögen, die Biegung etc. bei zusammengesetzten Körpern nach den für homogene Körper gegebenen Formeln zu berechnen, nur mit dem Unterschiede, dass man statt den in jenen Formeln vorkommenden Grössen a, r und m verhältnissmässig kleinere a', r' und m' einführt. Wenn nämlich für die homogene Materie die Elasticitätsgränzwerthe für die Ausdehnung und Zusammendrückung mit a und r, der Modul der Längenveränderung aber mit m bezeichnet werden, so hat man bei der Betrachtung des in seiner Materie unterbrochenen sonst gleichen Körpers die analogen Grössen $a' = n a$, $r' = p r$ und $m' = q m$ einzuführen, wobei die Coefficienten $n = \frac{a'}{a}$, $p = \frac{r'}{r}$ und $q = \frac{m'}{m}$ echte Brüche vorstellen. Die Kenntniss dieser Brüche ist von Wesenheit; ihre Werthe vermag man jedoch im Allgemeinen nicht anzugeben; sie können übrigens einander gleich, können aber auch unter einander verschieden sein. Dieses Verhalten hängt von der Art und Weise ab, wie die Theile mit einander verbunden sind. Die verlässlichste Lehrerin in dieser Beziehung ist die Erfahrung. Da jedoch über die verschiedenen Verbindungsarten nicht immer genügende Erfahrungen vorliegen, sondern sich oftmals nur einzelne Anhaltspuncte ergeben werden, so ist man in vielen Fällen darauf angewiesen, durch eine zweckmässige Benützung solcher Anhaltspuncte das Lückenhafte im Wege practischer Schätzung auszufüllen. Diese Bemerkungen geben zur Aufstellung folgender Regel Veranlassung:

Bei entsprechender Verbindung der einzelnen Theile zu einem Ganzen kann das Letztere in seinem Verhalten eben so beurtheilt werden, wie ein homogenes Ganze von minderer Qualität der Materie.

Diese Regel wird insbesondere in solchen Fällen Anwendung finden, wo man in eine umständliche Untersuchung des Widerstandes eines jeden der einzelnen Theile nicht eingehen kann.

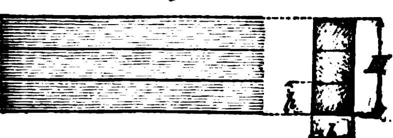
Erstes Kapitel.

Holzverbindungen.

§. 253.

Holzverbindungen zur Vergrösserung des Querschnittes. Bei der Verbindung von mehreren Holzstücken zu einem Ganzen wendet man theils eiserne Bänder und Schrauben, theils solche im Vereine mit der Verzahnung, Verkeilung und Verstrebung an, um den Querschnitt und dadurch die Tragfähigkeit des Ganzen zu vergrössern. Dabei ist insbesondere zu bemerken:

Fig. 287.



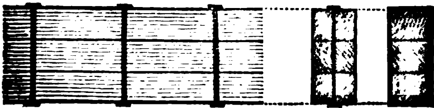
1. Werden (Fig. 287) zur Vermehrung der Höhe des Trägers N gleiche Balken einfach übereinander gelegt, und würde zwischen ihren Berührungsflächen keine Reibung stattfinden, so wäre offenbar nach der Formel (96) mit Rücksicht auf den §. 79 ad 1 der Werth von $\frac{1}{6} r b h^2$ das Tragmoment eines jeden einzelnen Balkens, somit jenes von allen N Balken

$$\frac{1}{6} r N b h^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{r}{N}\right) b H^2 = \frac{1}{6} r' b H^2.$$

Wäre hingegen der Träger nach seiner ganzen Höhe H homogen, daher nicht aus Theilen zusammengesetzt, so würde sich das Tragmoment mit $\frac{1}{6} r b H^2$ berechnen. Es ist also in dem obigen Falle gerade so, wie, wenn man den zusammengesetzten Träger als homogen betra chtet, und nur $r' = \left(\frac{r}{N}\right)$ statt r gesetzt hätte.

Wenn man (Fig. 288) die über einander gelegten Balken fest mit einander verschraubt, oder mit eisernen Bändern umschliesst, und zugleich die Reibung zwischen den Berührungsflächen berücksichtigt so kann das Tragmoment des ganzen Querschnittes wieder durch die Formel $\frac{1}{6} r' b H^2$ ausgedrückt werden, nur wird jetzt der Werth von

Fig. 288.



r' grösser als zuvor, d. i. $r' > \left(\frac{r}{N}\right)$ anzunehmen sein. Da nun für die vollkommene Homogenität der Trägermaterie $r' = r$ wäre, so folgt, dass der eigentliche Werth von r' für den in Rede stehenden Fall (Fig. 288) zwischen den Gränzen $\frac{1}{N}r$ und r liegt, daher diese desto weiter auseinander rücken, je grösser N, d. h. aus desto mehr Balken der Träger zusammengesetzt ist. Ausserdem aber hängt die Feststellung von r' noch von der Solidität der Zusammenhaltung, so wie von dem Einflusse ab, den man der Reibung zuschreibt, was der Hauptsache nach grösstentheils nur abgeschätzt werden kann. Die Klugheit erfordert es, bei solchen Abschätzungen nicht allzuviel Vertrauen auf die Solidität der Verbindung zu setzen. So z. B. kann man bei einer soliden Zusammenhaltung der einzelnen Balken höchstens annehmen:

für $N = 2$, $a' = \frac{2}{3}a$, $r' = \frac{2}{3}r$ und $m' = \frac{2}{3}m$

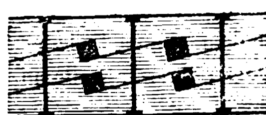
„ $N = 3$, $a' = \frac{1}{2}a$, $r' = \frac{1}{2}r$ und $m' = \frac{1}{2}m$.

Fig. 289.



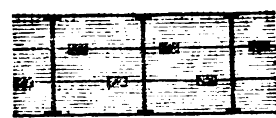
2. Wendet man (Fig. 289) die Verzahnung und Verschraubung, oder statt der letzteren das Umschlingen mittelst eiserner Bänder gleichzeitig an, so kann man bei sonst solider Anarbeitung und Zusammensetzung die Werthe $a' = \frac{3}{4}a$, $r' = \frac{3}{4}r$ und $m' = \frac{3}{4}m$ zulassen.

Fig. 290.



3. Wenn (Fig. 290) ausserdem auch die Verkeilung angewendet wird, und dabei die eingelegten Keile von gutem hartem Holze sind, so nähert sich der so zusammengesetzte Träger mehr einem homogenen Ganzen, als in den obigen Fällen. Es wird sodann der fragliche Coefficient sogar bis $\frac{4}{5}$ gesteigert, und demgemäss $a' = \frac{4}{5}a$, $r' = \frac{4}{5}r$ und $m' = \frac{4}{5}m$ gesetzt werden können.

Fig. 291.



4. Den gleichen Coefficienten kann man zulassen, wenn die Verkeilung mit der Verschraubung (Fig. 291) vereint angewendet wird. Dabei ist es zweckmässig, die Keile so zu vertheilen, dass jeder in der unteren Reihe

zwischen zwei der oberen Reihe zu liegen kommt. Auch hier kann das Zusammenhalten mittelst Eisenbändern anstatt der Schrauben geschehen.

5. Macht man (Fig. 292 und 293) die Keile so gross, dass zwischen den Balken ein leerer Raum entsteht, so hat man es mit einer

Fig. 292.

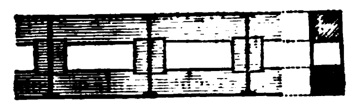


Fig. 293.

solchen Querschnitts-Kategorie zu thun, welche mittelst der Figuren 104, 126, 179 und 181 dargestellt, und dort, so wie in den §§. 146, 147, 161 und 162 näher besprochen worden ist. Lässt man die eingekeilten Zwischenlagen (Fig. 292) in die Balken eingreifen, wozu diese letzteren eingeschnitten werden müssen, so kann man bei gehöriger Verspannung der betreffenden Schrauben oder Eisenbänder statt $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ ungefähr $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ zulassen. Sind aber die Zwischenlagen (Fig. 293) nicht eingelassen, so verlangt es die Vorsicht, den Werth jener Brüche nur mit $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ anzunehmen.

§. 254.

Bemerkung über die Anwendung von Schrauben und eisernen Bändern zur Verbindung von Holzstücken. In dem vorigen §. hat man gesehen, dass zur Verbindung mehrerer Holzstücke mit einander sowohl eiserne Schrauben, als auch eiserne Bänder verwendet werden können. Jedes dieser Verbindungsmittel hat sein Eigenthümliches. Das Umschlingen der Balken mit eisernen Bändern bietet zunächst den Vortheil dar, dass dazu nicht, wie bei der Schraubenanwendung, eine Durchlöcherung der Balken nöthig ist. Dagegen ist die Verschraubung wieder insoferne vortheilhaft, als die einzelnen Theile stärker an einander gepresst, dass also dieselben fester unter einander als mittelst Bändern verbunden werden können. Diese Vortheile und beziehungsweise Nachtheile der beiden Verbindungsarten einander entgegengehalten und mit den Umständen des jeweilig zu betrachtenden Falles gehörig

combinirt, werden die Ansicht feststellen lassen, ob dabei diese oder jene Verbindungart in Anwendung zu bringen wäre.

§ 255.

Holzverbindungen zur Vergrösserung der Länge. Ausser den Verbindungen, welche zwischen einzelnen Stücken angewendet werden, um die Höhendimension eines Trägers zu vermehren, gibt es noch solche, welche eine Vergrösserung seiner Länge bezwecken, so dass derselbe auch nach dieser Dimension aus mehreren Theilen bestehen kann. Aus einem solchen Anlasse sind sodann die nach den im §. 253 erwähnten Umständen entzifferten Coefficienten $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ in ihren Werthen noch weiter herunterzudrücken.

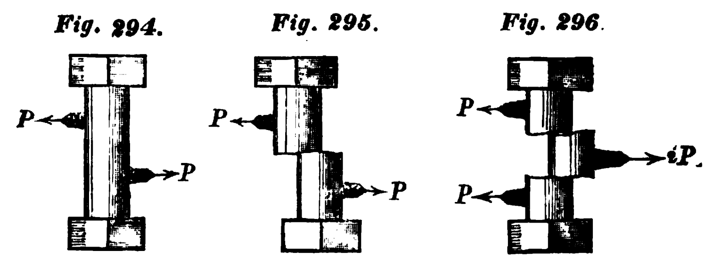
Zweites Kapitel.

Schmiedeeisen- und Blechverbindungen.

§. 256.

Verbindungsmittel. Stücke aus Schmiedeeisen und Blech pflegt man mittelst Bolzen, Zapfen, Schrauben und Nieten zu einem Ganzen zu verbinden. Bei solchen Constructionen werden die genannten Verbindungsmittel (Fig. 294) zwar normal auf ihre Längen-

Fig. 294. Fig. 295. Fig. 296.



axe in Anspruch genommen, sie sind jedoch in der Regel zu kurz, um ihr Verhalten nach dem gewöhnlichen Biegungswiderstande beurtheilen zu dürfen. Hier tritt nämlich diejenige Wirkung in den Vordergrund, welche das Gleichgewicht auf die in den Fig. 295 und 296 an-

schaulich gemachte Weise zu stören beabsichtigt, und worauf bereits im §. 48 (Fig. 22), so wie in der Anmerkung am Schlusse des ersten Hauptstückes aufmerksam gemacht wurde.

§. 257.

Widerstand der Bolzen, Zapfen, Schrauben. Um sogleich auf die Bestimmung des Widerstandes von Bolzen, Zapfen, Schrauben, wenn solche in dem obigen Sinne beansprucht werden, überzugehen, beachte man, dass der Erfahrung gemäss dieser Widerstand demjenigen gleich gesetzt werden kann, welcher sich ergäbe, wenn diese Theile nach der Länge gezogen würden. Hiernach ist der grösste zulässige Widerstand P dem Bolzenquerschnitt q proportional, und für jeden Quadratzoll des letzteren mit a (Ztr.) anzunehmen, was sofort auf die Gleichung

$$P = aq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (559)$$

führt. Ist nun der nöthige Widerstand P bekannt, so ergibt sich aus dieser Gleichung der Bolzenquerschnitt q, somit auch dessen Durchmesser β, wenn z. B. ein kreisförmiger Querschnitt vorhanden sein soll. Hier ist nämlich (das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser $= \pi$ gesetzt) wegen

$$q = \frac{\pi}{4}\beta^2 \text{ zunächst } \beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{q} = 1{\cdot}128\sqrt{q},$$

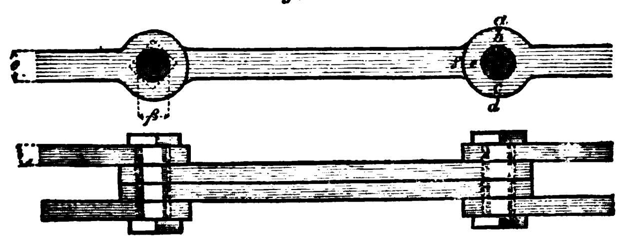
hiernach und wegen $q = \frac{P}{a}$ aber

$$\beta = 1{\cdot}128\sqrt{\frac{P}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (560).$$

Die Verbindung von Schmiedeeisen mittelst Bolzen findet vorzüglich bei der Construction von Ketten aus Eisenschienen statt (Fig. 297). Indem die Ketten nach ihrer Länge gezogen werden,



Fig. 297.



erleiden die Bolzen die oben erwähnte Anspruchsnahme. Hierbei hat jedes Kettenglied nach der Länge denselben Widerstand zu leisten, wie der Bolzen bezüglich des Uebereinanderschiebens seiner Querschnitte. Sind daher Schienen und Bolzen von einerlei Material, so folgt, dass der Querschnitt einer Schiene, nach der Cotirung bc □″, eben so gross zu machen ist, wie der Bolzenquerschnitt $q = \frac{\pi}{4}\beta^2$, und umgekehrt. In diesem Falle hat man $\frac{\beta^2 \pi}{4} = bc$ und hieraus

$$\beta = 1{\cdot}128\sqrt{bc}.$$

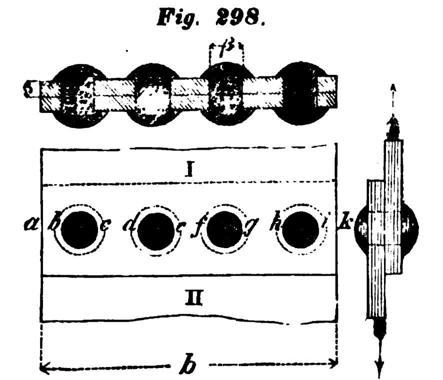
Vorsichtshalber kann man den Coefficienten 1·128 etwas vergrössern.

Bezüglich der Dimensionen des Ringes um den Bolzen ist zu bemerken, dass man eigentlich nur nöthig hätte, $\overline{ab} = \overline{cd} = \overline{ef} = \frac{1}{2}c$ zu machen, dass man aber zur Vermehrung der Sicherheit jene Dimensionen bis auf $\frac{2}{3}c$ steigern mag, um den Nachtheil zu beseitigen, der durch das Ausweitzen der Kettengliederaugen im Laufe der Zeit entstehen kann. Sind so die Dimensionen $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ und $\overline{ef}$ an der Verbindungsstelle im Vergleiche zu den Ausmassen b und c entsprechend gewählt, so hat man den Widerstand der Schienen gegen einen Zug so zu beurtheilen, wie wenn sie prismatisch geformt und durchgehends mit dem Querschnitte bc □″ versehen wären.

§. 258.

Einfache Vernietung. Die Bemerkungen im vorigen §. finden eine weitere Anwendung bei der Beurtheilung der Berbindung von eisernen Schienen, Platten oder Blechen mittelst Nieten. Nieten sind eigentlich kleine Bolzen (bc, de, fg, hi, Fig. 298), welche als Verbindungsmittel dienen. Um die Güte einer solchen Verbindung kennen zu lernen, beachte man, dass jede Platte für sich genommen, ohne Rücksicht auf die Durch-

Fig. 298.



löcherung den Querschnitt bc hat, wenn die Breite der Platte b und ihre Dicke c ist. Sind aber in den Platten N Nietlöcher vorhanden, und hat jedes Nietloch den Durchmesser β, so ist der eigentliche Widerstand leistende Querschnitt an den Verbindungsstellen nur $(b - N\beta)\,c$ □'', welcher mit Sicherheit einem Zuge von $a(b - N\beta)\,c$ Ztr. ausgesetzt werden darf. Wenn man daher bei der Berechnung des Widerstandes der vernieteten Bleche den vollen Querschnitt bc einführen, demungeachtet aber das richtige Resultat $a(b - N\beta)\,c$ erhalten will, so muss man die grösste zulässige Spannung per □'', nämlich a', derart annehmen, dass $a'bc = a(b - N\beta)c$ wird. Hieraus folgt

$$a' = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right)a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (561).$$

Das Verhältniss $\frac{a'}{a} = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right)$ ist selbstverständlich jenem gleichbedeutend, das zwischen dem geschwächten und dem vollen Plattenquerschnitte stattfindet.

Diesem Resultatate zufolge können die zusammengenieteten Platten (Bleche) gegen einen Zug, welcher alle Nieten gleich in Anspruch nimmt, einen Widerstand leisten, der in dem Verhältnisse $\frac{a'}{a} = \left(1 - \frac{N\beta}{b}\right)$ kleiner ist, als derjenige, welchen diese Platten ohne Durchlöcherung zu leisten fähig wären. Dazu müssen aber auch die Nieten die gehörige Stärke haben, somit alle zusammen denselben Widerstand leisten können, wie die zusammengenieteten Platten. Sind die Nieten aus gleich gutem Materiale angefertigt, so ist ihr Widerstand $aN\beta^2\frac{\pi}{4}$, wornach der obigen Bemerkung gemäss

$$\frac{\pi}{4}\,a\,\beta N^2 = a(b - N\beta)\,c$$

sein muss. Hieraus folgt

$$N = \frac{bc}{\beta\left(c + \frac{\pi}{4}\beta\right)},$$

und zufolge der Gleichung (561)

$$a' = \frac{a}{\left(1 + \frac{4c}{\pi\beta}\right)}.$$

Drückt man jetzt den Nietendurchmesser β als ein Vielfaches von der Platten- oder Blechdicke c aus, d. i. $\beta = x c$, wo x einen numerischen Coefficienten bezeichnet, so findet man

$$a' = \frac{a}{\left(1 + \frac{4}{x\pi}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (562)$$

und

$$N = \frac{1}{x\left(1 + \frac{x\pi}{4}\right)} \frac{b}{c} \quad \ldots \ldots \quad (563),$$

endlich die Entfernung der Ränder der Nietlöcher, $\left(\text{nämlich } \overline{cd} = \overline{ef} = \overline{gh} = \frac{b - N\beta}{N}\right)$, welche mit s bezeichnet wird,

$$s = \frac{\pi x^2}{4} c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (564).$$

Wird z. B. für die Vernietung von nicht zu dicken Blechen $x = 2$ angenommen, so dass der Längenschnitt einer Niete ohne Rücksicht auf ihre Köpfe ein Quadrat bildet, dessen Seite ($2c$) die doppelte Blechstärke ist, so findet man insbesondere

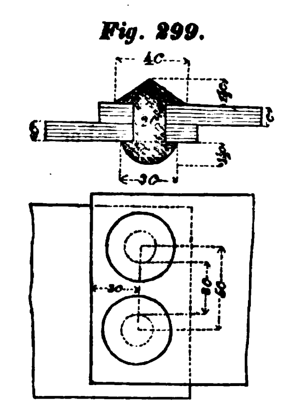
$$a' = 0{\cdot}611\, a, \quad N = 0{\cdot}194 \frac{b}{c} \text{ und } s = 3{\cdot}142\, c.$$

In diesem Falle beträgt der Widerstand der vernieteten Bleche nur ungefähr 61 % von jenem der ungeschwächten Bleche. Zur Sicherheit mag man höchstens 50 bis 55 % rechnen, und demnach $a' = 0{\cdot}5\, a$ bis $0{\cdot}55\, a$ annehmen, zumal Ungleichförmigkeiten in der Qualität der Materie und in der Anarbeitung nicht vermieden werden können.

Die in diesem §. untersuchte Vernietung heisst die einfache, weil die Nieten nur in einer Reihe vorhanden sind. Mit den obigen Resultaten stehen jene der Versuche in Uebereinstimmung. Nach diesen schlägt Fairbairn den Widerstand einfach vernieteter Bleche mit 56 % von dem der ungeschwächten Bleche an *).

---

*) Siehe die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1853 Seite 239.

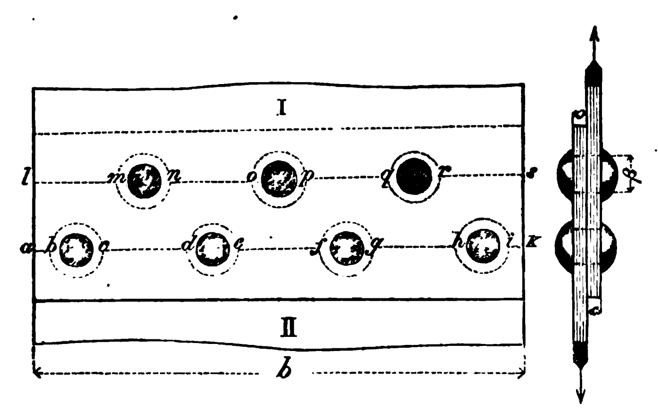

Fig. 299.

Redtenbacher empfiehlt für die einfache Blechvernietung die in der Fig. 299 ersichtliche Constructionsweise, bei welcher das Verhältniss $x = 2$ zu Grunde liegt, und die Entfernung der Nietenränder mit der dreifachen Blechstärke bemessen ist, was beides mit den vorigen Bemerkungen im Einklange steht.

§. 259.

Doppelte Vernietung. Wenn (Fig 300) zwei eiserne Stücke (Platten, Bleche) so mit einander vernietet werden, dass die Nieten in doppelten Reihen vorkommen, so heisst diese Vernietung die **doppelte**. Ist N die An-

Fig. 300.



zahl der Nieten in beiden Reihen ak und ls, so entfallen auf die eine Reihe $\left(\frac{N+1}{2}\right)$, auf die zweite Reihe aber $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ Nieten, oder umgekehrt, da man die Nieten so anzubringen pflegt, dass jede der einen Reihe zwischen zwei der andern Reihe zu liegen kommt, aus welchem Grunde auch N eine ungerade Zahl sein muss. Werden die beiden Platten nach der Richtung der Pfeile auseinandergezogen, und hierbei alle Nieten gleichmässig in Anspruch genommen, so ist der schwächste Querschnitt der Platten in ak, und derselbe zur

Beurtheilung des Widerstandes massgebend. Dieser Querschnitt hat einen Inhalt von $[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta] c \square''$, und kann einen Widerstand von $a[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta] c$ Ztr. leisten, wenn im Uebrigen die Bezeichnungen des vorigen §. beibehalten werden. Will man daher in der Berechnung des Widerstandes der vernieteten Bleche den vollen Querschnitt $bc \square''$ einführen, dennoch aber das richtige Resultat für den Widerstand erhalten, so muss die grösste zulässige Spannung per $\square''$ a' geringer, als a angenommen, und zwar aus der Relation $a'bc = a[b - \frac{1}{2}(N+1)\beta]c$ bestimmt werden. Hieraus folgt

$$a' = \left[1 - \tfrac{1}{2}(N+1)\frac{\beta}{b}\right] a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (565).$$

Da ferner bei einer zweckmässigen Verbindung die gesammten N Nieten denselben Widerstand gegen das Verschieben ihrer Querschnitte übereinander leisten sollen, wie die nach der Länge gezogenen Platten, der Widerstand der Nieten aber $= \frac{\pi}{4} a \beta^2 N$ ist, wenn sie aus gleich gutem Materiale, wie die Platten, bestehen, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{\pi}{4} a \beta^2 N = a\,[b - \tfrac{1}{2}(N+1)\beta]c,$$

hieraus aber die Nietenanzahl

$$N = 2\,\frac{c(b - \frac{1}{2}\beta)}{\beta\left(c + \frac{\pi}{2}\beta\right)}$$

und vermöge der Formel (565)

$$a' = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\beta}{b}}{1 + \frac{2}{\pi}\frac{c}{\beta}}\right) a.$$

Setzt man jetzt wieder, wie im vorigen §., allgemein $\beta = xc$, und ausserdem $\beta = yb$ (wo y in der Regel eine kleine Zahl ist), so ergeben sich folgende Formeln

$$a' = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}y}{1 + \frac{2}{\pi x}}\right) a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (566),$$

$$N = \frac{(2-y)}{x\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{b}{c} = \frac{(2-y)}{y\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (567).$$

und

$$s = \frac{\pi x^2 (2-y)}{(4+\pi x y)} c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (568),$$

wo $s = \overline{cd} = \overline{ef} = \overline{gh} = \ldots = \frac{b - \frac{1}{2}(N+1)\beta}{\frac{1}{2}(N+1)}$

die Entfernung der Nietränder von einander bezeichnet.

Für kleine Werthe von y, welche in der Praxis gewöhnlich vorkommen, kann man statt der vorigen Gleichungen annäherungsweise folgende gelten lassen:

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{a}{\left(1+\frac{2}{\pi x}\right)} \\ N &= \frac{2}{x\left(1+\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{b}{c} \\ \text{und} \quad s &= \frac{\pi x^2}{2} c. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (569).$$

Nimmt man z. B. wieder, wie im vorigen §., für Bleche von nicht zu grosser Dicke $x = 2$ an, so wird insbesondere

$$a' = 0{\cdot}759\, a,\ N = 0{\cdot}241\, \frac{b}{c} \text{ und } s = 6{\cdot}283\, c.$$

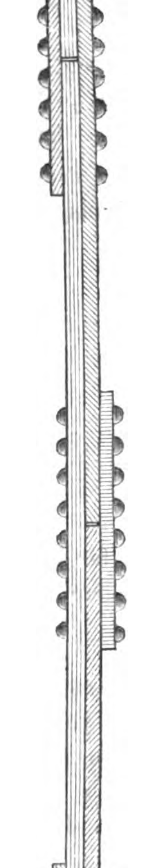
In diesem Falle beträgt der Widerstand der vernieteten Bleche ungefähr 76 % von jenem der ungeschwächten Bleche. Zur Sicherheit mag man höchstens 70 % rechnen. Diess steht mit den Resultaten der hierüber angestellten Versuche in Uebereinstimmung, indem diese letzteren in der That den Coefficienten $\frac{a'}{a} = 0{\cdot}70$ ergeben haben *).

§. 260.

Besondere Anordnung bei der Verbindung von dicken Platten mittelst Nieten. Sind die zu vernietenden

---

*) Siehe die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1853, Seite 239.


Fig. 301. Fig. 302.

Bleche von keiner bedeutenden Dicke, so kann man dieselben Behufs der Verbindung mittelst Nieten auf die in den Fig. 298, 299 und 300 ersichtliche Weise übergreifen lassen. Der Uebelstand, dass dadurch die Blechplatten nicht alle genau in eine Ebene kommen, und desshalb die durch die Pfeile angezeigten Kraftrichtungen nicht vollkommen entgegengesetzt sind, tritt nämlich bei geringen Blechdicken nicht störend auf. Ist aber die Plattendicke beträchtlich, z. B. $\frac{1}{2}''$, $\frac{3}{4}''$ (wie bei den englischen Röhrenbrücken), so erscheint es zweckmässig, die Platten in eine Ebene zu bringen. Wie diess bewerkstelligt werden kann, lassen die Fig. 301 und 302 entnehmen.

Der Fig. 301 gemäss sind die zu einem Ganzen zusammenzufügenden Platten an den Stossfugen beiderseits mit besonderen Platten bedeckt. Diese Deckplatten werden zusammengenietet, so dass die Nieten durch drei Tafeln greifen.

Nach der anderen Fig. 302 sind die Platten durchaus doppelt übereinandergelegt, wobei die Stossfugen abwechseln, wodurch (wie man zu sagen pflegt) immer Voll auf Fug kommt. Jede Stossfuge wird noch mit einer besonderen Platte bedeckt, und diese letztere mit den Doppelplatten vernietet. Auch in diesem Falle greifen die Nieten durch drei Platten. Man sieht zugleich, dass die Deckplatten abwechselnd bald auf die eine, bald auf die andere Seite der Doppelplatten zu liegen kommen.

Diese beiden Verbindungsarten sind sehr zweckmässig, denn durch die Deckplatten

wird der Nachtheil der Stossfugen beinahe aufgehoben, und der Wunsch einer vollkommenen Gleichförmigkeit in der Stärke der Platten an ihren einzelnen Stellen in hohem Grade erreicht. Der betreffende Coefficient für $\frac{a'}{a}$, $\frac{r'}{r}$ und $\frac{m'}{m}$ wird daher auch der Einheit ziemlich nahe kommen. Diese Verbindungarten sind bei den erwähnten Röhrenbrücken (Conway- und Britannia-Brücke) in Anwendung gekommen.

§. 261.

Verhalten genieteter Blechwände gegen Biegung. Bisher sind die vernieteten Blechplatten nur insoferne betrachtet worden, als sie einem Zuge ausgesetzt werden. Es erübrigt daher noch ihr Verhalten gegen Zusammendrückung und gegen Biegung zu untersuchen.

Was zuerst die Zusammendrückung betrifft, so kann in der Regel $\frac{r'}{r}$ eben so gross, wie $\frac{a'}{a}$ angenommen werden.

Bei der Biegung dringt sich vor Allem die Bemerkung auf, dass die Nieten ungleichförmig in Anspruch genommen werden, wenn die Nietenreihen in die Höhenrichtung des Querschnittes des ganzen Körpers fallen, also normal auf der Biegungscurve stehen, wie diess z. B. bei einer horizontal liegenden vierkantigen Blechröhre der Fall ist, wenn in den Seitenwänden die Nietenreihen vertical laufen. Eine solche durch die Nietlöcher geschwächte Wand bietet einen Träger-Querschnitt nach Art der Fig. 181 dar. Da die Nieten im Vergleiche zur Höhe der Tragwand nnr klein sein werden, so kann man das Trägheitsmoment des Querschnittes für eine solche Wand nahe genug mittelst der Formel $t = \frac{1}{12} f H^2$ ausdrücken, wo f den reellen nach Abzug der Nieten übrigbleibenden Querschnitt und H die Höhe der Wand bezeichnet. Diese Formel entspricht nämlich desto mehr dem Querschnitte 181 im §. 135, je kleiner die leeren Räume desselben sind. Obiges Trägheitsmoment t wäre nun in der betreffenden Formel für die Biegung mit dem Modul der Längenveränderung m, in jener für das Tragmoment aber mit der grössten zulässigen Spannung a per □'' zu multipliciren, so dass die Biegung als eine Function von $mt = \frac{1}{12} m f H^2$ und das Tragmoment, also auch das Tragvermögen als eine Function von $at = \frac{1}{12} a f H^2$ anzusehen ist. Bei derartigen Berechnungen pflegt man

jedoch nicht den reellen, durch die Nieten geschwächten, sondern den ganzen Querschnitt F so einzuführen, wie, wenn keine Nietlöcher vorhanden wären. Diesem Querschnitte entspricht das Trägheitsmoment $T = \frac{1}{12} F H^2$. Um nun mit Hilfe dieses imaginären Werthes von T dennoch das richtige Resultat für die Biegung und das Tragvermögen zu finden, wird man offenbar statt a und m kleinere Werthe a' und m' zu substituiren, und letztere aus den Relationen $m t = m' T$ und $a t = a' T$ abzuleiten haben. Hiernach findet man

$$m' = m \frac{t}{T} = m \frac{f}{F} \text{ und } a' = a \frac{t}{T} = a \frac{f}{F},$$

somit

$$\frac{a'}{a} = \frac{m'}{m} = \frac{f}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (570).$$

Indem nun das Verhältniss $\frac{f}{F}$ dasselbe ist, welches auch bei den in den §§. 258 und 259 angestellten Betrachtungen, wo bloss das Auseinanderziehen der vernieteten Platten behandelt wurde, massgebend für den Werth $\frac{a'}{a}$ gewesen war, kann man behaupten, dass jenes Verhältniss auch bei der Biegung für $\frac{a'}{a}$ und $\frac{m'}{m}$ angewendet werden darf.



Fünfter Abschnitt.

Brücken, bei welchen hauptsächlich der Biegungs-Widerstand in Betracht kommt.

---

§. 262.

Vorerinnerung. Die vorausgehenden Untersuchungen über den Widerstand der Materialien unter verschiedenen Umständen finden vorzüglich Anwendung im Bauwesen bei der Construction von Brücken. In diesem Abschnitte werden jene Brücken untersucht, bei welchen hauptsächlich der Biegungswiderstand in Betracht kommt.

§. 263.

Beurtheilung der Güte solcher Brücken. Die zweckmässigste Methode, die Güte einer solchen Brücke zu beurtheilen, ist diejenige, wo man aus dem entsprechend gewählten Querschnitte zuerst auf die zulässige Maximalspannweite schliesst, und daran die weiteren Bedingungen zu knüpfen versucht, welche aus Anlass der betreffenden Constructionsweise überdiess zu erfüllen nothwendig sind. Bei ausgeführten Brücken, für welche also die Spannweite bekannt ist, wird es zur Beurtheilung und gleichzeitigen Belehrung in der Regel vortheilhaft sein, aus den thatsächlichen Verhältnissen die grösste Anspruchsnahme (Spannung, Pressung) zu folgern, welche die einzelnen Constructionstheile zu erleiden haben. Der Gang der Untersuchung in beiden Fällen ist derselbe, nur wird in den betreffenden Formeln bald die eine, bald die andere Grösse als die zu suchende Unbekannte erscheinen.

Behufs der Bestimmung der zulässigen Maximalspannweite L in Wiener Klaftern sei

M die Summe der Tragmomente von allen Trägerquerschnitten im Sinne des §. 77, ferner

g in Wiener Zentnern das auf jede Klafter Brückenlänge durchschnittlich entfallende Totalgewicht; und es zerfalle dasselbe in den Antheil

g_1, welcher von dem eigenen Brückengewichte, und in den Antheil

g_2, welcher von der grössten zufälligen Belastung herrührt, so dass die Relation $g = (g_1 + g_2)$ stattfindet.

Betreffend die Ausmittlung des Gewichtsantheiles g_1, so hat man hierbei Träger, Brückenbahn, Geländer, Beschotterung etc., überhaupt die permanent schwebende Last zu berücksichtigen.

Was hingegen die grösste zufällige Belastung g_2 betrifft, so ist vor Allem zu unterscheiden, ob es sich um eine gewöhnliche Strassenbrücke, oder aber um eine Eisenbahnbrücke handelt.

Für gewöhnliche Strassenbrücken pflegt man bekanntlich die grösste zufällige Belastung mit Rücksicht auf das mögliche Entstehen von Menschengedränge mit 25 bis 30 Zentnern per □° benützbarer Brückenbahnfläche anzunehmen.

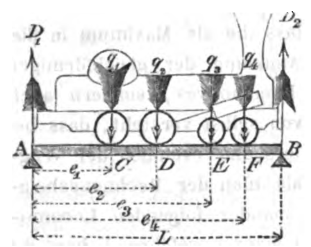
Für Eisenbahnbrücken wird in England die grösste zufällige Belastung nach der Annahme, dass die ganze Brücke mit Locomotiven besetzt sei, auf 1 bis 1 ½ Tonnen per Längenschuh veranschlagt, was nach österr. Mafse und Gewichte 118 bis 170, also im Durchschnitte ungefähr 140 Zentner per Längenklafter ergibt.

Auf die Höhe dieser Bemessung hat offenbar die Locomotiv-Construction so wie auch die Brückenlänge Einfluss. Um letzteres zu begreifen, berücksichtige man, dass das Locomotivgewicht sich nicht gleichförmig nach der Brückenlänge vertheilt, sondern dasselbe, weil die Uebertragung auf die Brückenbahn mittelst der Lauf- und Triebräder geschieht, eigentlich nur an einzelnen Stellen seine Wirkung äussert, so dass bei kleinen Brücken von 5, 4, 3 Klaftern Länge, wenn das Locomotiv darauf eben in der ungünstigsten Stellung sich befindet, die Wirkung der zufälligen Belastung bedeutend grösser werden kann, als wenn diese nach der Länge gleichmässig vertheilt wäre. Will man nun demungeachtet die zufällige Maximalbelastung nach der Hypothese der gleichförmigen Ver-

theilung einführen, so muss man dafür eine im Vergleiche zu längeren Brücken höhere Bemessung des Gewichtsantheiles per Current-Klafter annehmen, um der erwähnten grösseren Wirkung genügende Rechnung zu tragen.

Um diess durch ein Beispiel deutlich zu machen, befinde sich (Fig. 303) ein Locomotiv auf einer Brücke, welche genau dessen Länge L hätte. Das ganze Gewicht G dieses Locomotives zertheile sich derart, dass auf die Räderpaare in C, D, E und F beziehungsweise die Gewichtsantheile q_1, q_2, q_3 und q_4 kommen, wodurch die Stützen in A und B mit D_1 und D_2 Zentnern gedrückt werdent Auf bestimmte Zahlen übergehend, werden hier gleich die Daten aufgeführt, welche die Untersuchung eines Locomotives schwerer Gattung der österr. Kaiser-Ferdinands-Nordbahn geliefert hat, nämlich:

Fig. 303.



$e_1 = 8'\,0''$	$e_2 = 12'\,3''$	$e_3 = 17'\,3''$	$e_4 = 20'\,0''$	und	$L = 23'\,5'' = 3\frac{65}{72}{}^{\circ}$
$q_1 = 179$ Ztr.	$q_2 = 179$ Ztr.	$q_3 = 57$ Ztr.	$q_4 = 57$ Ztr.		$G = 472.$ Ztr.

Hiernach finden vor Allem zur Bestimmung der Drücke D_1 und D_2 die Relationen

$$D_1 + D_2 = G = 472 \text{ Ztr.}, \quad D_2 = \frac{q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4}{L} = 245{\cdot}5 \text{ Ztr.}$$

und $D_1 = G - D_2 = 226{\cdot}5$ Ztr. statt, und es erhalten die auf die Biegung einwirkenden statischen Kraftmomente nachstehende Werthe:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{In } C & \ldots & D_1 \,.\, \overline{AC} \ldots\ldots\ldots & = 1812 \\ \text{in } D & \ldots & D_1 \,.\, \overline{AD} - q_1 \,.\, \overline{CD} \ldots & = 2014 \\ \text{in } E & \ldots & D_2 \,.\, \overline{BE} - q_4 \,.\, \overline{EF} \ldots & = 1357 \\ \text{und in } F & \ldots & D_2 \,.\, \overline{BF} \ldots\ldots\ldots & = 839 \end{array}\right\} . \text{ Ztr. Fuss.}$$

Zufolge des Locomotivgewichtes würde daher die grösste Anspruchsnahme der tragenden Construction, abgesehen von dem eigenen Gewichte derselben, in D vorhanden sein, indem dort der Maximalwerth des Kraftmomentes mit 2014 resultirt. Dass zwischen den Angriffspuncten der Kräfte ein grösseres Moment nicht stattfinden kann, geht aus dem §. 127 hervor. Fragt man jetzt, wie gross die gleichförmig vertheilte Belastung G' nach der Länge sein müsste, wenn sie die gleiche Anspruchsnahme hervorzubringen im Stande sein soll, so hätte man bei dem Umstande, als die statische Wirkung dieser immaginären Last zu Folge des §. 87 mit $\frac{1}{8}\,G'\,L = 2{\cdot}927\,G'$ auszudrücken ist, die Gleichung $2{\cdot}927\,G' = 2014$ gelten zu lassen, und demgemäss G' mit 688 Ztr. auf die ganze Länge L, daher per Current-Klafter

mit $688 : 3\frac{65}{72} = 176$ Ztr. anzunehmen. Nach diesem Masstabe wäre beispielsweise die zufällige Belastung bei der Annahme der gleichförmigen Vertheilung der Länge nach in Rechnung zu nehmen, wenn ihre Wirkung mit der des Locomotivgewichtes als gleichbedeutend angesehen werden soll. Hieraus sieht man, dass diese immaginäre Belastung $G' = 688$ Ztrf bedeutend — beinahe um 46 Proc. — grösser ist, als das thatsächlich vorhandene, jedoch ungleichförmig vertheilte Locomotivgewicht $G = 472$ Ztr.

Das vorige Beispiel dient zum Beweise, dass die als Maximum in die Berechnung einzuführende Belastung nach der Annahme der gleichförmigen Vertheilung nicht nur von der Einrichtung des Locomotives, sondern auch von der Brückenlänge abhängt, wobei es sich von selbst versteht, dass bei langen Brücken auch die Construction des Tenders und eventuell der Waggons insoferne zu berücksichtigen sein wird, als man der Rechnungsbelastung nicht durchgehends die Annahme von aufeinander folgenden Locomotiven zu Grunde legen will. Uebrigens scheint zu einer ungefähren Uebersicht die Berechnung des per Current-Klafter Bahngeleise entfallenden zufälligen Gewichtes g_2, nach der Wirkung der gleichförmigen Vertheilung beurtheilt, nach der Formel

$$g_2 = A + \frac{B}{L}$$

zu genügen, in welcher die Zahlen A und B von der Einrichtung des Locomotives und nöthigen Falls auch von jener des Tenders und der Waggons abhängig zu machen sind, während L in Klaftern die betreffende Brückenlänge bezeichnet. Die Bestimmung von A und B wird leicht ermöglicht werden können, wenn für zwei verschiedene L die betreffenden Werthe von g_2 bekannt sind. Insbesondere folgt, dass, weil für $L = \infty$, $g_2 = A$ wird, A diejenige zufällige Last per Current-Klafter Bahngeleise anzeigt, welche man bei sehr langen Brücken gelten lassen kann.

Wird zur Erläuterung das vorige Beispiel wieder aufgenommen, so hat man zunächst

$$A = \frac{472}{3\frac{65}{72}} = 120 \text{ Ztr.}$$

Indem aber noch $g_2 = 176$ Ztr. für die specielle Brückenlänge $L = 3\frac{65}{72}$ gefunden wurde, so wird überdiess wegen der Gleichung $176 = 120 + \frac{B}{3\frac{65}{72}}$

$$B = 218 \text{ Zentner,}$$

und sofort für die in Rede stehende Locomotiv-Construction allgemein

$$g_2 = 120 + \frac{218}{L};$$

somit insbesondere

für L =	2 Klftr.	. . . . . g_2 =	229 Ztr.
„ =	3 „	. . . . . g_2 =	193 „
„ =	4 „	. . . . . g_2 =	175 „
„ =	5 „	. . . . . g_2 =	164 „
„ =	6 „	. . . . g_2 =	156 „
„ =	8 „	. . . . . g_2 =	147 „
„ =	10 „	. . . g_2 =	144 „
„ =	12 „	. . . g_2 =	138 „
„ =	15 „	. . . . g_2 =	135 „
„ =	20 „	. . . . . g_2 =	131 „
„ =	30 „	. . . . g_2 =	127 „

Obgleich diese Zahlenreihe nicht constant ist, sondern mit der verschiedenen Einrichtung der Locomotive variiren wird, so ist dieselbe dennoch zur Verdeutlichung geeignet, in welcher Weise mit der Brückenlänge die grösste zufällige Belastung per Längenklafter sich verändern kann.

Ist man über diejenige Belastung übereingekommen, für welche man die Anordnungen bei der Brücke zu treffen gedenkt, so ist unter der Voraussetzung, dass dieselbe einfach an ihren Enden auf den Jochen oder Pfeilern aufliegt, bei einer gleichförmigen Belastungsvertheilung nach der Gleichung (109)

$$\text{das Tragvermögen} = \frac{8M}{\text{Länge in Zollen}} = \frac{8M}{72L} = \frac{1}{9}\frac{M}{L}.$$

Dieses Tragvermögen muss für die grösste zulässige Spannweite eben so gross, wie das Totalgewicht

$$Q = gL = (g_1 + g_2)L$$

sein. Hiernach entsteht die Gleichung $\frac{1}{9}\frac{M}{L} = gL$, und es folgt hieraus die fragliche Maximalspannweite

$$L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{g}} \text{ Wiener Klafter} \quad . \; . \; . \; . \quad (571).$$

In diese Formel ist für M der entsprechende Werth des Tragmomentes nach Massgabe des Querschnittes, der Materialgattung und der Constructionsweise der Träger, für g aber das per Current-Klafter Brückenlänge entfallende Gewicht mit gleichzeitiger Rücksicht auf die grösste zufällige Belastung zu substituiren.

Erstes Kapitel.

Brücken mit einfachen Trägern.

§. 264.

Beurtheilung solcher Brücken. Brücken dieser Art sind in der Regel aus Holz, und ihre Bahn wird von einfachen Balken t (Fig. 304) getragen, welche entweder vierkantig oder nur auf zwei Seiten behauen sein, übrigens auf hölzernen Jochen oder gemauerten Pfeilern ruhen können. Zweckmässig ist es, zwischen den Jochen und Tragbalken sogenannte Sattelhölzer s unterzulegen, um dem Auflager für die Köpfe der Träger eine grössere Solidität zu verschaffen.

Fig. 304.

Man nenne

N die Anzahl der Tragbäume,

f den Querschnitt eines Tragbaumes in Quadratzollen,

t das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die durch seinen Schwerpunct horizontal gezogene Axe,

h' und h'' die betreffenden Abstände der gespanntesten (unteren) und gepresstesten (oberen) Fasern von der genannten Axe,

$h = (h' + h'')$ die Balkenhöhe in Zollen,

a und r die grösste zulässige Spannung und beziehungsweise Pressung des Holzmateriales in Zentnern, welche unter den verlangten Umständen Platz greifen dürfen, endlich

Δ in Wiener Zollen die grösste zulässige Biegung in der Mitte der Tragbäume.

Nach diesen Bezeichnungen und mit Rücksicht auf den §. 77 ist das Tragmoment eines Balkenquerschnittes entweder $\frac{at}{h'}$ oder $\frac{rt}{h''}$, je nachdem der eine oder der andere Ausdruck den kleineren Werth hat. Liegt, wie in der Regel, der Schwerpunct des Balkenquerschnittes in der halben Höhe, so ist $h' = h'' = \frac{1}{2} h$, daher das Trag-

moment für Holzmaterialien $= \frac{2rt}{h}$, indem sodann wegen $r < a$ auch $\frac{rt}{h''} < \frac{at}{h'}$ wird.

Für alle N Tragbalken hat man in diesem Falle $M = \frac{2rNt}{h}$, somit zufolge der Gleichung (571)

$$L = \tfrac{1}{8} \sqrt{\frac{2rNt}{gh}} \text{ Wiener Klafter } \ldots \quad (572).$$

Endlich ist nach der Gleichung (77) die Maximalbiegung

$$\Delta = \tfrac{5}{384} \frac{Q\,(72\,L)^3}{m\,(Nt)} = 4860 \,.\, \frac{gL^4}{mNt} \text{ Wiener Zoll } (573).$$

Der Modul der Längenveränderung ist, wie sonst, mit m bezeichnet.

Ist z. B. der Balkenquerschnitt ein Quadrat von den Seiten $b = h = 12''$, so hat man nach der Formel (51) $t = 1728$, daher, wenn etwa die Trägerzahl $N = 14$ ist, die Maximalspannweite

$$L = 8 \sqrt{\frac{7r}{g}}.$$

Auf diese Weise erhält man für L einen Ausdruck, worin nur mehr die Grössen g und r festzustellen sind. Diese Feststellung hängt aber, wie man in den beiden folgenden §§. sehen wird, von verschiedenen Umständen ab.

§. 265.

Nothbrücken. Wenn Holzbrücken nur in provisorischer Weise höchstens auf einige Jahre hergestellt werden sollen, so sind die Umstände, welche auf die Feststellung des Werthes von r Einfluss nehmen, folgende: Dauer einige Jahre, gewöhnlicher Einfluss der Atmosphäre, theilweise constante Belastung (mehr oder weniger, je nachdem die Brücke beschottert ist, oder nicht), endlich mässige Erschütterungen, weil es sich diessfalls wohl nur um eine Strassenbrücke handeln wird. Für gutes Tannenholz kann man z. B. in Hinblick auf die Tabelle im §. 23 durchschnittlich $r = 18$ Ztr., wenn eine Beschotterung vorhanden ist, sonst aber wegen der geringeren permanenten Belastung $r = 20$ Ztr. annehmen. Lässt man diese Zahlen für das im vorigen §. gewählte Beispiel gelten, und nimmt man noch bei einer benützbaren Bahnbreite von 4° für eine beschot-

terte Brücke $g_1 = 120$ und $g_2 = 4 \times 30 = 120$, daher $g = 240$ Ztr., für eine unbeschotterte Brücke aber $g_1 = 80$ und $g_2 = 120$, daher $g = 200$ Ztr. an, so findet man die Maximalspannweite.

1. Für eine derart beschotterte Nothbrücke $L = 5\overset{\circ}{\cdot}8$,

2. für eine unbeschotterte aber . . . . $L = 6\overset{\circ}{\cdot}7$.

Wird noch Behufs der Ausmittlung der Maximalbiegung Δ nach der Formel (573) in beiden Fällen der Modul der Längenveränderung des Tannenholzes m mit 16000 angenommen, so resultirt dieselbe beziehungsweise ad 1 mit $8\overset{\prime\prime}{\cdot}4$ und ad 2 mit $6\overset{\prime}{\cdot}1$.

§. 266.

Definitive Brücken. Bei solchen Brücken unterscheiden sich die vorwaltenden Umstände von jenen bei Nothbrücken in soferne wesentlich, als erstere eine möglichst lange Dauer besitzen sollen. Desshalb darf man sich mit Rücksicht auf die citirte Tabelle im §. 23 nur erlauben, statt den für Nothbrücken eingeführten Werthen von r ungefähr die Hälfte anzunehmen. Sonach wäre in dem vorigen Beispiele, wenn es sich um eine definitive Brücke handeln würde, beziehungsweise $r = 9$ und $r = 10$ Ztr. zu setzen, je nachdem die Bahn beschottert oder unbeschottert ist.

Da der Formel (572) gemäss L unter sonst gleichen Umständen mit $\sqrt{r}$ in directem Verhältnisse steht, so folgt, dass sich die Maximalspannweite bei einer definitiven Holzbrücke durchschnittlich im Verhältnisse, wie

$$\sqrt{2} : 1 = 1{\cdot}414 : 1 = 1 : 0{\cdot}707$$

kleiner herausstellt, als bei einer Nothbrücke.

Hiernach könnte die im vorigen §. beispielsweise erörterte Brücke als eine definitive betrachtet werden, wenn ihr eine lichte Spannweite

1. im beschotterten Zustande von höchstens... $4\overset{\circ}{\cdot}1$ *),

---

*) Die im Jahre 1853 hergestellte hölzerne Jochbrücke über die Wien auf der k. k. Linzerstrasse bei Weidlingau in Niederösterreich hat ungefähr die in diesem Beispiele angenommenen Dimensionen. Sie gehört in die Kategorie der beschotterten definitiven Brücken, und ist mit der Spannweite von 5 Klaftern ausgeführt worden. Diese Spannweite stimmt mit dem obi-

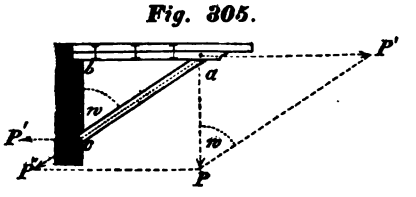
2. im unbeschotterten Zustande aber von höchstens... $4\overset{\circ}{\cdot}7$ gegeben würde.

Legt man noch Behufs der Bestimmung der Maximalbiegung aus der Gleichung (573) den Modul m der Längenveränderung des Tannenholzes wegen der verlangten langen Dauer nur mit 15000 zu Grunde, so erhält man ad 1 ... $\Delta = 1''2$ und ad 2 ... $\Delta = 2''0$.

§. 267.

Sattelhölzer, Sattelstreben. Bei der Anbringung von Sattelhölzern darf selbstverständlich die nach der Gleichung (572) ausgemittelte Spannweite zwischen den Jochen oder Pfeilern etwas vergrössert werden. Da aber die Enden der Satteln wegen des Zusammendrückens derselben niemals als förmliche Unterstützungspuncte angesehen werden können, so erfordert es die Vorsicht, nicht den ganzen Sattelvorsprung zur berechneten Spannweite hinzuzuschlagen, sondern diese höchstens um die Hälfte der beiderseitigen Sattelvorsprünge und nach Umständen noch weniger zu vergrössern. Ueberdiess müssen die Sattelhölzer die gehörige Stärke haben, und an der Wurzel entsprechend befestigt sein, weil in Folge der Biegung der Brücke die Enden derselben sich heben, und sodann gleichsam die ganze Last auf den Kopfenden der Satteln ruhet. Haben nun die Satteln nicht die gehörige Stärke, so würden sie aus Anlass der erwähnten Anspruchsnahme so bedeutend nachgeben, dass durch sie eine Vergrösserung der Spannweite nicht begründet werden könnte. Aehnliche Bemerkungen kann man hinsichtlich der Streben machen, welche zur Unterstützung der Sattelhölzer angebracht werden.

Fig. 305.



Insbesondere auf die Wirkung einer solchen Strebe übergehend, beachte man, dass ein auf den Strebenkopf a (Fig. 305) ausgeübter Druck P in die 2 Componenten P' und P'' zu zer-

---

gen Resultate ganz gut überein, wenn man berücksichtiget, dass die bei der erwähnten Brücke angebrachten Sattelhölzer eine kleine Vergrösserung der berechneten Spannweite gestatten.

legen ist, von welchen die erste P' in den horizontalen Balken übertragen wird, während die andere P'' die Pressung in der Strebenrichtung angibt. Dass in dem Stützpuncte c das Widerlager einen horizontalen Druck $= P'$ erfährt, ist einleuchtend.

Nennt man nun w den Neigungswinkel der Strebe gegen die verticale Richtung, so hat man allgemein

$$P' = P \, tg \, w \text{ und } P'' = \frac{P}{\cos w}.$$

Diese beiden Kräfte nehmen augenscheinlich mit dem Winkel w zu, und der Strebenquerschnitt muss insbesondere nach der Grösse des Druckes P'' in Gemässheit des §. 249 angeordnet werden. Hat die Strebe einen quadratischen Querschnitt von der Seite . . σ,

ist ferner der Abstand $\overline{ab}$ . . . . $= \varepsilon$,

die Strebenlänge $\overline{ac} = \frac{\varepsilon}{\sin w}$ . . . . $= \lambda$,

und die grösste zulässige Pressung des Holzmateriales der Strebe per □′ Querschnitt . . . . $= r'$,

so entsteht der vorigen Bemerkung gemäss die Bedingungsgleichung

$$r' \sigma^2 = P'' = \frac{P}{\cos w},$$

welche auf entsprechende Weise zu erfüllen ist, so, dass hierbei nicht nur die Materialgattung und die bei der Construction obwaltenden besonderen Umstände, sondern auch die Erörterungen des §. 249 insoferne zu berücksichtigen sind, als hiernach r' mit der Strebenlänge abnimmt.

Betreffend den Körperraum der Strebe, so ist derselbe

$$\lambda \sigma^2 = \frac{P \lambda}{r' \cos w} = \frac{P \varepsilon}{r' \sin w \, \cos w} = \frac{2 P \varepsilon}{r' \sin 2 w},$$

somit unter sonst gleichen Umständen mit w variabel. Er würde ein Minimum für

$$\sin 2 w = 1, \text{ d. i. für } w = 45^0,$$

wenn die Pressung r' bei der mit w wechselnden Strebenlänge unverändert bliebe. Dieses ist zwar nach dem §. 249 nicht der Fall, doch kann man immerhin jene Unveränderlichkeit von r' gelten lassen, wenn die Strebenlänge λ im Vergleiche zur Quadratseite σ nicht zu bedeutend ist. Aus dieser Bemerkung schliesst man, dass bei sehr kurzen Streben der geringste Materialaufwand mit der nöthigen

Sicherheit vereinigt werden kann, wenn man ungefähr $\overline{ab} = \overline{bc}$, d. i. $w = 45^0$ (Fig. 305) construirt.

Bei verhältnissmässig langen Streben, wo $\lambda \overline{\gtrless} 20\,\sigma$ ist, wird diese Regel nicht mehr anzuwenden sein, indem sodann der Werth von r' nach der Gleichung (549) zu beurtheilen, und hiernach wegen $n = \frac{\lambda}{\sigma} \overline{\gtrless}$ 20 die Pressung $r' = \frac{C}{n^2} = \frac{C\sigma^2}{\lambda^2}$ zu setzen ist, wo C eine gewisse von dem Strebenmateriale und dem verlangten Sicherheitsgrade abhängige Constante bezeichnet. In diesem Falle hat man

$$r'\sigma^2 = \frac{C\sigma^4}{\lambda^2} = \frac{P}{\cos w},$$

und hieraus

$$\sigma^2 = \lambda \sqrt{\frac{P}{C\cos w}} = \frac{s}{\sin w} \sqrt{\frac{P}{C\cos w}}.$$

Der hier nöthige Querschnitt σ^2 wird für den Maximalwerth von $\sin w \sqrt{\cos w}$ oder von $\sin^2 w \,.\, \cos w$ ein Minimum, und diess geschieht für

$$\frac{d\,[\sin^2 w \cos w]}{dw} = 2 \sin w \cos^2 w - \sin^3 w = \sin w \cos^2 w\,(2 - tg^2 w) = 0,$$

d. i. für $tg\, w = \sqrt{2}$ oder für $w = 54\frac{3}{4}^0$, welcher Winkel der Anordnung $\overline{ab} = \overline{bc}\sqrt{2}$ (Fig. 305) entspricht.

Beabsichtigt man aber nicht den kleinsten Querschnitt, sondern den kleinsten Körperinhalt der Strebe zu erzielen, so hat man offenbar den Ausdruck

$$\sigma^2 \lambda = \lambda^2 \sqrt{\frac{P}{C\cos w}} = \frac{s^2}{\sin^2 w} \sqrt{\frac{P}{C\cos w}}$$

auf ein Minimum, somit $\sin^2 w \sqrt{\cos w}$ oder $\sin^4 w \,.\, \cos w$ auf ein Maximum zu bringen, was für

$$\frac{d\,[\sin^4 w \cos w]}{dw} = 4 \cos^2 w \sin^3 w - \sin^5 w =$$
$$= 4 \sin^3 w \cos^2 w\,(4 - tg^2 w) = 0,$$

d. i. für $tg\, w = 2$ oder $w = 63\frac{1}{2}^0$ eintritt.

Demnach wird bei sehr langen Streben der geringste Materialaufwand mit der nöthigen Sicherheit vereinigt werden können, wenn man $\overline{ab} = 2\,\overline{bc}$ (Fig. 305) construirt.

Auf diese Weise hat man zwei Resultate gefunden, das eine ($tg\, w = 1$) für sehr kurze, das andere ($tg\, w = 2$) für sehr lange

Streben, deren Länge nämlich nicht kleiner, als das 20fache der Quadratseite ist. Hieraus schliesst man, dass für Streben, deren Länge nicht das 20 fache der Quadratseite erreicht, die vortheilhafteste Neigung gegen die Verticale zur Erzielung des geringsten Materialaufwandes je nach der kleineren oder grösseren Strebenlänge zwischen 45° bis $63\frac{1}{2}$ Graden variiren wird.

Diese Resultate, vereint mit den localen Verhältnissen und verglichen mit den Holzpreisen, so wie mit den anderen Einfluss nehmenden Umständen eines vorkommenden Falles werden ohne Schwierigkeit die Vor- und Nachtheile beurtheilen lassen, welche sich durch die verschiedenen Strebenrichtungen ergeben können.

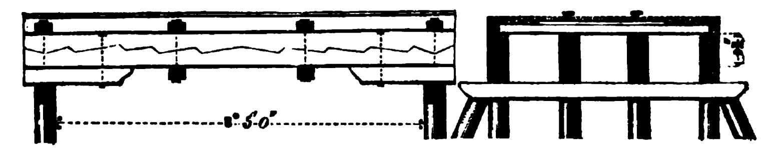
Zweites Kapitel.

Brücken mit gekuppelten Tragbalken.

§. 268.

Beurtheilung solcher Brücken. Zuweilen werden die Brückenträger aus mehreren Balken, nach Art der Figuren 288, 289, 290 und 291 gekuppelt. Die hölzerne Brücke über die Thaya bei Lundenburg, über welche die österreichische Kaiser Ferdinands-Nordbahn führt, liefert ein Beispiel dieser Art. (Siehe Fig. 306.)

Fig. 306.



In einem solchen Falle bleiben die allgemeinen Formeln zur Berechnung der Maximalspannweite und Maximalbiegung dieselben, nur hat man nach Anleitung des §. 253 die in Anwendung zu bringenden Elasticitätsgränzwerthe a' und r' und den Modul der Längenveränderung m' mit Rücksicht auf die Art und Weise der Kuppelung entsprechend kleiner, als diejenigen Werthe a, r und m zu wählen, welche bei gänzlicher Ununterbrochenheit der Trägermaterie zugelassen werden könnten. Liegt der Schwerpunct des Trägerquer-

schnittes, wie gewöhnlich, in der halben Höhe desselben, so hat man analog mit den Formeln 572 und 573 unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

die **Maximalspannweite** $L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2r'Nt}{gh}}$ . . (574)

und die **Maximalbiegung** . . $\Delta = 4860 \cdot \frac{gL^4}{m'Nt}$ . . (575).

Ex. Die oben erwähnte Brücke über die Thaya hat vier gekuppelte Träger von der Breite $b = 12''$ und der Höhe $h = 24''$, somit ist $N = 4$, $f = 288$ □″ und $t = \frac{1}{12} f h^2 = 13824$, hiernach aber

$$L = 22{\cdot}6\sqrt{\frac{r'}{g}}.$$

Nimmt man nun für gutes Tannenholz mit Rücksicht auf eine definitive Brückenconstruction und auf die Erschütterungen durch die Befahrung von Eisenbahntrains an, dass bei einem aus einem ganzen Stücke bestehenden Träger $r = 8$ Ztr. gesetzt werden kann, so darf man aus Anlass der in Folge der Kuppelung nicht vorhandenen Ununterbrochenheit der Trägermaterie höchstens $r' = \frac{3}{4} r = 6$ Ztr. zulassen. Setzt man noch das permanente eigene Gewicht der Brücke per Längenklafter mit Rücksicht auf ihre Construction $g_1 = 50$ Ztr., und lässt man ferner für die zufällige Belastung, weil nach einer ungefähren Rechnung die Spannweite zwischen 3 und 4 Klaftern liegt, mit Rücksicht auf den §. 263 den ziemlich hohen Werth von $g_2 = 180$ Ztr. gelten, so findet man aus der obigen Gleichung

$$L = \overset{0}{3}{\cdot}64.$$

Berücksichtigt man die geschehene Anbringung von Sattelhölzern, so erkennt man deutlich die befriedigende Uebereinstimmung der gelieferten Berechnung mit der Ausführung, nach welcher die lichte Spannweite zwischen den Jochen $3^0\,5'$ beträgt.

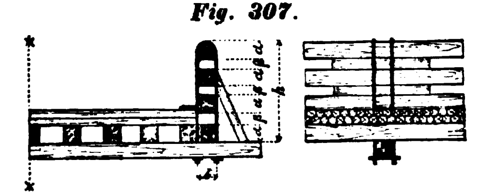
Drittes Kapitel.

Traggeländer-Brücken.

§. 269.

Beurtheilung solcher Brücken. Traggeländer-Brücken werden mittelst zusammengesetzter Träger von bedeutender Höhe getragen, welche zugleich als Geländer dienen. (Fig. 307). Das Längen- und Querprofil eines Trägers ist in diesem Falle den Fig. 181, 292 und 293 analog. Die Bestimmung der grössten zulässigen Spannweite hat wieder nach der allgemeinen Formel (571) zu geschehen. Liegt der Schwerpunct des Querschnittes in der halben Höhe, so ist eben so, wie im vorigen Kapitel,

Fig. 307.



$$\text{die Maximalspannweite } L = \tfrac{1}{8} \sqrt{\frac{2\,r'\,N t}{g\,h}}$$

$$\text{und die Maximalbiegung } \ldots \Delta = 4860\,\frac{g\,L^4}{m'\,N t}.$$

Der Werth von t ist dem Geländerquerschnitte, die Werthe von r' und m' aber sind dem Materiale und der Art und Weise der Geländerconstruction, so wie dem verlangten Sicherheitsgrade anzupassen.

In den meisten Fällen wird es zu empfehlen sein, bloss die Geländer als eigentliche Träger der Brücke zu betrachten, und sich nicht auf die Mitwirkung der andern Längenbalken zu verlassen.

Ex. Für den Querschnitt (Fig. 307) sei $\alpha = 10''$, $\beta = 6''$, $h = (4\,\alpha + 3\,\beta) = 58''$, $b = 10''$ und die Zahl der Tragwände $N = 2$. Es sei ferner bei einer benützbaren Brückenbreite von 4^0 das eigene Gewicht per Längenklafter $g_1 = 80$ und die zufällige Belastung mit Rücksicht auf eine gewöhnliche Strassenbrücke $g_2 = 4 \times 30 = 120$, somit $g = (g_1 + g_2) = 200$ Ztr. Hiernach wird im Sinne des §. 135 das Trägheitsmoment

$$t = \frac{1}{12} b \left[(4\alpha + 3\beta)^3 - (2\alpha + 3\beta)^3 + (2\alpha + \beta)^3 - \beta^3 \right] = 172500,$$

folglich

$$L = 2{\cdot}57 \sqrt{r'} \text{ und } \Delta = 2{\cdot}81 \frac{L^4}{m'}.$$

Wäre nun für eine definitive Construction mit ununterbrochenen Trägern aus Tannenholz $r = 10$ Ztr. und $m = 15000$, und nimmt man wegen der Zusammensetzung der Traggeländer aus einzelnén Stücken nach §. 253 nur $r' = \frac{1}{2} r = 5$ und $m' = \frac{1}{2} m = 7500$ an, so erhält man $L = 5{\cdot}\overset{0}{7}$ und $\Delta = 0{\cdot}\overset{\prime\prime}{4}$.

Bei der Anbringung von Satteln wird man sich wieder erlauben dürfen, die berechnete Spannweite etwas zu vergrössern.

Bezüglich der vorigen Berechnung kann man noch Folgendes erinnern:

1. Diese Resultate beziehen sich auf eine definitive Construction von möglichst langer Dauer.

2. Für eine Nothbrücke könnte man unter sonst gleichen Umständen statt r' ungefähr den doppelten Werth zulassen, wodurch sich die berechnete Spannweite im Verhältnisse wie $1 : \sqrt{2}$, also von $5{\cdot}\overset{0}{7}$ auf $8{\cdot}\overset{0}{1}$ erhöhen würde.

3. Es wurden nur zwei Traggeländer vorausgesetzt. Wären daher ihrer mehr vorhanden, und dieselben so angebracht, dass alle gleichmässig in Anspruch genommen werden, so hat man nur statt N die betreffende Zahl zu setzen. Man sieht übrigens aus der Formel (574), dass die zulässige Maximalspannweite mit $\sqrt{N}$ zunähme, wenn ausser den übrigen Grössen auch das Totalgewicht dasselbe bliebe. Da sich aber bei dem letzteren der von den Traggeländern herrührende Antheil mit N ebenfalls vermehrt, so schliesst man, dass das Wachsen der Spannweite sich eigentlich nach dem Werthe von $\sqrt{\frac{N}{g}}$ richtet, somit in einem etwas geringeren Verhältnisse vor sich geht, als bei $\sqrt{N}$.

§. 270.

Traggeländer, welche sich Körpern von gleichem Widerstande nähern. Die Erörterungen über die Körper von gleichem Widerstande rücksichtlich der Biegung (§§. 94 bis 104) lassen erkennen, dass es nicht nothwendig ist, einem Traggeländer

durchaus die gleiche Höhe zu geben. Offenbar darf man sich erlauben, in dem Falle, wenn das Traggeländer an beiden Enden aufliegt, und eine der Länge nach gleichförmige Last zu tragen hat, die Höhe in ihrer grössten Dimension nur in der Mitte der Brücke anzunehmen, sonst aber gegen die beiden Enden hin derart abnehmen zu lassen, dass in keinem Querschnitte des Traggeländers eine überflüssige Stärke vorhanden ist. Dadurch wird es zulässig, die obere Begränzung des Traggeländers krummlinig zu wählen, während die untere geradlinig bleiben kann. Sucht man nach der Anleitung des §. 99 die das Traggeländer als Körper von gleichem Widerstande oben begränzende Curve, so findet man, dass dieselbe sehr nahe mit einer gemeinen Parabel übereinstimmt, deren Scheitel in der Mitte, und deren Axe vertical liegt. Dieses Resultat zeigt, dass ein Traggeländer, welches unten von einem geraden, oben aber von einem bogenförmigen Balken begränzt ist, sich einem Träger von gleichem Widerstande annähern wird.

Die hölzerne Jochbrücke über die grosse Donau bei **Wien** über welche die österreichische Kaiser Ferdinands-Nordbahn führt, hat Traggeländer dieser Art (Fig. 308). Solche Traggeländer sind

Fig. 308.

übrigens auch darum zweckmässig, weil die oberen und unteren Balken in der Nähe der Widerlager zusammentreffen, und die Verbindung daselbst auf eine solidere Weise geschehen kann, als dann, wenn diese Balken zu einander parallel sind. Die Bestimmung der zulässigen Maximalspannweite geschieht hier gleichfalls auf die im vorigen §. angegebene Weise. Nur hat man, wenn die neutrale Axe nicht in die halbe Höhe fällt, das Tragmoment desselben nach §. 77 ordnungsmässig aufzusuchen. Es ist nämlich dasselbe für

den Querschnitt eines Geländers dem kleineren von den beiden Werthen $\frac{a't}{h'}$ oder $\frac{r't}{h''}$ gleichzusetzen.

Um auch dieses Verfahren durch ein Beispiel zu erläutern, stehe die oben erwähnte Donaubrücke in Betracht. Nach der betreffenden Fig. 308 hat man zunächst $h = (h' + h'') = 60''$, und mit Rücksicht auf die Formeln (188) im §. 116

$$h'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - n^2 + p q^2}{1 - n + p q}\right) h = 0{\cdot}566\, h = 34''$$

und

$$h' = \quad (H - h'') \quad = 0{\cdot}434\, h = 26'',$$

indem die dort mit n, p und q bezeichneten Zahlen hier beziehungsweise 0·6, 0·75 und 0·3 sind. Da ferner für Holzmaterialien $r' < a'$ ist, so erkennt man leicht, dass von jenen Alternativwerthen $\frac{r't}{h''}$ den kleineren Werth annimmt, und hiernach das Tragmoment bemessen werden muss. Indem nun die Brücke zwei Fahrbahnen und drei Traggeländer hat, so ist offenbar wegen $N = 3$ das Tragmoment aller Geländer

$$M = \frac{N r' t}{h''} = \frac{3}{34} r' t,$$

worin noch der besondere Werth des Trägheitsmomentes t zu substituiren ist. Für dieses hat man aber nach der betreffenden Formel (188) im §. 116

$$t = \frac{4(1 - n^3 + p q^3)(1 - n + p q) - 3(1 - n^2 + p q^2)^2}{12(1 - n + p q)^2} f h^2 = 0{\cdot}192\, f h^2,$$

somit, weil der Querschnitt eines Traggeländers $f = 450 \square''$ und seine Höhe $h = 60''$ ist, auch $t = 311040$.

Es ist also obiges Tragmoment $M = 27444\, r'$, und der Formel (571) zufolge die zulässige Maximalspannweite

$$L = 55 \sqrt{\frac{r'}{g}}.$$

Um nach der Bemerkung im §. 262 auch einmal umgekehrt aus der ausgeführten Spannweite auf die Anspruchsnahme des Materiales zu schliessen, setze man im vorliegenden Falle die Spannweite $L = 8^0$, wie sie mit Rücksicht auf die vorhandenen Satteln und Streben angenommen werden kann, ferner das eigene Gewicht der Construction per Klafter Brückenlänge in runder Zahl $g_1 = 80$ Ztr.,

und die zufällige Belastung mit Rücksicht auf das vorhandene Doppelgeleise $g_2 = 290$ Ztr. Hiernach findet man wegen $g = (g_1 + g_2) = 370$ für die grösste Pressung des Holzmateriales per □″ Querschnitt

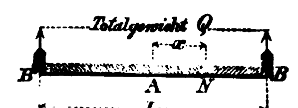
$$r' = g \left(\frac{L}{55}\right)^2 = 7{\cdot}8 \text{ Ztr.}$$

Diese Pressung kann man bei einem halbwegs guten Tannenholze unter den vorhandenen Umständen immerhin zulassen, zumal die Art und Weise der Zusammensetzung der Traggeländer in dem vorliegenden Falle die Ununterbrochenheit der Materie nicht so wesentlich stört, wie bei der im §. 269 betrachteten Geländerart.

Hieraus sieht man, dass die Resultate der obigen Untersuchung mit der geschehenen Ausführung in Uebereinstimmung stehen.

§. 271.

Fig 309.



Besondere Anspruchsnahme der Traggeländer in der Richtung normal auf die Längenrichtung der Fasern. Die Resultirende R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf einem Brückenquerschnitt in N (Fig. 309), welcher von der Mitte A um $\overline{AN}$ Klafter entfernt liegt, ist offenbar ohne Rücksicht auf das Zeichen

R = dem Drucke auf die Stütze in B — dem Gewichte in der Strecke $\overline{BN}$,

daher bei einer gleichmässig vertheilten Belastung, wo der Druck auf die Stütze in B dem halben Totalgewichte gleich ist, auch

R = dem Gewichte in der Strecke $\overline{AB}$ — dem Gewichte in der Strecke $\overline{BN}$ =

= dem Gewichte in der Strecke $\overline{AN}$.

Die Resultirende R ist also eben so gross, wie die Belastung, welche zwischen der Mitte der Brücke und dem gewählten Querschnitte vorhanden ist.

Hieraus folgt zunächst, dass diese Resultirende von der Mitte der Brücke gegen die beiden Enden hin zunimmt, wo sie den grössten numerischen Werth $\frac{1}{2} Q$ erreicht. Indem nun das Totalgewicht $Q = g L$ ist, wird dieser Maximalwerth von $R = \frac{1}{2} g L$. Man erinnere sich jetzt auf den Inhalt des §. 43 ad I. Nach der dort

gelieferten Darstellung leuchtet ein, das in dem Brückenquerschnitte N zufolge der Resultirenden R die Tendenz einer Trennung der Fasern normal auf ihre Längenrichtung sich geltend macht, welche zwei unmittelbar auf einander folgende Querschnitte des Trägers übereinander zu verschieben beabsichtigt *). Bei der oftmals geringen Ausdehnung der eigentlich in dieser Beziehung widerstehenden Querschnitte der Längenbalken in den Traggeländern, verglichen mit der bedeutenden Grösse von R in der Nähe der Widerlager, ist daher zu untersuchen, ob die gesammten Längenbalken der Traggeländer der beabsichtigten Verschiebung der Fasern normal auf ihre Längenrichtung genügend widerstehen können. So wie schon im §. 256 bezüglich des Schmiedeeisens erwähnt worden ist, kann man auch bei dem Holze den grössten zulässigen Widerstand normal auf die Fasern dem Querschnitte proportional annehmen. Nur ist er den Versuchen zufolge bedeutend kleiner, als der nach der Längenrichtung der Fasern, so dass man für denselben bei Tannenholz mit Rücksicht auf eine lange Dauer höchstens 2 Ztr. per $\square''$ zulassen kann.

Bezeichnet man allgemein den fraglichen Widerstand per $\square''$ Querschnitt mit a'' Zentner, so beziffert sich der grösste zulässige Widerstand sämmtlicher Längenbalken in den Traggeländern, deren totaler Querschnitt $Nf\square''$ ist, offenbar auf Nfa'' Ztr., und da die grösste Anspruchsnahme in dieser Beziehung, wie vorhin bemerkt, an beiden Brückenenden stattfindet, so hat man zur Vermeidung einer jeden Besorgniss auch noch auf die Erfüllung der Bedingung

$$Nfa'' \geqq \tfrac{1}{2} g L$$

zu sehen. Hieraus folgt, dass die grösste zulässige Spannweite zwar auf die im §. 269 angegebene Weise zu berechnen sein wird, dass aber ausserdem untersucht werden muss, ob sie auch der weiteren Bedingung

$$L \leqq \frac{2Nfa''}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (576)$$

entspricht.

*) Nach dem §. 43 ad 1 ist es eigentlich nicht die Resultirende R, sondern ihre Componente $R_1 = R\cos\varphi$, welche das Gleichgewicht in dem obigen Sinne zu stören beabsichtigt; allein bei der jedenfalls nur geringen Biegung, wornach $\cos\varphi$ sehr nahe gleich der Einheit kommt, kann man sich erlauben, R mit R_1 zu verwechseln, und sofort die fragliche Wirkung unmittelbar nach der Resultirenden R zu beurtheilen.

Für das im §. 269 angegebene Beispiel hätte man wegen $N = 2$, $f = 288$, $g = 200$, und, wenn $a'' = 2$ Ztr. angenommen wird, $L \overset{=}{<} 11\overset{0}{\cdot}52$, welche Bedingung, da $L = 5 \cdot 7^0$ gefunden wurde, in der That vorhanden ist.

Ist die Construction der Traggeländer derart, dass der Querschnitt der Geländerbäume nicht durchaus derselbe bleibt, und ausserdem die schwächste Stelle der Traggeländer in der fraglichen Beziehung nicht unmittelbar an das Widerlager stosst, so hat man die diessfällige Untersuchung rücksichtlich dieser schwächsten Stelle und des daselbst vorhandenen widerstehenden Totalquerschnittes in besonderer Weise durchzuführen.

Ex. Bei der betrachteten Donaubrücke (Fig. 308) befindet sich augenscheinlich die schwächste Stelle in der fraglichen Beziehung dort, wo der bogenförmige Balken mit dem geraden zusammentrifft. Ist N diese Stelle nach der Bezeichnung in der Fig. 309, so hat man bei jener Donaubrücke $\overline{AN} = 3\frac{1}{3}^0$ und $g = 370$ Ztr., daher findet man zunächst für das Gewicht in der Strecke $\overline{AN}$, $g\overline{AN} = 1233\frac{1}{3}$ Ztr. Der Querschnitt an dieser Stelle ist kleiner, als in der Mitte des Geländers, er beträgt nämlich nur

$$(15 \times 9 + 21 \times 12) = 387 \square'',$$

somit für alle drei Geländer 1161 $\square''$, wornach sich der fragliche Widerstand auf $\frac{1233\frac{1}{3}}{1161} = 1{\cdot}06$ Ztr. per $\square''$ Querschnitt herausstellt, welcher als zulässig zu erkennen ist.

Aus dem Inhalte dieses §. geht deutlich hervor, dass die Tendenz einer Störung des Gleichgewichtes in der Richtung normal auf die Fasern in der Nähe der Widerlager bedeutend ist. Es wird daher die Ausfüllung des leeren Raumes im Traggeländer daselbst zur Erhöhung der Solidität des Bauobjectes wesentlich beitragen, besonders dann, wenn man gleichzeitig für ein festes Zusammenhalten der Füllhölzer mit den Traggeländern durch Verschraubung Sorge trägt. Die Anbringung solcher Füllhölzer hat z. B. bei der erwähnten Donaubrücke stattgefunden, obgleich sie daselbst nicht zwischen den Hauptbalken der Traggeländer liegen können.

Viertes Kapitel.

Brücken, wo die Tragwände nach amerikanischer Art aus Streckbalken, Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben bestehen.

§. 272.

Vorerinnerung. Bei den in der Ueberschrift bezeichneten Brücken handelt es sich vorzugsweise darum, die Längenbalken, Streckbalken, auf eine gewisse Entfernung auseinander zu halten, und dadurch einen zweckmässigen Trägerquerschnitt nach Art der Fig. 104, 126, 179 zu ermöglichen. Um aber die Vortheile eines solchen Querschnittes in seiner Anwendung nicht illusorisch zu machen, muss die Construction der Tragwände auch in ihren einzelnen Bestandtheilen dem Zwecke entsprechen, und insbesondere mit Rücksicht auf den (§. 41) die Bedingung zu erreichen angestrebt werden, dass eine auf die geradlinige Längenaxe vor der Biegung gezogene Normale auch eine solche in Beziehung auf die durch die Biegung gekrümmte Längenaxe verbleibt. Ferner hat man bei der oft bedeutenden Höhe der Tragwände das etwa zu besorgende Ausweichen derselben nach der Seite hin auf genügende Weise mittelst Querbalken, Verstrebungen etc. zu verhindern. Da diese gestellten Bedingungen sich nicht vollkommen, sondern nur in einem gewissen Grade erreichen lassen, so kann man bei der diessfälligen Berechnung den Widerstand solcher Brücken niemals so gross annehmen, als er bei vollkommener Erfüllung jener Bedingungen sein würde. Wie gross der Unterschied in dieser Hinsicht sein mag, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, es hängt diess von der näheren Construction der Tragwände ab. Diese können übrigens bloss aus Holz, oder bloss aus Eisen, oder endlich theilweise aus beiden Materialien bestehen.

§. 273.

Maximalspannweite mit Rücksicht auf den Brücken-Querschnitt. Darf man sich nach Erwägung der Bemerkungen des vorigen §. erlauben, den Widerstand einer jeden Tragwand nach Massgabe

ihres Querschnittes in Gemässheit der §§. 134 und 146 zu beurtheilen, so kann man die grösste zulässige Spannweite nach der allgemeinen Formel (571) bestimmen. In dem diessfalls zu betrachtenden Querschnitte (Fig. 310) hat man in A die unteren, und in B die oberen Streckbalken aller Tragwände sich vereinigt vorzustellen, und hiernach sowohl das Trägheitsmoment t, als auch das Tragmoment in die Berechnung einzuführen. Dabei wird es, weil gewöhnlich die Höhendimension der Streckbalken in der Regel gegen die Tragwandhöhe verhältnissmässig klein ist, gestattet sein, jeden der beiden Streckbalkenquerschnitte in A und B in seinem Schwerpuncte concentrirt anzunehmen, und von da aus gerechnet für die oberen Fasern die Grösse h'', für die unteren Fasern aber die Grösse h' als mittleren Abstand von der durch den gemeinschaftlichen Schwerpunct gezogenen horizontalen Axe gelten zu lassen, wodurch man zugleich berechtiget wird, von den einfachen Formeln der §§. 138 und 145 Gebrauch zu machen.

Fig. 310.

B

A

Nennt man daher in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen in jenen §§

f' den Streckbalkenquerschnitt in A,

f'' „ „ „ „ B,

und

$(f'+f'') = F$ den totalen Querschnitt,

so ist zunächst

$$h' = \frac{f''}{F}\, h \text{ und } h'' = \frac{f'}{F}\, h,$$

ferner das Trägheitsmoment des Brückenquerschnittes nach der Formel (228)

$$t = F h' h'' = \left(\frac{f' f''}{F}\right) h^2,$$

das Tragmoment aber nach dem §. 145

$$M = \begin{cases} \text{entw. } \dfrac{a' t}{h'} = a' F h'' = a' f' h \\ \text{oder } \dfrac{r' t}{h''} = r' F h' = r' f'' h, \end{cases}$$

je nachdem der eine oder der andere Werth der kleinere ist.

Die Werthe a' und r' beziehen sich auf die grösste Spannung und beziehungsweise Pressung per □'' Querschnitt, welche nach dem

Materiale, nach der Solidität der Zusammensetzung der Tragwände und nach dem verlangten Sicherheitsgrade zugelassen werden können, wobei es sich von selbst versteht, dass Behufs der Feststellung jener Pressung r' auch noch der §. 249 zu berücksichtigen sein wird.

Mit Hilfe der obigen Gleichungen findet man nunmehr die Maximalspannweite aus der Formel (571)

$$L = \begin{Bmatrix} \text{entw. } \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a'f'h}{g}} \\ \text{oder } \frac{1}{8}\sqrt{\frac{r'f''h}{g}} \end{Bmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (577),$$

wo jedesmal der kleinere Alternativwerth zu gelten hat.

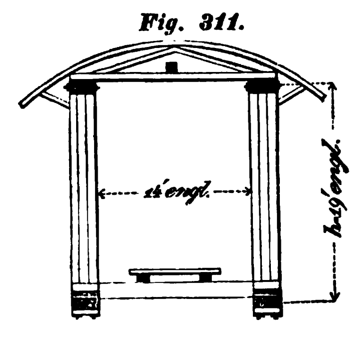
Ferner ist die Maximalbiegung analog mit der Gleichung (575)

$$\Delta = 4860 \frac{g L^4}{m' \left(\frac{f'f''}{F}\right) h^2} = 4860 \frac{g L^4 F}{m' f' f'' h^2} \quad \cdot \quad (578),$$

wo der Modul der Längenveränderung ebenfalls dem Materiale, der Solidität der Zusammensetzung der Tragwände und dem verlangten Sicherheitsgrade anzupassen ist.

Ex. Die über den Chikapoe auf der Connecticut'schen Eisenbahn bestehende Brücke hat den Querschnitt (Fig. 311). Die beiderseitigen Tragwände haben zusammen oben 6 und unten 10 Streckbalken. Mit Benützung der in der Förster'schen Bauzeitung vom Jahre 1851 gemachten Mittheilung des königl. bairischen Ingenieurs Culmann kann man folgende Daten zu Grunde legen:

Fig. 311.



1. Der mittlere Abstand der oberen und unteren Streckbalken beträgt 19 englische Fuss. Es ist daher . . . $h = 219{\cdot}8$ Wiener Zoll.

2. Der Querschnitt der unteren 10 Streckbalken beträgt nach Abschlag der Verschneidungen und Stösse 520 englische □''. Es ist somit . . . . $f' = 483{\cdot}5$ Wiener □''.

3. Der Querschnitt der oberen 6 Streckbalken beträgt nach Abschlag der Verschneidungen (die Stösse sind hier nicht nachtheilig) 510 englische □''. Hiernach ist . . . $f'' = 474{\cdot}1$ Wiener □''.

$h = \frac{1}{9} l$;

4. Das eigene Gewicht der Brücke beträgt 800 englische Pfund per englischen Currentfuss. Es ist also das Gewicht per Wiener Längenklafter Bahn $g_1 = 40{\cdot}3$ Wiener Zentner. Nimmt man noch die grösste zufällige Belastung ungefähr mit 120 Zentnern an, was in Hinblick auf den §. 263 genügend erscheint, so hat man für die Totalbelastung der Brücke per Längenklafter den Werth

$$g = (g_1 + g_2) = 160{\cdot}3 \text{ Ztr.}$$

einzuführen.

Da $f'' < f'$, zugleich aber auch $r' < a'$ ist, weil die Streckbalken aus Holz angefertigt sind, so wird offenbar zur Bestimmung der unter diesen Verhältnissen zulässigen grössten Spannweite von den Alternativ-Relationen (577) jene mit r' zu wählen, und hiernach

$$L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{r\,f''\,h}{g}}$$

zu setzen sein. Substituirt man in diese Formel die obigen numerischen Werthe, und beachtet zugleich, dass die Streckbalken aus amerikanischem Kieferholze bestehen, für welches man mit Rücksicht auf die obwaltenden Umstände die grösste Pressung r' ungefähr mit $10\frac{1}{2}$ Ztr. annehmen kann, so erhält man

$$L = 8{\cdot}50\sqrt{r'} = 27{\cdot}5 \text{ Wiener Klafter.}$$

Mit diesem Resultate steht die ausgeführte Spannweite in naher Uebereinstimmung, denn dieselbe beträgt 173 engl. Fuss = 27·80 Wr. Klftr.

Man kann übrigens auch umgekehrt aus der bekannten Spannweite auf die grösste Anspruchsnahme des Materiales schliessen, indem man aus der bezüglichen Gleichung die Pressung r' bestimmt. Diese Bestimmung ergäbe z. B. in dem oben untersuchten Falle

$$r' = \left(\frac{L}{8{\cdot}50}\right)^2 = \left(\frac{27{\cdot}80}{8{\cdot}50}\right)^2 = 10{\cdot}7 \text{ Wr. Ztr.}$$

Setzt man noch zur Bestimmung der Maximalbiegung der Brücke mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände (§§. 23 u. 253) den Modul der Längenveränderung des Kieferholzes in runder Zahl $m = 12000$, so findet man aus der Gleichung (578) die fragliche Biegung $\Delta = 3{\cdot}3$ Wr. Zoll.

§ 274.

Zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den Streckbalken zur Erreichung des grössten Tragvermögens, und Bestimmung der Streckbalkenquerschnitte in diesem Falle. Mit Rücksicht auf die Erörterungen im §. 145 geht hervor, dass bei solchen Tragwänden, welche im gegenwärtigen Kapitel in Betracht kommen, in Beziehung auf das Tragvermögen der hiermit construirten Brücke es nicht gleichgiltig sei, auf welche Weise das Materiale in den oberen und unteren Streckbalken vertheilt wird. Durch die Anwendung der in jenem §. gefundenen Resultate zeigt es sich nämlich, dass die zweckmässigste Vertheilung jene ist, bei welcher in Folge der Biegung die Elasticitätsgränzen in allen Streckbalken gleichzeitig erreicht, somit die beiden Alternativwerthe in der Formel (577) einander gleich werden. Hierdurch entsteht zwischen den Querschnitten f' und f'' dasselbe Verhältniss, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung r' und der grössten zulässigen Spannung a' stattfindet.

Es ergibt sich daher in dem vortheilhaftesten Falle die Relation

$$a'f' = r'f'' \text{ oder } f' : f'' = r' : a' \quad . \quad . \quad (579),$$

und die Maximalspannweite lässt sich durch die Formel

$$L = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{a'f'h}{g}} = \tfrac{1}{3} \sqrt{\frac{r'f''h}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad (580)$$

ausdrücken, woraus man sofort die Streckbalkenquerschnitte, nämlich

$$\left. \begin{aligned} f' &= \frac{9\,g\,L^2}{a'h} \\ \text{und } f'' &= \frac{9\,g\,L^2}{r'h} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (581)$$

findet, wenn die Spannweite L in Klaftern, die Tragwandhöhe h in Zollen, das auf die Längenklafter Brückenbahn entfallende Totalgewicht g in Zentnern, und die mit Rücksicht auf die vorhandenen Umstände zuzulassende grösste Spannung und Pressung des Materiales per □″ Querschnitt (a' und r') gleichfalls in Zentnern gegeben sind.

Da das Gewicht g zum Theile auch von dem Querschnitte der Streckbalken abhängt, dieses aber bei einer nach den Formeln (581) durchzuführenden Berechnung im Voraus unbekannt ist, so wird man sich dabei,

wie in vielen Fällen der angewandten Mathematik, der sogenannten *regula falsi* mit Vortheil bedienen können. Hiernach nehme man das fragliche Gewicht der Streckbalken vorerst approximativ an, bestimme mit Rücksicht auf dasselbe den Werth von g, und berechne sofort mittelst der Formel (581) die Querschnitte f' und f''. Aus diesen Resultaten wird man entnehmen können, wie nahe man mit dem approximativen Werthe für das Gewicht der Streckbalken der Wahrheit gekommen ist, und von dieser Wahrnehmung wird es abhängen, ob die auf die obige Weise berechneten Querschnitte für die Anwendung genügen werden, oder ob auf Grundlage des verbesserten Werthes für g die Berechnung von f' und f'' wiederholt werden soll. Bei einer derartigen Erwägung braucht man übrigens wegen der zu erreichenden Genauigkeit nicht ängstlich zu sein, weil das Gewicht der Streckbalken nur einen kleinen Theil des Totalgewichtes g bildet, folglich der durch die approximative Annahme des ersteren entstehende Fehler gegen das Ganze in der Regel nicht vom Belange sein wird, zumal insbesondere auch die Einführung der grössten zufälligen Belastung, welche einen weit grösseren Antheil jenes Totalgewichtes bildet, auf mehr oder minder schwankenden Grundlagen beruhet.

Zu den obigen Formeln (581) gelangt man noch auf eine andere sehr einfache Weise durch die Vergegenwärtigung der in der Anmerkung 1 (Seite 260) angestellten Betrachtung.

Nennt man nämlich S die Totalspannung in den unteren Streckbalken, und P die Totalpressung in den oberen, so ist vor Allem

$$S = a'f' \text{ und } P = r'f'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (582),$$

jedenfalls aber

$$S = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (583),$$

indem diese Anspruchsnahmen auf den gefährlichen Querschnitt bezogen werden.

Ferner ist das statische Widerstandsmoment an dieser Stelle (Tragmoment M) aus dem Producte von S oder P und der Tragwandhöhe h zu bilden, also

$$M = Sh = Ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (584)$$

zu setzen.

Eigentlich hat man für das statische Moment der Widerstände S und P in Bezug auf die neutrale Axe im Brückenquerschnitte

$$M = Sh' + Ph''.$$

Indem aber einerseits $S = P$ und andererseits $(h' + h'') = h$ ist, so gelangt man offenbar auf jenen einfachen Ausdruck (584),

wobei, wie man schon auf Seite 260 zu bemerken Gelegenheit hatte, augenscheinlich die Lage der neutralen Axe zwischen den oberen und unteren Streckbalken keinen Einfluss hat.

Betreffend das statische Moment der Brückenbelastung in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, so muss dasselbe eben so gross, wie jenes Tragmoment sein, gleichzeitig aber auch der Gleichung (109) entsprechen. Hiernach ist dasselbe, weil man die hier in Klaftern verstandene Spannweite L in die Formel (109) in Zollen zu substituiren hat, durch den Ausdruck

$$\frac{1}{8} Q (72 L) = 9 Q L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (585)$$

gegeben, worin Q das Tragvermögen der Brücke, also das Totalgewicht derselben $g L$ vorstellt.

Die Gleichsetzung der Werthe (584) und (585) ergibt nunmehr die Bedingungsgleichung

$$S h = P h = 9 Q L = 9 g L^2,$$

woraus zunächst

$$S = P = \frac{9 Q L}{h} = \frac{9 g L^2}{h} \quad . \quad . \quad . \quad (586),$$

und hiermit wegen der Relation (582) ebenfalls, wie unter (581),

$$f' = \frac{9 Q L}{a' h} = \frac{9 g L^2}{a' h}$$

und

$$f'' = \frac{9 Q L}{r' h} = \frac{9 g L^2}{r' h}$$

folgt, so dass also auf diese Weise für die Querschnitte der Streckbalken wieder die früheren Werthe gefunden werden.

Die auf diese Betrachtung gestützte Berechnungsweise ist diejenige, welcher sich gewöhnlich die ausübenden Ingenieure bedienen, und dieselbe empfiehlt sich in der That desshalb, weil sie offenbar eine nähere Kenntniss der Biegungstheorie nicht voraussetzt. Doch ist, wie man aus der Uebereinstimmung der Resultate dieser Berechnungsweise mit den Formeln (581) ersehen hat, die so ziemlich verbreitete Meinung, dass die Lehren der Biegungstheorie nicht zu denselben Resultaten führen, keineswegs richtig, und sie findet lediglich ihre Erklärung in dem Umstande, dass die älteren Theorien, deren man sich sonst bediente, eine allgemeine Anwendung nicht zulassen, daher vor Irrthümern nicht schützen, wie diess schon mehrere Male, insbesondere aber in der Anmerkung 1 auf Seite 260 auseinandergesetzt worden ist.

Zufolge der Formel (579) erhalten die oberen und unteren Streckbalken bei der zweckmässigsten Anordnung derselben un-

gleiche Querschnitte, und zwar wird vorzüglich bei der Anwendung von Holz oder Schmiedeeisen, weil für diese Materialien (namentlich in Berücksichtigung der §§. 249 und 250) $r' < a'$ ist, auf die oberen Streckbalken zusammen ein verhältnissmässig grösserer Querschnitt, als auf die unteren entfallen.

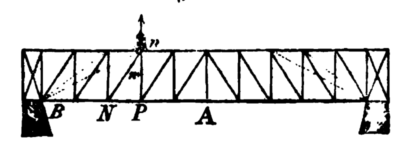
Die Formeln (579), (580) und (581) lassen sich übrigens auch dann anwenden, wenn die oberen und unteren Streckbalken aus verschiedenen Materialien bestehen *).

§. 275.

Construction der Tragwände in ihren einzelnen Bestandtheilen. Hängsäulen (Hängschrauben). Streben. In den beiden vorigen §§. hat man die Maximalspannweite bloss von dem Widerstande der oberen und unteren Streckbalken in ihrer Längenrichtung in der Voraussetzung abhängig gemacht, dass auch die übrigen Bestandtheile der Tragwände die nöthige Stärke besitzen. Es erübrigt daher noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung diese Voraussetzung stattfinden darf, wie nämlich in diesem Falle die Anordnung der zwischen den Streckbalken vorhandenen Constructionsbestandtheile, und zwar sowohl hinsichtlich ihrer Dimensionen, als auch hinsichtlich ihrer Verbindung unter einander und mit den Streckbalken zu geschehen hat.

Die einfachste Anordnung besteht bekanntlich aus verticalen Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben (Fig. 312). Diese Constructionsbestandtheile haben die Spannungen in den unteren und die Pressungen in den oberen Streckbalken angemessen zu reguliren, und dadurch es möglich zu machen, dass jede Tragwand auf die in den §§. 273 und 274 erörterte Weise als Träger betrachtet werden kann. Aus diesem Grunde muss jede Strebe eine gewisse Pressung und jede Hängsäule

Fig. 312.



*) Diess ist z. B. bei den Schifkorn'schen Brücken der Fall, wo die oberen der Pressung ausgesetzten Streckbalken aus Gusseisenstücken, die unteren dem Zuge ausgesetzten aber aus Schmiedeeisen-Schienen gebildet werden.

(Hängschraube) eine gewisse Spannung auszuhalten im Stande sein. Um diess beurtheilen zu können, ist vor Allem die Bestimmung der bezüglichen Spannungen und Pressungen nöthig.

§. 276.

Spannung in den Hängsäulen (Hängschrauben). Pressung auf die Streben. Nach dem §. 43 ad 1 ist in einem Brückenquerschnitte die Kraft $R \cos \varphi$ normal auf die Längenrichtung der Fasern thätig, und diese Kraft kann bei den vorkommenden kleinen Biegungen der Resultirenden R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf die gewählte Brückenstelle NnP (Fig. 312) gleich gesetzt werden, wie diess z. B. auch schon im §. 271 geschehen ist.

Diese Resultirende ist es nun, welche an einer Brückenstelle den Abstand der oberen und unteren Streckbalken zu verändern beabsichtigt, und desshalb eine Spannung in den Hängsäulen (Hängschrauben) und eine Pressung auf die Streben hervorbringt.

Hieraus folgt:

1. Alle an einer Brückenstelle NnP vorkommenden Hängsäulen (Hängschrauben) haben zusammen eine Spannung Σ auszuhalten, die der betreffenden Resultirenden R der einwirkenden Kräfte gleich ist.

Desshalb ist

$$\Sigma = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (587).$$

2. Nach derselben Resultirenden hat man auch die verticale Pressung Π auf die Streben daselbst zu bemessen.

Desshalb ist auch

$$\Pi = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (588).$$

3. Die eigentliche Pressung Π' in der Richtung der Streben wird gefunden, wenn man die verticale Pressung in die zwei Componenten Π' und Π'' (Fig. 313) zerlegt, von welchen die erste Componente Π' die fragliche Pressung in der Strebenrichtung, die zweite Componente Π'' aber diejenige Pressung bezeichnet, welche in die horizontalen Streckbalken übertragen wird.

Fig. 313.

Hiernach ist

$$\Pi' = \frac{\Pi}{\cos w} = \frac{R}{\cos w} \text{ und } \Pi'' = \Pi \, tg\, w = R \, tg\, w \quad . \quad . \quad (589),$$

wobei w den Winkel bezeichnet, welchen die Strebenrichtung mit der Verticalen einschliesst.

Die Pressung in der Strebenrichtung nimmt daher desto mehr zu, je schiefer dieselbe ist.

Setzt man (Fig. 312) die Tragwandhöhe . . . $\overline{Pn} = h$,
die Strebenlänge . . . . $\overline{Nn} = \sigma$
und die Entfernung der Hängsäulen (Hängschrauben) von
einander . . . . $\overline{NP} = \varepsilon$,

so hat man wegen $\cos w = \frac{h}{\sigma}$ und $tg\, w = \frac{\varepsilon}{h}$ auch

$$\left.\begin{array}{l} \Pi' = \frac{\sigma}{h} R \\ \text{und } \Pi'' = \frac{\varepsilon}{h} R \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (590).$$

4. Da die Resultirende R mit der Lage der Brückenstelle NnP variirt, so erleiden die Streben und Hängsäulen (Hängschrauben) an den verschiedenen Brückenstellen eine verschiedene Anspruchsnahme, welche auch noch mit der verschiedenen zufälligen Belastung wechselt. Die grösste Anspruchsnahme, welche in dieser Hinsicht eintreten kann, ist einer besonderen Aufmerksamkeit zu würdigen.

§. 277.

Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben bei einer gleichmässig vertheilten Belastung nach der ganzen Brückenlänge. Ist die totale Belastung, nämlich das eigene und das zufällige Gewicht, nach der ganzen Brückenlänge L gleichmässsig vertheilt, so wird die Resultirende R für eine beliebig gewählte Stelle NnP (Fig. 312)

R = dem Gewichte in der Strecke $\overline{AN}$ . . (591),

wie man diess bereits im §. 271 gesehen hat.

Nach dieser Gleichung in Verbindung mit dem vorhergehenden §. kann man in dem vorausgesetzten Falle Folgendes behaupten:

1. Alle an einer Brückenstelle vorhandenen Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben erleiden, und zwar erstere zusammen eine Spannung (Σ), letztere aber zusammen eine verticale Pressung (Π),

welche man nach dem Antheile der Totalbelastung zu bemessen hat, der zwischen der Mitte der Brücke und der gewählten Brückenstelle vorhanden ist.

2. Die Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben nimmt von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, woselbst sie am grössten wird. In der Nähe dieser Enden ist beinahe $R = \frac{1}{2} g L = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) L = \frac{1}{2} Q$, nämlich gleich der halben Totalbelastung.

Angesichts dieses Resultates ist es zu empfehlen, die den Widerlagern zunächst gelegenen Hängsäulen (Hängschrauben) und eben so die Streben daselbst so stark zu machen, dass die ersteren zusammen eine Spannung von $\frac{1}{2} Q$, und die letzteren eine verticale Pressung gleichfalls von $\frac{1}{2} Q$ mit Sicherheit aushalten können.

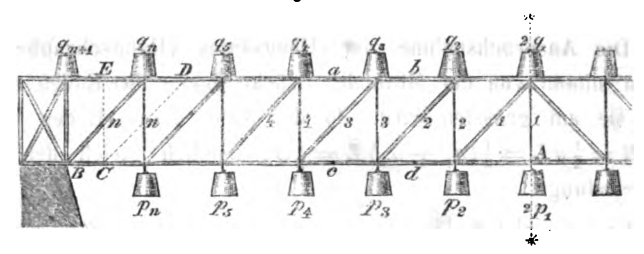
Die Anzahl der Hängsäulen (Hängschrauben) und der Streben, welche nach der Brückenbreite vorhanden sind, wird die grösste Anspruchsnahme, welcher die genannten Constructionstheile Stück für Stück ausgesetzt werden können, und sofort die nöthige Stärke derselben beurtheilen lassen.

In vielen Fällen wird es angezeigt sein, den Streben in der Nähe der Brückenenden wegen ihrer bedeutenden Anspruchsnahme eine Unterstützung mittelst anderen Streben, z. B. in der Art zukommen zu lassen, wie diess in der Fig. 312 mit punctirten Linien angedeutet erscheint.

Anmerkung. Die in diesem §. besprochene Resultirende R der einwirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebig gelegene Stelle $Nn\,P$ (Fig. 312) wäre nach dem Gesetze der gleichförmig vertheilten Belastung mit $R = g . \overline{AN} = gx$ anzunehmen, wenn g den Antheil der Totalbelastung per Klafter Brückenlänge bezeichnet, und $\overline{AN} = x$ gesetzt wird. Allein diese Berechnung ist in dem vorliegenden Falle nur eine annäherungsweise, da augenscheinlich die Totalbelastung sich eigentlich nur an einzelnen Stellen, theils unmittelbar auf die Strebenköpfe, theils unmittelbar auf die Schraubenfüsse concentrirt. Will man sich über die Grösse der Resultirenden R und sofort über die Wirkung der Totalbelastung Q auf die einzelnen Hängschrauben und Streben eine nähere Kenntniss verschaffen, so kann man auf folgende Weise verfahren:

Es sei (Fig. 314) in A die Mitte der Brücke und in B das eine Ende derselben, und man nehme an, dass von der gesammten schwebenden Be-

Fig. 314.



lastung der halben Brücke ($\frac{1}{2}Q$) unmittelbar auf die Köpfe der Streben Nr. 1, 2, 3, 4, ... n beziehungsweise die Gewichtsantheile $2q_1$, q_2, q_3, q_4, ... q_n Ztr., hingegen unmittelbar auf die Füsse der Hängschrauben Nr. 1, 2, 3, 4, . n beziehungsweise die Gewichtsantheile $2p_1$, p_2, p_3, p_4 .. p_n Ztr. entfallen. Für eine gleichmässig vertheilte Belastung kann man die bemerkten Gewichtsantheile durch Eintheilung von Mitte zu Mitte der Hängschraubenabstände bestimmen, so dass z. B. das Gewicht q_3 derjenigen Belastung gleich wäre, welche thatsächlich in der Strecke $\overline{ab}$ oberhalb der Strebenköpfe Nr. 3 vorhanden ist, wobei a die Mitte zwischen q_3 und q_4, b aber jene zwischen q_2 und q_3 bezeichnet. Diese Belastung wird insbesondere aus dem Gewichte der oberen Streckbalken, ferner aus jenem der etwa vorhandenen Querriegel, Bedachung u. s. w. bestehen. Eben so wird beispielsweise der Gewichtsantheil p_3 nach der Belastung in der unteren Strecke $\overline{cd}$ zu bemessen sein, welche wieder insbesondere aus dem Gewichte der unteren Streckbalken, der Streben Nr. 2, der Brückenbahn, der zufälligen Last u. s. w. zu bestehen hat. Wäre die Brückenbahn nicht unten, sondern oben angebracht, so würde ihr eigenes Gewicht sammt der zufälligen Last bei den mit q bezeichneten Gewichtsantheilen zu berücksichtigen sein. Von $2p_1$ und $2q_1$ wird selbstverständlich nur die halbe Wirkung mittelst der Streben Nr. 1 übertragen, weil die andere halbe Wirkung auf die jenseitige Hälfte kommt. Uebrigens kann wegen der gleichförmigen Belastungsvertheilung

$$2q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \ldots = q_n = q,$$
$$2p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \ldots = p_n = p,$$

und

$$(p + q) = \frac{Q}{2n}$$

gesetzt werden, wenn $2n$ die Anzahl der rechteckigen Felder bezeichnet, in welche die Tragwand durch die Hängschrauben getheilt wird.

Diess vorausgesetzt, kann man nunmehr Folgendes schliessen:

Zuerst ist die Spannung in den Hängschrauben

Nr. 1 . . . . $\Sigma_1 = 2p_1 = p$,

Nr. 2, indem hier zu p_2 noch die von den Streben Nr. 1 übertragenen Gewichtshälften p_1 und q_1 hinzukommen,

$$\Sigma_2 = p_1 + p_2 + q_1 = \tfrac{3}{2}p + \tfrac{1}{2}q.$$

Nr. 3, indem hier zu p_3 noch der von den Streben Nr. 2 übertragene Zug Σ_2 und das gleichfalls übertragene Gewicht q_2 hinzuzuschlagen sind,

$$\Sigma_3 = p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + q_2 = \tfrac{5}{2}p + \tfrac{3}{2}q,$$

Nr. 4, nach einem ähnlichen Raisonnement,

$$\Sigma_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 = \tfrac{7}{2}p + \tfrac{5}{2}q,$$

endlich in den letzten Hängschrauben

Nr. n, . . $\Sigma_n = p_1 + p_2 + .. + p_n + q_1 + q_2 + .. q_{n-1}$

$$= \int^a (p_n) + \int^a (q_{n-1}) = \left(\frac{2n-1}{2}\right)p + \left(\frac{2n-3}{2}\right)q$$

$$= \left(\frac{2n-1}{4n}\right)Q - q = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q - q,$$

wobei $\int^a$ die vollzogene Summirung der gleichartigen Theile anzeigt.

Ferner ist die verticale Pressung auf die Streben in

Nr. 1, indem hier nur die Hälfte der Gewichtsantheile $2p_1$ und $2q_1$ in Betracht kommt,

$$\Pi_1 = p_1 + q_1 = \tfrac{1}{2}(p+q),$$

Nr. 2, indem das Gewicht q_2 durch den Σ_2 zu vermehren ist,

$$\Pi_2 = p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = \tfrac{3}{2}(p+q),$$

Nr. 3, indem man das Gewicht q_3 mit dem Zuge Σ_3 zu vereinigen hat,

$$\Pi_3 = p_1 + p_2 + p_3 + q_1 + p_2 + q_3 = \tfrac{5}{2}(p+q),$$

Nr. 4, nach einem ähnlichen Schlusse,

$$\Pi_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \tfrac{7}{2}(p+q),$$

endlich auf die letzten Streben

Nr. n, . . $\Pi_n = p_1 + p_2 + .. + p_n + q_1 + q_2 + .. + q_n$

$$= \int^a (p_n) + \int^a (q_n) = \left(\frac{2n-1}{2}\right)(p+q)$$

$$= \left(\frac{2n-1}{4n}\right)Q = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q.$$

Die Spannungen in den Hängschrauben und die Pressungen auf die Streben nehmen daher in der That von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, und sind nach den Gewichten zu bemessen, welche zwischen jener Mitte und den betreffenden Constructionstheilen thätig sind. Nur ist diese Thätigkeit einerseits auf die Schraubenfüsse, andererseits aber auf die Strebenköpfe zu beziehen.

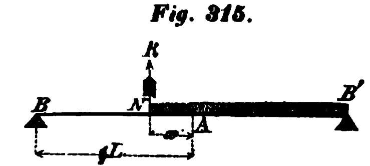
Die letzten Hängschrauben werden, wie man bereits oben bemerkt hat, der grössten Spannung ausgesetzt. Diese ist der Summe der Gewichte $\left[\int^a (p_n) + \int^a (q_{n-1}) = \left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right)Q - q\right]$ gleich, welche zwischen der Mitte der Brücke (A) und der Geraden $\overline{CD}$ liegen, wenn diese

durch den Mittelpunct der Schraubenlänge parallel zur Strebenrichtung gezogen wird. Eben so erleiden die letzten Streben den grössten verticalen Druck. Dieser ist der Summe der Gewichte $\left[\int^a (p_n) + \int^a (q_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) Q\right]$ gleich, welche zwischen jener Mitte (A) und der Geraden $\overline{CE}$ liegen, wenn diese durch den Mittelpunct der Strebenlänge parallel zu den Hängschrauben gezogen wird. Beide Gewichtssummen weichen augenscheinlich nur wenig von dem halben Totalgewichte ($\frac{1}{2} Q$) ab, und können demselben, namentlich bei grossen Brücken, gleichgesetzt werden, wie man diess im gegenwärtigen §. bereits angenommen hat.

Aus dieser Darstellung geht übrigens deutlich hervor, dass die Resultirende R, von welcher die Anspruchsnahme der Hängschrauben abhängt, immer etwas kleiner ist, als jene, nach welcher die Anspruchsnahme der Streben zu bemessen kommt, und dass überdiess die erstere auch davon abhängt, in welcher Weise die Totalbelastung auf die unteren und oberen Streckbalken übertragen wird, daher es streng genommen nicht gleichgiltig ist, ob die Brückenbahn unmittelbar mit den oberen oder mit den unteren Streckbalken verbunden, oder aber, ob sie zwischen denselben angebracht erscheint. Indessen wird der Einfluss dieser Verschiedenheiten desto unwesentlicher, je näher die zu betrachtenden Streben und Hängschrauben an den Brückenenden liegen, und man wird auch für die anderen Brückenstellen jedenfalls ein brauchbares Resultat erhalten, wenn man die in den §§. 276 und 277 bezeichnete Resultirende R nach dem Gesetze der gleichförmig vertheilten Belastung berechnet, nämlich $R = g \, . \, \overline{AN} = g\,x$ annimmt, wo die Abscisse $x = \overline{AN}$ bis zum Fusse der betreffenden Strebe reicht, und hiernach sowohl die Spannung in den Hängschrauben (Formel 587), als auch die Pressung auf die Streben (Formeln 588, 589 und 590) bestimmt.

§. 278.

Anspruchsnahme der Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben, wenn nicht die ganze, sondern nur ein Theil der Brückenlänge zufällig belastet ist. Im vorigen §. ist angenommen, dass die zufällige Belastung über die ganze Brückenlänge sich erstrecke. Diese Annahme ist allerdings die ungünstigste für die Hängsäulen (Hängschrauben) und Streben zunächst den beiden Brückenenden. Für eine andere Brückenstelle hingegen kann die massgebende Resultirende R' der einwirkenden Kräfte grösser werden, als sie aus der Gleichung (591) folgen würde, indem eine theilweise zufällige Belastung der Brücke ungünstiger sein kann. Man findet leicht, dass in dieser Hinsicht



die Resultirende R (Fig. 315) für eine Brückenstelle, welche in N zwischen der Mitte A und dem Ende B liegt, am grössten wird, wenn nicht die ganze Länge, sondern nur ihr grösserer Theil $\overline{B'N}$ zufällig belastet ist, während der kleinere Theil $\overline{BN}$ bloss sein eigenes Gewicht zu tragen hat.

In diesem Falle ist nämlich das eigene Brückengewicht in der Strecke $\overline{BN}$ . . . . . $= g_1 (\frac{1}{2} L - x)$,

das aus der eigenen und der zufälligen Belastung der Brücke in der Strecke $\overline{BN}$ zusammengesetzte Gewicht . . . $= (g_1 + g_2)(\frac{1}{2} L + x)$,

der Druck auf die Stütze in B $= \frac{1}{2} L (g_1 + \frac{1}{4} g_2) + \frac{g_2}{2L}(Lx + x^2)$,

jener „ „ „ „ B' $= \frac{1}{2} L (g_1 + \frac{3}{4} g_2) + \frac{g_2}{2L}(Lx - x^2)$,

endlich der numerische Werth der fraglichen Resultirenden

$$R = \left\{ \begin{array}{c} \text{dem Drucke} \\ \text{auf die Stütze} \\ \text{in } B \end{array} \right. - \left\{ \begin{array}{l} \text{dem Gewichte in} \\ \text{der Strecke } \overline{BN}, \end{array} \right.$$

daher auch

$$R = \tfrac{1}{8} g_2 L + (g_1 + \tfrac{1}{2} g_2) x + \frac{g_2}{2L} x^2 = (g_1 + g_2) x + \frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Gewichte in der} \\ \text{Strecke } \overline{AN} \end{array} \right. + \frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (592).$$

Vergleicht man diesen Werth mit jenem der Gleichung (591), so sieht man, dass im gegenwärtigen Falle bei der theilweisen zufälligen Belastung der Brücke die Resultirende für die betrachtete Brückenstelle um $\frac{g_2}{8L} (L - 2x)^2$ grösser ist, als in dem Falle, wenn die zufällige Belastung nach der ganzen Brückenlänge vorhanden wäre. Nur für $x = \frac{1}{2} L$, also für die Brückenenden werden die beiderseitigen Resultate einander gleich. In der That sind sodann die zwei verglichenen Fälle identisch, indem die belastete Strecke $\overline{B'N}$ gleich der ganzen Länge wird.

Nennt man die jeweilige Differenz der verglichenen Resultirenden ΔR, so hat man allgemein

$$\Delta R = \frac{g_2}{8L}(L - 2x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (593),$$

welche Differenz von dem eigenen Gewichte der Brücke nicht abhängt, übrigens von den Enden gegen die Mitte derselben zunimmt, und bei dieser letzteren am grössten wird.

So z. B. erhält man

für $x = 0$ . . $\Delta R = 0{\cdot}125\, g_2\, L$.	für $x = 0{\cdot}3\, L, \Delta R = 0\, 020 g_2\, L$,
„ $x = 0{\cdot}1\, L, \Delta R = 0\, 080\, g_2\, L$,	„ $x = 0{\cdot}4\, L, \Delta R = 0\, 005\, g_2\, L$,
„ $x = 0{\cdot}2\, L, \Delta R = 0{\cdot}045\, g_2\, L$,	„ $x = 0\, 5\, L, \Delta R = 0$.

Die grösste Differenz, welche für $x = 0$ in der Mitte der Brücke stattfinden kann, ist also $\frac{1}{8} g_2 L$, oder gleich dem achten Theile der grössten zufälligen Belastung $g_2 L$.

Hiernach erleiden die Hängsäulen (Hängschrauben) in der Mitte der Brücke, wenn die grösste zufällige Belastung nur auf der halben Brückenlänge vorhanden ist, eine grössere Spannung von $\frac{1}{8} g_2 L$ Ztrn., als in dem Falle, wenn die ganze Brücke in derselben Weise gleichförmig belastet wäre. Das Gleiche gilt von der verticalen Pressung auf die Streben in der Mitte der Brücke.

Der Ausdruck (592) zeigt übrigens, das die durch die ungünstigsten Fälle entstehenden Werthe der Resultirenden R noch immer von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zunehmen, und daher an diesen letzteren jedenfalls die grösste Anspruchsnahme der Streben und Hängsäulen vorhanden ist. Wenn also an den verschiedenen Brückenstellen sowohl die Streben als auch die Hängsäulen gleich stark gemacht werden, so wird lediglich die Ueberzeugung genügen, dass diese Constructionsbestandtheile in der Nähe der Brückenenden die nöthige Solidität besitzen, ohne dass es nothwendig erscheint, in eine nähere Untersuchung bezüglich der anderen Brückenstellen einzugehen. Diese Ueberzeugung wird man sich nach Anleitung des vorigen §. verschaffen. Wäre aber eine nähere Untersuchung auch bezüglich anderer Brückenstellen nothwendig, so hätte man dazu nicht die Gleichung (591), sondern jene unter (592) zu benützen.

Aus der Anmerkung des vorigen §. ist zu entnehmen, dass die Wirkung einer auf der Brückenbahn gleichförmig vertheilten Belastung streng genommen nicht nach dem Gesetze der Continuirlichkeit beurtheilt werden kann, weil sich jene Wirkung nur an einzelnen Stellen äussert. Aus diesem Grunde können auch die im gegenwärtigen §. erhaltenen Resultate nur annäherungsweise gelten. Sie sind indessen für den practischen Gebrauch vollkommen genügend, wenn man auch hier die Abscisse $\overline{AN} = x$ von der Mitte der Brücke bis zu dem Fusspuncte der betreffenden Strebe rechnet.

§. 279.

Weitere Bedingung für die Stärke der Streckbalken aus Anlass ihrer Anspruchsnahme normal auf die Längenrichtung der Fasern. Die in den vorigen §§. 277 und 278 erwähnte Resultirende R ist in der Richtung normal auf die Streckbalken thätig. Es müssen daher diese letzteren auch in dieser Hinsicht die gehörige Stärke besitzen, damit nicht wegen der Tendenz des Uebereinanderverschiebens in der Richtung eines Brückenquerschnittes eine Besorgniss entstehe. Wird, eben so wie im §. 271, der grösste Widerstand per $\square''$ mit a'' Zentnern bezeichnet, welchen das Materiale der Streckbalken der beabsichtigten Verschiebung ohne Gefahr entgegensetzen kann, und ist der Querschnitt aller Streckbalken $= F\square''$, so hat man offenbar die Bedingung

$$a''F \overline{\gtrless} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (594)$$

zu erfüllen. Der grösste Werth von R ist, wie man gesehen hat, an beiden Brückenenden vorhanden, er ist nämlich daselbst $= \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}gL$. Haben, wie gewöhnlich, die Streckbalken nach der ganzen Brückenlänge eine gleiche Stärke, so ist für den ungünstigsten Fall ($R = \frac{1}{2}Q$) zu untersuchen, ob in der That $a''F \overline{\gtrless} \frac{1}{2}gL$ oder

$$L \overline{\lessgtr} \frac{2a''F}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (595)$$

ist. Es ist daher nicht genug, die Maximalspannweite nach der Formel (577) zu berechnen, sondern man hat auch die Ueberzeugung nöthig, dass gleichzeitig der Relation (595) entsprochen werde.

Man kann übrigens auch umgekehrt, wenn die Spannweite bekannt ist, den nöthigen Werth von a'' bestimmen; denn es ist:

$$a'' \overline{\gtrless} \frac{gL}{2F}.$$

Sei z. B., wie im §. 273, $F = (f' + f'') = 957{\cdot}6 \square''$, $L = 27{\cdot}8$ Wr. Klftr. und $g = 160{\cdot}3$ Ztr., so muss der aufgestellten Bedingung gemäss $a'' \overline{\gtrless}\ 2{\cdot}38$ Ztr. sein. Bestehen nun die Streckbalken aus Kieferholz von guter Qualität, so kann man in der Richtung normal auf die Fasern wohl einen solchen Widerstand erwarten, der wenigstens 2·38 Ztr. per $\square''$ beträgt. So gross wäre nämlich die Anspruchsnahme in der Nähe der Brückenenden.

Will man die diessfällige Wirkung auch in anderen Brückenquerschnitten aufsuchen, so hat man in die Relation (595) für R jedesmal den entsprechenden Werth nach Massgabe der Gleichung (592) zu substituiren.

Da die Anspruchsnahme der Streckbalken in der besprochenen Hinsicht von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zunimmt, so wird man es zur Erhöbung der Solidität zuweilen angezeigt finden, den Streckbalken gegen ihre Enden zu eine Verstärkung zu geben. Diess kann auf eine zweckmässige Weise durch die Anbringung von Sattelhölzern geschehen, wenn diese mit den Streckbalken fest verschraubt werden.

Vereinigt man die Relationen (577) und (595), so gelangt man zur Kenntniss, wie weit das Verhältniss zwischen der Höhe und Länge der Tragwände mit Vortheil getrieben werden kann. Denn nach der Gleichung (577) ist einerseits die grösste zulässige Spannweite

$$L = \tfrac{1}{8}\sqrt{\frac{r' F h}{2g}},$$

wenn man $f' = f'' = \frac{1}{2}F$, nämlich insbesondere den Fall annimmt, wo die oberen und unteren Streckbalken einen gleichen Querschnitt haben. Nach der Relation (595) aber darf andererseits höchstens

$$L = \frac{2a''F}{g}$$

werden, wenn der Querschnitt der Streckbalken nach der ganzen Länge der Tragwände derselbe ist.

Es ist daher im günstigsten Falle, wenn die Streckbalken in keiner der beiden Beziehungen zu stark oder zu schwach sein sollen,

einerseits . . . . $L^2 = \frac{1}{18} \frac{r' F h}{g}$

und andererseits . . . . $L = 2 \frac{a'' F}{g}$,

daher durch die Division der beiden Gleichungen

$$L = \frac{r' h}{36 a''} \text{ und hieraus } \frac{L}{h} = \frac{r'}{36 a''}.$$

Man beachte nun, dass L in Klaftern, hingegen h in Zollen zu verstehen ist, und dass man aus diesem Grunde, um L und h gleichnamig zu machen, das gefundene Verhältnis mit 72 zu multipliciren, nämlich zu setzen hat:

$$\frac{L \text{ in Klaftern}}{h \text{ in Klaftern}} = \frac{2 r'}{a'} \quad \ldots\ldots \quad (596).$$

Nimmt man, um den Werth dieses Verhältnisses näher anschaulich zu machen, für r' und a'' die beispielsweisen Resultate für Kieferholz im §. 273 und im gegenwärtigen §., nämlich $r' = 10{\cdot}7$ und $a'' = 2{\cdot}38$ Ztr. an, so erhält man für das fragliche Verhältniss $\frac{2 r'}{a''} = 9$, d. h. es hätte die Tragwandhöhe den neunten Theil der Spannweite zu betragen, wenn den Bedingungen des Gleichgewichtes in den beiden obigen Beziehungen zugleich entsprochen werden soll. In diesem Falle dürfte man die Tragwände nicht in der Absicht höher machen, um schwächere Streckbalken anzuwenden, weil dann der Bedingung (795) nicht mehr entsprochen würde, abgesehen davon, dass bei grösseren Tragwandhöhen auch bezüglich der längeren Streben Unzukömmlichkeiten sich ergeben können. Die Tragwände hingegen niedriger und zugleich die Streckbalken stärker zu machen, wäre zwar gestattet, indessen in öconomischer Beziehung nur dann vortheilhaft, wenn das wegen Verminderung der Tragwandhöhe entstehende Mehrerforderniss bei dem Streckbalken durch das mögliche Ersparniss bei der Anordnung der Streben und Hängschrauben mehr als aufgewogen werden würde, was wenigstens bei hölzernen Tragwänden in der Regel nicht der Fall sein wird. Bei diesen wird es gewöhnlich zweckmässig sein, die Tragwandhöhe je nach Umständen mit dem achten, neunten, zehnten oder zwölften Theil der Spannweite zu bemessen.

In Amerika ist man auf rein practische Weise zu demselben Ergebnisse gelangt, wie diess aus den dort ausgeführten Brücken entnommen werden kann.

§. 280.

Bedingung für die Solidität der Verbindung zwischen den Streben und den Streckbalken. Aus den Relationen (590) im §. 276 geht hervor, dass die in einem Brückenquerschnitte vorhandenen Streben eine Pressung Π'' in die Streckbalken zu übertragen haben, welche aus der Gleichung

$$\Pi'' = R\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{h} R$$

zu bestimmen ist. Diese Pressung wird am grössten in der Nähe der beiden Brückenenden, für welche man annäherungsweise $R = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} g\, L$ zu setzen hat, so dass die daselbst entstehende Pressung nach der Gleichung

$$\Pi'' = \frac{1}{2} g\, L\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{2h} g\, L$$

zu beurtheilen ist.

Zufolge dieser Gleichung muss man darauf sehen, dass die Verbindung zwischen den Streben und den Streckbalken die gehörige Solidität besitze. Diese ist im Allgemeinen und namentlich bei längeren Brücken mittelst Nägeln und Schrauben nicht zu erreichen, sondern es muss eine bessere Verbindung angewendet werden. Man wird weiter unten solche Verbindungen kennen lernen, doch kann man sich schon gegenwärtig nicht verhehlen, dass hierin eigentlich die schwache Seite der in diesem Kapitel besprochenen Tragwandconstruction liegt, wesshalb es leicht zu erklären ist, wenn aus Anlass einer ungenügenden Verbindung in der fraglichen Hinsicht das sonst zu erwarten gewesene Tragvermögen der Brücke nicht eintritt. Vorzüglich ist es die Verbindung in der Gegend der Brückenenden, welcher die grösste Aufmerksamkeit zugewendet werden muss.

Wenn diese Verbindung nicht die gehörige Verlässlichkeit darbietet, so ist es offenbar nicht gestattet, die grösste Spannweite nach der Anleitung des §. 273 zu berechnen, sondern es wird sodann umgekehrt aus der Grösse der Pressung Π'', die man mit Rücksicht auf die statthabende Verbindung der Streben mit den Streck-

balken als zulässig erachtet, auf die mögliche Spannweite zu schliessen, und hiernach höchstens

$$L = \frac{2\,\Pi''}{g\,tg\,w} = \frac{2\,h\,\Pi''}{g\,\varepsilon}$$

angenommen werden können.

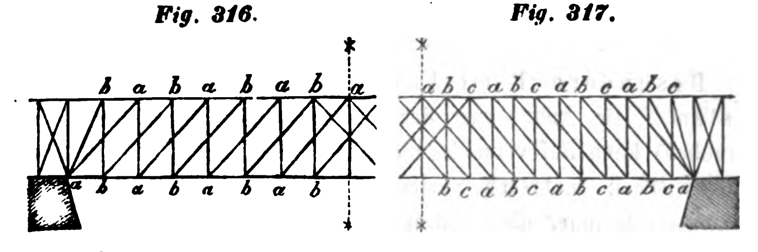
§. 281.

Gegenstreben. In den vorhergehenden Untersuchungen dieses Kapitels hat man in jeder Hälfte einer Tragwand die Streben nur nach einer Richtung laufend angenommen. Werden aber auch Gegenstreben angebracht, so wird durch diese die Solidität der Construction erhöht. Sodann werden die ersteren zum Unterschiede von den Gegenstreben, Hauptstreben genannt.

§. 282.

Verminderte Anspruchsnahme der Streben und Hängschrauben, wenn diese Constructionstheile sich gegenseitig schneiden. Bisher hat man bezüglich der Streben und Hängschrauben immer eine solche Anordnung betrachtet, wo jede Hängschraube vom Fusse einer Strebe zum Kopfe der nächsten läuft, ohne auf diesem Wege mit einer anderen Strebe zusammenzutreffen. Eine solche Tragwand werde der Kürze wegen eine einfache genannt. Es kann jedoch, wie aus den Fig. 316 und 317

Fig. 316. Fig. 317.

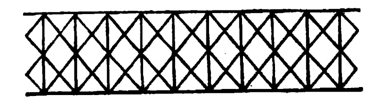


zu entnehmen ist, auch geschehen, dass die Hängschrauben und Streben sich durchschneiden, und dadurch gegenseitig in 2, 3, 4,...n Stücke getheilt werden. Um bei einer Tragwand dieser Art die Anspruchsnahme der Streben und Hängschrauben zu beurtheilen, kann man sich erlauben, dieselbe aus eben so vielen einfachen Tragwänden gebildet anzusehen, als die Anzahl der Stücke beträgt, in welche eine Strebe durch die Hängschrauben, oder umgekehrt eine Häng-

schraube durch die Streben getheilt wird. So kann man z. B. die Tragwand in Fig. 316 sich auch dadurch entstanden denken, dass die 2 einfachen *aaaa..* und *abbb..* zusammengestellt, und fest mit einander verbunden sind, während die in der Fig. 317 dargestellte Tragwand aus den 3 einfachen *aaaa..*, *abbb..* und *accc..* zusammengesetzt zu betrachten wäre. Aus dieser Vorstellung geht unmittelbar hervor, dass die Streben und Hängschrauben in der Tragwand Fig. 316 nur mit der Hälfte, und in der Tragwand Fig. 317 nur mit dem dritten Theile jener Resultirenden in Anspruch genommen werden, welche sich bei einfachen Tragwänden ergeben würde.

Hiernach wird man allgemein bei einer Tragwand, deren Streben und Hängschrauben in Folge ihres gegenseitigen Durchschnittes in n Stücke getheilt werden, den Druck auf eine Strebe und eben so den Zug in einer Hängschraube finden, wenn man zuerst die Berechnung, wie bei einer einfachen Tragwand, durchführt, und sodann die Resultate durch jene Zahl n dividirt.

Fig. 318.

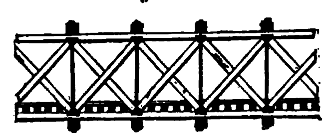


Selbstverständlich gilt dasselbe auch von den Gegenstreben, welche ausser den Hauptstreben zur Vermehrung der Solidität der Construction angebracht werden können (Fig. 318).

§. 283.

Besondere Bemerkungen über das Howe'sche System. Die Anordnung der Streben und Hängsäulen (Hängschrauben) kann auf verschiedene Weise geschehen, in Folge dessen man zwischen mehreren Systemen zu unterscheiden pflegt. Das vollkommenste unter diesen, insoferne die Tragwände vorzüglich aus Holz angefertigt sind, ist das Howe'sche System, welches auch mehrfach in Oesterreich zur Anwendung gekommen ist.

Fig. 319.

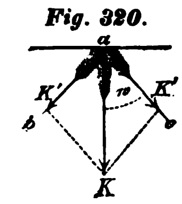


In einer nach dem Howe'schen Systeme construirten Tragwand (Fig. 319) kommen ausser den eigentlichen oder Hauptstreben auch Gegenstreben vor, hölzerne Hängsäulen

werden nicht, sondern nur eiserne Hängschrauben augewendet, und endlich wird die Verbindung zwischen Streben, Hängschrauben und Streckbalken mittelst eigener **Querstücke** hergestellt, an welche sich die Streben stemmen.

Um auf Grundlage der vorausgegangenen allgemeinen Betrachtungen in eine nähere Untersuchung dieses besonderen Systemes einzugehen, berücksichtige man zunächst, dass die Hängschrauben schon ursprünglich bei der Anfertigung der Tragwände verspannt werden müssen, um einerseits das Lockerwerden der Streben zu verhindern, andererseits aber zu ermöglichen, dass in die Streckbalken die nöthige Pressung übertragen werden kann, ohne dass dadurch die erwähnten Querstücke aus ihrer Lage verschoben werden. Sei K diese Kraft, mit welcher die gesammten Hängschrauben in einem Brückenquerschnitte schon ursprünglich zu verspannen sind, so ist die Pressung, welche dadurch sowohl den Hauptstreben $\overline{ab}$ (Fig. 320), als auch den Gegenstreben $\overline{ac}$ mitgetheilt wird, offenbar

Fig. 320.



$$K' = \frac{K}{2 \cos w}.$$

In Folge der eigenen und zufälligen Belastung der Brücke erleiden aber an der Brückenstelle, zu welcher die Resultirende R gehört, der Gleichung (587) gemäss, die Hängschrauben eine weitere Spannung $= R$ und die Hauptstreben nach den Relationen (590) eine weitere Pressung $= \frac{R}{\cos w}$.

Es ist sonach die gesammte **Spannung** in den **Hängschrauben** an einer Brückenstelle

$$\Sigma = R + K \quad \ldots \ldots \quad (597),$$

die gesammte **Pressung** in den **Hauptstreben**

$$\Pi' = \frac{R}{\cos w} + K' = \frac{R + \frac{1}{2}K}{\cos w} \quad \ldots \quad (598)$$

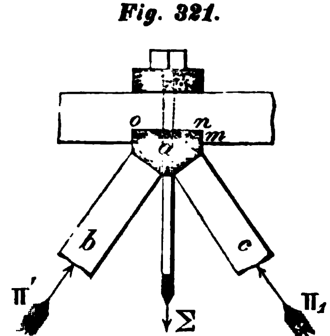
und jene in den Gegenstreben

$$\Pi_1 = \frac{K}{2 \cos w} \quad \ldots \ldots \quad (599).$$

Statt $\cos w$ kann man, wie im §. 276, $\frac{h}{\sigma}$ setzen, wenn h und σ die dortigen Bezeichnungen beibehalten.

Die Gegenstreben haben, wie man aus der Vergleichung der Formeln (598) und (599) erkennt, eine geringere Pressung auszuhalten, als die Hauptstreben. Hieraus folgt, dass man jede Gegenstrebe zwischen zwei Hauptstreben, nicht aber umgekehrt eine Hauptstrebe zwischen zwei Gegenstreben durchlaufen lassen soll, weil auf eine solche Weise die Zahl der Hauptstreben grösser als jene der Gegenstreben, und dadurch die Möglichkeit geboten wird, die ersteren einer grösseren Pressung, als die letzteren auszusetzen, wie diess die obigen Gleichungen bedingen.

Fig. 321.



Die vorerwähnte Kraft K ist nicht ganz beliebig. Man erkennt diess aus der Betrachtung der Fig. 321, in welcher man sämmtliche nach der Brückenbreite vorhandenen Constructionstheile der Tragwände sich vereinigt vorzustellen hat. Indem die Querstücke (a) in die Streckbalken nur wenig eingelassen werden können, um diese nicht zu sehr zu schwächen, kann es geschehen, dass die kleine Stossfläche $\overline{mn}$ in Verbindung mit der Reibung in $\overline{no}$ nicht genügen würde, um diejenige Pressung Π'' (§. 276) ohne Gefahr aufzunehmen, welche von den Hauptstreben b in die horizontalen Streckbalken zu übertragen ist. Sodann muss man durch ein künstliches Verspannen der Hängschrauben in der Berührungsfläche $\overline{no}$ einen hinreichenden Reibungswiderstand zu erzeugen trachten. Die Grösse der hierzu nöthigen Verspannungskraft K kann man auf folgende Weise bestimmen. Es sei die Stossfläche $\overline{mn}$ in sämmtlichen nach der Brückenbreite vorhandenen Streckbalken in $\square''$ . . . . $= f'''$,
der auf den $\square''$ reducirte grösste zulässige Widerstand der Streckbalken in jener Stossfläche . . . . $= r''$ Ztr.
und der Coefficient der Reibung, welche in der Berührungsfläche $\overline{no}$ stattfindet . . . . $= \mu$.

Da der Gleichung (597) zufolge $(R + K)$ den Druck auf die Berührungsfläche $\overline{no}$ anzeigt, so ist der Betrag der Reibung $\mu(R + K)$, und da ferner die Stossfläche $\overline{mn}$ den Widerstand $r'' f'''$ zu leisten

vermag, so muss für den sicheren Bestand der Verbindung an der betrachteten Stelle die Bedingung

$$\mu(R+K) + r''f'' \overline{\overline{>}} \Pi''$$

vorhanden sein, worin die horizontal zu übertragende Pressung Π'' nach der Relation unter (590) $\Pi'' = R\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{h} R$ bezeichnet, wenn ε der Abstand der Hängschrauben von einander ist.

Hieraus folgt unmittelbar

$$K \overline{\overline{>}} \frac{R(tg\, w - \mu) - r''f'''}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (600),$$

und dieser Bedingung gemäss kann Folgendes behauptet werden:

1. Die in einem Brückenquerschnitte vorhandenen Hängschrauben sind insgesammt mit einer gewissen Kraft K schon bei der ursprünglichen Anfertigung der Tragwände zu verspannen, wenn man berechtigt sein soll, die Brückenlänge nach dem §. 273 zu berechnen. Diese Kraft muss wenigstens den Werth $\frac{R(tg\, w - \mu) - r''f''}{\mu}$, erreichen, kann dieses Minimum zwar überschreiten, darf jedoch nicht unter demselben bleiben. Nur in dem Falle, wenn der Minimalwerth von K Null oder negativ würde, entfiele die Nothwendigkeit der in Rede stehenden Schraubenverspannung. Diess würde z. B. für $tg\, w = \mu$, also bei einem solchen Neigungswinkel für die Streben eintreten, welcher gleich dem Reibungswinkel (*arc. tang.* μ) wäre. Da nun der Coefficient der Reibung zwischen den in Betracht stehenden Hölzern gewöhnlich zwischen 0·4 und 0·5 liegen wird, und derselbe mit Rücksicht auf den Umstand, dass auch die Hängschrauben dem horizontalen Verschieben dieser Hölzer widerstehen, wohl bis auf 0·6 gesteigert werden kann, so kommt jener bedingungsweise Stellungswinkel für die Streben zwischen $26\frac{1}{2}$ und 31 Graden zu liegen.

Bei einem solchen Stellungswinkel wird eine besondere künstliche Verspannung der Hängschrauben nicht, oder doch nur insoferne nothwendig, als dem Lockerwerden der Streben vorzubeugen ist; es wird ferner die Reibung in den Berühungsflächen $\overline{no}$ allein schon genügen, um die Streben im Gleichgewichte zu erhalten, und es wird endlich erlaubt sein, die Stossfläche $f''' = 0$ zu setzen, d. i. die Querstücke (*a*) gar nicht in die Streckbalken einzulassen, wodurch zugleich der Vortheil erreicht werden kann, dass die Streck-

balken in dieser Beziehung nicht geschwächt werden dürfen. Die Zweckmässigkeit einer solchen Anordnung leuchtet ein, und es ist die Realisirung derselben stets zu empfehlen, wenn nicht besondere Verhältnisse eine grössere Strebenneigung bedingen. Aber auch in einem solchen Falle soll die Ueberschreitung jenes Neigungswinkels auf das kleinste zulässige Mass beschränkt werden. In der That findet man bei den ausgeführten Brücken in Amerika den Neigungswinkel w für die Streben gewöhnlich so angenommen, dass $tg\,w$ den Werth von 0·6 entweder gar nicht oder nur wenig überschreitet. So z. B. ist bei der im §. 273 angeführten Brücke über den Chikapoe auf der Connecticut'schen Eisenbahn, deren Tragwände nach dem Howe'schen Systeme hergestellt sind, $tg\,w = \frac{11}{18} = 0{\cdot}611$, daher $w = 31\frac{1}{2}^0$. Auch ist bei dieser Brücke wirklich $f''' = 0$, indem die Querstücke in die Streckbalken nicht eingelassen sind.

2. Das Minimum der Kraft K, wenn eine solche sich als nothwendig zeigt, ist mit der Lage des Brückenquerschnittes veränderlich. Sind die Tragwände in Beziehung auf die Strebenneigung und auf die Verbindung der Querstücke mit den Streckbalken durchaus gleichförmig construirt, so nimmt K nur mit der Resultirenden R, also nach den §§. 277 und 278 von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden zu, so dass für diese letzteren jene Minimalkraft selbst am grössten, nämlich

$$K = \frac{\frac{1}{2} g\,L\,(tg\,w - \mu) - r''f'''}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (601)$$

wird.

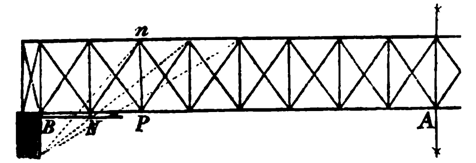
Bei der vorhin angeführten Eisenbahnbrücke würde z. B., wenn man $tg\,w = \frac{11}{18}$, $\mu = 0{\cdot}6$, $f''' = 0$, ferner nach dem §. 273 $g = 160{\cdot}3$ Zt. und $L = 27{\cdot}8$ Klftr. annimmt, die nöthige Kraft zur künstlichen Verspannung der Hängschrauben an jedem Brückenende

$$K \overline{\overline{>}} \frac{1}{108} g\,L = 41{\cdot}2 \text{ Ztr.}$$

sein, sonach auf eine Hängschraube, deren sechs nach der Brückenbreite vorhanden sind, eine Verspannung von wenigstens 6·9 Ztr. entfallen. Obwohl nun bei dieser Brücke in der That die gefundene Gesammtverspannung von 41·2 Ztr. die grösste ist, welche mit Rücksicht auf die verschieden gelegenen Brückenquerschnitte nöthig erscheint, so folgt daraus noch nicht, dass jede einzelne Hängschraube an den Brückenenden im Vergleiche zu den übrigen die

grösste Verspannung nöthig hat. Es hängt dieses offenbar davon ab, ob die Zahl der Hängschrauben in den einzelnen Brückenquerschnitten überall dieselbe ist oder nicht. Bei der vorhin angeführten Brücke tritt z. B. der Fall ein, dass nach der Brückenbreite bloss an den beiden Enden die obige Zahl von sechs Hängschrauben vorhanden ist, während an allen übrigen Stellen nur deren vier vorkommen. Aus diesem Grunde werden einzeln genommen, nicht die den Brückenenden zunächst gelegenen, sondern die darauf folgenden Hängschrauben $\overline{Pn}$ (Fig. 322) die grösste

Fig. 322.



Verspannung benöthigen. Um diese zu finden, beachte man, dass vor Allem für die betreffende Brückenstelle $\overline{Pn}$ die massgebende Resultirende R in Gemässheit der Gleichung (592) zu bestimmen ist, und darin statt g_1, g_2, L und $x = \overline{AN}$ die entsprechenden Werthe zu substituiren sind. Im vorliegenden Falle ist $\overline{AN} = \frac{7}{8}\overline{AB} = \frac{7}{16}L$, ferner nach den Daten des §. 273 $g_1 = 40 \cdot 3$ und $g_2 = 120$, und man erhält

$$R = \left(\frac{224 g_1 + 225 g_2}{512}\right) L = 1956 \text{ Ztr.},$$

mit Hilfe dieses Werthes aber nach der Gleichung (600)

$$K \overline{\overline{>}} 36 \cdot 2 \text{ Ztr.},$$

wenn man statt L, $tg\, w$, μ und f''' aufeinanderfolgend die hieher gehörigen Werthe $27 \cdot 8$, $\frac{11}{18}$, $0 \cdot 6$ und 0 substituirt. Da nun, wie oben erwähnt, an der betrachteten Brückenstelle $\overline{Pn}$ nur 4 Hängschrauben vorhanden sind, so entfällt auf jede derselben eine Verspannungskraft von wenigstens 9·05 Ztr., und diese Hängschrauben sind es, welche einzeln genommen die grösste Verspannung benöthigen.

Es ist übrigens in der Praxis nicht nothwendig, bei der künstlichen Verspannung der Hängschrauben an den verschiedenen Brückenstellen ein bestimmtes Gesetz zu befolgen, sondern es wird schon die Ueberzeugung genügen, dass diese Verspannung an keiner Brückenstelle

in einem geringeren Grade stattfindet, als die Relation (600) bedingt. Indessen darf die Verspannung nicht gar zu weit getrieben werden, um die zulässige Anspruchsnahme der Hängschrauben nicht zu überschreiten.

3. Ist man über die Grösse der Kraft K einig, so unterliegt es keinem Anstande, die Spannung in den Hängschrauben, und eben so die Pressung in den Haupt- und Gegenstreben an jeder Brückenstelle nach den Gleichungen (597), (598) und (599) zu bestimmen. Da in diesen Gleichungen die Resultirende R für die beiden Brückenenden den grössten Werth $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2} q L$ annimmt, so wird auch daselbst die gesammte Spannung in allen Hängschrauben, so wie die gesammte Pressung in allen Streben am grössten sein. Ist die Zahl der Hängschrauben und Streben in den verschiedenen Brückenquerschnitten stets dieselbe, so folgt unmittelbar, dass das Materiale dieser Constructionsbestandtheile zunächst den Brückenenden am meisten beansprucht wird. Allein eben in dieser Erkenntniss findet man sich zuweilen veranlasst, die Zahl der Hängschrauben und Streben an den Brückenenden zu vermehren. Es ist sodann möglich, dass die grösste Anspruchsnahme des Materiales der in Rede stehenden Constructionstheile an einer anderen Brückenstelle eintritt. Die Bestimmung dieser Anspruchsnahme hat sodann die Anhaltspuncte zur Beurtheilung zu bieten, welche Dimensionen den Hängschrauben und welche den Streben gegeben werden sollen. Bei den letzteren muss man vorzüglich auf ihre Länge Rücksicht nehmen, weil mit derselben der Widerstand gegen das Zusammendrücken abnimmt (§. 249). Uebrigens wird man bei der Untersuchung von ausgeführten Brücken auch umgekehrt aus den bekannten Kraftwirkungen und aus den gegebenen Dimensionen der betreffenden Constructionstheile auf die thatsächliche Anspruchsnahme des Materiales schliessen können.

Ex. Bei der oben angeführten Brücke über den Chikapoe ist augenscheinlich die ungünstigste Gegend bezüglich der Anspruchsnahme der Hängschrauben und Streben die in der Fig. 322 mit NPn bezeichnete. Es ist nämlich die Zahl der Hängschrauben und Hauptstreben bei den beiden Brückenenden sechs, in dem Querschnitte Pn und an den übrigen Stellen aber nur vier. Jede Hängschraube hat einen Querschnitt von 2·236, und jede Hauptstrebe (21′ lang und $\frac{7}{8}$zöllig nach englischem Masse) einen Querschnitt von 58·57 □″.

Führt man die Berechnung zuerst für die den Brückenenden zunächst gelegenen Constructionstheile durch, und setzt man zu diesem Behufe nach der Bemerkung ad 2

$$R = \frac{1}{2} Q = 2228{\cdot}2 \text{ Ztr.}, K = 41{\cdot}2 \text{ Ztr. u. } \cos w = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 w}} = 0{\cdot}8533,$$

so findet man

		Ztr.
die Spannung in allen sechs Hängschrauben	=	2269·4
also in einer Hängschraube	=	378·2
und per □" Querschnitt	=	169·1,

ferner

die Pressung in allen sechs Hauptstreben .	=	2635·4
also in einer Hauptstrebe	=	439·2
und per □" Querschnitt	=	7·5.

Geht man jetzt auf die Brückenstelle *NPn* über, und setzt für diese nach der Bemerkung ad 2

$$R = 1956 \text{ Ztr. und } K = 36{\cdot}2 \text{ Ztr.},$$

so findet man

		Ztr.
die Spannung in allen vier Hängschrauben	=	1992·2
also in einer Hängschraube	=	498·0
und per □" Querschnitt	=	222·8,

ferner

die Pressung in allen vier Hauptstreben . .	=	2313·5
also in einer Hauptstrebe	=	578·4
und per □" Querschnitt	=	9·9,

folglich grösser, als zunächst den Brückenenden. Näher gegen die Mitte der Brücke wird die Anspruchsnahme wieder kleiner.

Bei den zu Grunde gelegten Verhältnissen würde sonach an der Brückenstelle *NPn* das Eisen der Hängschrauben einer Spannung von 222·8 Ztr., das Holzmateriale der Hauptstreben aber einer Pressung von 9·9 Ztr. ausgesetzt sein. Diese Anspruchsnahmen sind nicht unbedeutend, sie werden indessen nicht so hoch anzuschlagen sein, weil bei dieser Brücke ausser den Haupt- und Gegenstreben noch andere Unterstützungsstreben (siehe die punctirten Linien in der Fig. 322) vorkommen, welche die Solidität des ganzen Bauobjectes erhöhen.

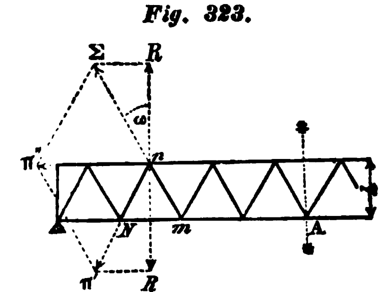
Fünftes Kapitel.

Tragwandbrücken nach dem Neville'schen Systeme.

§. 284.

Construction der Tragwände nach diesem Systeme. Neville construirt die Tragwände aus Eisen, gibt den Streben $\overline{Nn}$ (Fig 323) und den Zugstangen $\overline{mn}$ eine gleiche Länge, so dass diese schmiedeeisernen Stäbe die Seiten von gleichschenkligen Dreiecken (Nmn) sind, und wendet der Verbindung dieser Dreiecksstangen mit den Längenschienen eine besondere Aufmerksamkeit in der Absicht zu, um die Uebertragung der an den Verbindungsstellen auf die horizontalen Längenschienen ausgeübten Pressungen einfach und sicher zu ermöglichen. Das Nähere dieser Verbindungsart wird man im §. 286 kennen lernen.

Fig. 323.



§. 285.

Spannung in den Zugstangen. Pressung auf die Streben. Eben so, wie im §. 276 erwähnt wurde, ist es auch gegenwärtig die Resultirende der einwirkenden Kräfte (R) in Beziehung auf eine Brückenstelle, welche als das Mass für diejenige Kraft zu gelten hat, womit der Abstand der oberen und unteren Streckschienen verändert werden will. Diese Distanzveränderung haben die obbezeichneten Dreiecksstäbe (Streben und Zugstangen) zu verhindern.

Setzt man in dem gleichschenkligen Dreiecke $\Delta\, Nmn$

die Grundlinie $\overline{Nm}$ . . . . $= \varepsilon$,
die Höhe . . . . $= h$,
und jede der beiden Seiten $\overline{Nn}$ und $\overline{mn}$ . . . . . $= \sigma$,
ferner den Winkel, welchen diese mit der verticalen Höhe bilden . . . . $= \omega$,

so hat man zunächst

$$\left.\begin{array}{ll|l} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + h^2 = \sigma^2 & & \sin w = \frac{\varepsilon}{2\sigma} \\ tg\, w = \frac{\varepsilon}{2h} & & \text{und } \cos w = \frac{h}{\sigma} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (602).$$

Nennt man jetzt mit Bezug auf das fragliche ΔNmn die Spannung in allen nach der Brückenbreite vorhandenen Zugstangen (mn) Σ, und die Pressung auf alle Streben daselbst . . . . Π', so ist offenbar

$$\Sigma = \Pi' = \frac{R}{\cos w} = \frac{\sigma}{h} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (603),$$

indem jede der beiden verticalen Componenten von den Kräften Σ und Π' der Resultirenden R gleich sein muss, während sich die beiden horizontalen Componenten zu derjenigen Pressung Π'' summiren, welche in die horizontalen Streckschienen zu übertragen ist. Man hat daher ausser der obigen Relation noch folgende

$$\Pi'' = (\Sigma \sin w + \Pi' \sin w) = 2 R\, tg\, w = \frac{\varepsilon}{h} R \quad . \quad (604).$$

Diese findet man übrigens auch aus dem Kräftenparallelogramme, welches in der Fig. 823 mit punctirten Linien angedeutet ist. Indem man nämlich die Kräfte Σ und Π' ihren Richtungen gemäss zeichnet, und sofort auf die resultirende Kraft Π'' schliesst, erhält man die Proportion:

$$\begin{aligned} \Sigma : \Pi' : \Pi'' &= \sin(90 - w) : \sin(90 - w) : \sin 2w, \\ &= \cos w : \cos w : 2 \sin w \cos w \\ &= 1 : 1 : 2 \sin w, \end{aligned}$$

und hieraus wieder, wie unter (604),

$$\Pi'' = 2 \Sigma \sin w = 2 \Pi' \sin w = 2 R\, tg\, w.$$

Auch ist

$$\Sigma : \Pi' : \Pi'' = \overline{mn} : \overline{Nn} : \overline{Nm} = \sigma : \sigma : \varepsilon,$$

wornach die in Rede stehenden Kräfte sich so, wie die correspondirenden Dreiecksseiten verhalten.

Aus diesen Bemerkungen folgt, dass die Streben und Zugstangen an einer Brückenstelle gleiche jedoch entgegengesetzte Anspruchsnahmen erleiden, und dass diese mit der Resultirenden der einwirkenden Kräfte (R), so wie mit der Streben-

neigung zunehmen. Da nun in denjenigen Fällen, welche in der Praxis hinsichtlich der Wirkung der zufälligen Belastung auf die Constructionsstücke zwischen den Streckschienen als die ungünstigsten anzusehen sind, nach den §§. 277 und 278 die Resultirende R von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden wächst, so werden die Dreiecksstangen einer desto grösseren Anspruchsnahme ausgesetzt sein, je näher sie sich an einem der beiden Widerlager befinden. Aus diesem Grunde ist es angezeigt, den Dreiecksstangen von der Mitte der Brücke gegen ihre Enden hin eine zunehmende Stärke zu geben, und überdiess dafür zu sorgen, dass das Ausbiegen derjenigen Stangen verhindert werde, welche als Streben zu dienen haben.

Für die Brückenenden selbst kann man annäherungsweise

$$R = \tfrac{1}{2} Q = \tfrac{1}{2} g L,$$

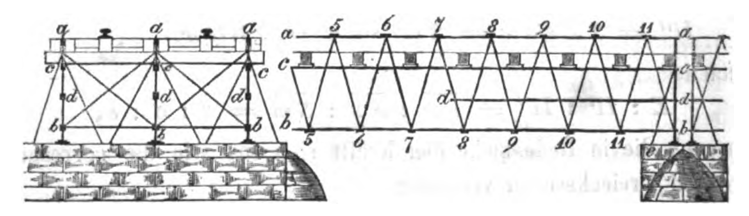
daher

$$\Sigma = \Pi' = \frac{Q}{2 \cos w} = \frac{g L}{2 \cos w} = \frac{Q \sigma}{2 h} = \frac{g L \sigma}{2 h}$$

setzen, und desshalb für die dortigen Zugstangen und Streben eine solche Stärke verlangen, dass sie die so berechnete Spannung und beziehungsweise Pressung aushalten können.

Ex. Auf der Kaiser Ferdinands-Nordbahn bei Prerau in Mähren besteht über den Betschfluss eine Ueberbrückung nach dem Neville'schen Systeme aus fünf gleichen $10\frac{1}{2}^0$ weiten Feldern, von welchen jedes für sich als eine besondere Brücke betrachtet werden kann, da die Tragwände der einzelnen Felder nicht zusammenhängen (Fig 324). Bei den Tragwänden dieser Brücke sind

Fig. 324.



ausser den oberen und unteren Längenschienen ($a a$ und $b b$) noch die horizontalen Schienen $c c$ und $d d$ angebracht, wovon jene unter $c c$ zum Auflager für die Querschwellen der Brückenbahn dienen, die anderen aber den Zweck haben, die Steifigkeit der Streben zu

vermehren. Sämmtliche Längenschienen bestehen eben so, wie die Dreiecksstangen aus Schmiedeeisen. Da die Anspruchsnahme dieser Stangen, wie man gesehen hat, von der Mitte der Tragwände gegen ihre Enden hin zunimmt, so leuchtet die Ursache ein, warum die Schienen *dd* nur in der Nähe dieser Enden angebracht worden sind, ohne sie nach der ganzen Länge durchlaufen zu lassen. Ausserdem aber sind die Streben und Zugstangen in der Strecke *dd* allmälig gegen das Widerlager hin verstärkt, wie man diess zuvor empfehlenswerth gefunden hat. Es ist nämlich die Stangenbreite in der Längenansicht einer Tragwand von der Mitte derselben bis zu

den Stangen . . . . 8, 8 . . . . 18'''
hingegen bei den Stangen 8, 9 und 9, 9 19,
ferner „ „ „ 9, 10 20,
„ „ „ „ 10, 10 „ 10, 11 21,
„ „ „ „ 11, 11 22,
endlich „ „ „ 11, *b* „ *ab* 24,

während die Dicke derselben nach der Richtung der Brückenbreite durchgehends 15''' beträgt. Bei dieser Bezeichnung hat man sich vorzustellen, dass die von der Mitte ausgehenden Zugstangen mit 1, 1 numerirt, und dass in der halben Spannweite 11 aufrechtstehende gleichschenklige Dreiecke vorhanden sind. Somit hat an dem Tragwandende die Strebe 11, *b* einen Querschnitt von $2\frac{1}{2}\square''$, die Zugstange 11, 11 aber einen solchen von $2\frac{7}{24}\square''$. Zur Beurtheilung des Widerstandes dieser Stangen setze man den thatsächlichen Verhältnissen gemäss

die Spannweite L . . . . $= 10\frac{1}{2}$ Klftr.,

$\frac{1}{\cos w} = \sqrt{1 + tg^2 w}$ (wegen $tg\, w = \frac{1}{3}$) . . . . $= 1{\cdot}054$,

das eigene Gewicht der Brücke per Currentklafter g_1 = 57 Ztr. *)
und für das einfach vorhandene Eisenbahngeleise
mit Rücksicht auf die Bemerkungen im §. 263 die
grösste zufällige Belastung per Klafter Brückenlänge g_2 = 140 Ztr.,
so dass das totale Einheitsgewicht mit $g = (g_1 + g_2)$ = 197 Ztr.
sich berechnet.

*) Das Gewicht der Eisenconstruction wird mit 21 Ztr. per Klafter Brückenlänge angegeben, und die Eisenbahnoberbaulast kann mit 36 Ztr. angenommen werden.

Hiernach wird für jedes Tragwandende

$$\Pi' = \Sigma = \frac{gL}{2\cos w} = 1090 \text{ Ztr.},$$

und es entfällt, weil nach der Brückenbreite drei Tragwände vorhanden sind, auf die Strebe 11, *b* eine Pressung von 363·3, somit auf den □″ ihres Querschnittes eine solche von 145·3 Ztr.; ferner auf die Zugstange 11, 11 eine Spannung von 363·3, also auf den □″ ihres Querschnittes eine solche von 158·5 Ztr. Was diese Spannung betrifft, so muss dieselbe unter den vorhandenen Umständen als bedeutend bezeichnet werden. Die grossen Erschütterungen, welche bei dieser verhältnissmässig leichten Brücke durch die Befahrung mit Eisenbahntrains stattfinden, und die lange Dauer, welche von einer Eisenconstruction verlangt wird, lassen jene Anspruchsnahme der Zugstangen nur dann als unbedenklich erscheinen, wenn das verwendete Schmiedeeisen von einer vorzüglichen Qualität ist. Betreffend die Pressung auf die Strebe 11, *b*, so hat man Behufs ihrer Beurtheiluug in Gemässheit des §. 249 nebst den Querschnittsdimensionen noch jene freie Länge zu berücksichtigen, wie solche in der Fig. 282 verstanden ist. In dieser Absicht bemerke man, dass im vorliegenden Falle die Strebe durch die horizontalen Längenschienen *aa*, *bb*, *cc dd* in drei gleiche 15″ lange Stücke getheilt wird, welche an den Kreuzungsstellen mit jenen Längenschienen gezwungen werden, ihre Richtung beizubehalten, so dass jedes Strebenstück die in der Fig 286 dargestellte Schlangenform anzunehmen strebt. Die freie Strebenlänge, wie sie im §. 249 verstanden ist, beträgt daher $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}''$, und sie enthält die Querschnittsdimensionen der Strebe, nämlich ihre Breite von 2″ und ihre Dicke von $1\frac{1}{4}''$ beziehungsweise $3\frac{3}{4}$ und 6mal. Insoferne daher ein Ausbiegen der Strebe, namentlich in der Richtung der Brückenbreite zu besorgen ist, hat man zur Beurtheilung der nöthigen Stärke 6 als die Verhältnisszahl anzunehmen, welche im §. 249 mit *n* bezeichnet wurde. Mit Bezug auf diesen §. folgt nunmehr, dass die grösste Pressung per □″ Querschnitt, welche die betrachtete Strebe erleiden kann, um beiläufig 14% geringer ist, als jene, welche bei einem sehr kurzen Strebenstücke, wo nämlich die erwähnte Verhältnisszahl *n* nur zwischen 1 und 2 liegen würde, gestattet wäre, und welche in der Regel der grössten zulässigen Spannung gleichgehalten werden darf. Hat

man daher gegen die oben gefundene Spannung von 158·5 Ztr. kein Bedenken, und nimmt man für $n = 1$ bis 2 die grösste zulässige Pressung eben so gross an, so findet man, dass die Strebe 11, b mit einer Pressung von 158·5 (1—0·14) = 136·3 Ztr. per □″ Querschnitt in Anspruch zu nehmen erlaubt ist. Die wirkliche Pressung wurde mit 145·3 Ztr., also nicht viel grösser gefunden, so dass die Stärke der Strebe 11, b und jene der Zugstange 11, 11 so ziemlich gleiche Sicherheit gewähren.

Die Beurtheilung des Widerstandes der Streben an den Tragwandenden wird immer auf diese Weise stattfinden können, weil das gewünschte Festhalten der Streben an den Kreuzungstellen mit den Längenschienen jedenfalls in einem genügenden Grade als erreichbar anzunehmen ist, wenn man ausser der Steifigkeit der gespannten Längenschienen bb und dd auch jene der Brückenbahn, und zugleich den Umstand berücksichtigt, dass die Anspruchsnahme der Streben an den Tragwandenden durch den Widerstand der dortigen Verticalstücke ab zum Theile vermindert wird.

Auf ähnliche Weise kann die Anspruchsnahme der Dreiecksstangen an einer anderen Brückenstelle beurtheilt werden, nur hat man dann in der Gleichung (603) den entsprechenden Werth für R nach Massgabe der Relation (592) zu substituiren. Aus diesem §. geht übrigens deutlich hervor, dass mit der Zunahme der Brückenspannweite es immer schwieriger wird, die Streben in der Nähe der Widerlager genügend stark zu machen, und die Construction der Stangendreiecke in der *wünschenswerthen Einfachheit* durchzuführen.

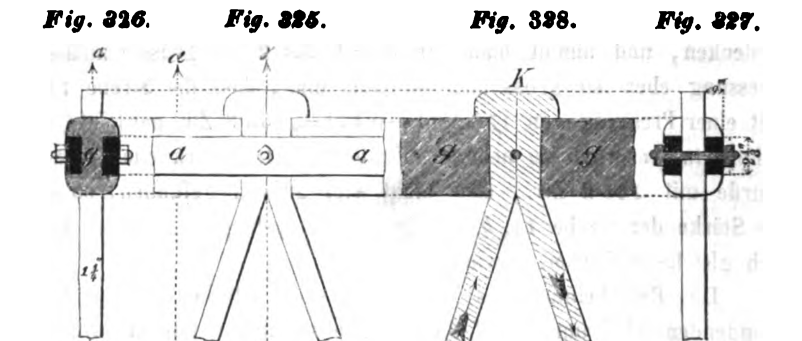
§. 286.

Verbindung der Dreiecksstangen mit den horizontalen Längenschienen. Diese Verbindung ist in den nachstehenden Figuren anschaulich gemacht. Es ist nämlich rücksichtlich einer beliebigen Verbindungstelle n (Fig. 323)

in der Fig. 325 die Längenansicht,
in der Fig. 326 der Querschnitt nach $\alpha\beta$,
in der Fig. 327 der Querschnitt nach $\gamma\delta$, und
in der Eig. 328 der Längenquerschnitt nach $\alpha'\beta'$

dargestellt, wie sich diese Zeichnungen bei der früher als Beispiel gewählten Prerauer - Eisenbahnbrücke ergeben. Die horizontalen

Fig. 326. *Fig. 325.* *Fig. 328.* *Fig. 327.*

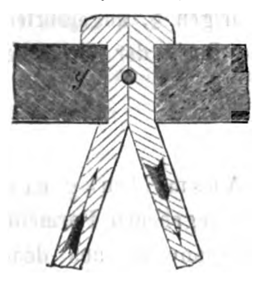


durch Schrauben verbundenen Längenschienen in den beiden Querschnitten sind schwarz angelegt. Gusseisenstücke g, g mit **I** förmigen Querschnitten füllen den Raum zwischen den schmiedeeisernen Längenschienen a, a derart aus, dass diese letzteren nur an ihren verticalen Aussenflächen frei bleiben, und die Köpfe K der Dreiecksstangen ruhen unmittelbar auf den erwähnten Gusseisenstücken auf. Bei den unteren Längenschienen b, b ist die Verbindung in ähnlicher Weise, nur in anderen Dimensionen hergestellt.

Die in Rede stehende Verbindung ist in vielen Beziehungen vortheilhaft. Indem nämlich die Dreiecksstangen den Längenschienen zufolge der Gleichung (604) die Pressung Π'' mitzutheilen haben, geschieht diess hier keineswegs directe, sondern mit Hilfe der gusseisernen Zwischenstücke, ohne dass es nöthig wäre, das Vertrauen in die Sicherheit der Construction auf Schrauben, Nieten u. s. w. setzen zu müssen. Die in den obigen Figuren ersichtliche Schraube wird augenscheinlich von jener Pressung desto weniger zu besorgen haben, je genauer die Gusseisenstücke g, g an die Dreiecksstäbe stossen, und je weniger die Längenveränderungen der schmiedeeisernen Schienen von jenen der Gusseisenstücke abweichen. Auszustellen jedoch ist bei der fraglichen Verbindung die gleiche Behandlung der Zugstangen und Streben, von welchen die letzteren in jener Art, wie sie bei der obigen Eisenbahnbrücke angebracht erscheinen, ihren Zweck als solche nicht vollkommen erfüllen können, weil die Gusseisenstücke kein eigentliches Auflager haben; und deshalb die Streben die ihnen zukommende Pressung nicht immer mit der nöthigen Sicherheit aufzunehmen im Stande sein werden. Diesem

Uebelstande kann übrigens leicht abgeholfen werden, wenn man den Gusseisenstücken ein entsprechendes Auflager auf die Streben, wie z. B. in der Fig. 329 gibt. Die Anwendung einer solchen Vorsicht ist vorzüglich an den Enden von längeren Brücken zu empfehlen.

Fig. 329.



Diese Bemerkungen stehen mit der Erfahrung in vollkommener Ueberzeugung, denn es hat sich bei der Belastung einer aus Neville'schen Tragwänden probeweise zusammengestellten Brücke in der That gezeigt, dass mehrere Strebenköpfe an den Tragwandenden oben hinausgedrückt worden sind. Nach der vorigen Bemerkung ist es vortheilhaft, die Construction der Tragwände so anzuordnen, dass die Längenveränderungen in den gusseisernen Ausfüllungsstücken in gleichem Masse, wie in den beiderseitigen schmiedeeisernen Längenschienen erfolgen. Diese Absicht wird erreicht, wenn die Dreiecksstangen keinen grösseren Neigungswinkel mit der verticalen Richtung einschliessen, als der Reibungswinkel ist, welcher der zwischen dem Schmiede- und Gusseisen erzeugten Reibung entspricht. Dann ist nämlich der Reibungswiderstand so gross, dass die Spannungen und Pressungen in den schiefen Dreiecksstangen ein Gleiten der gusseisernen Stücke auf den schmiedeeisernen Längenschienen nicht hervorbringen können. In diesem Falle muss, wenn der bezügliche Reibungscoefficient μ heisst, zunächst $tg\, w \overline{\overline{<}} \mu$, und — weil in dem Dreiecke Nmn (Fig. 323) $Nm = 2\, h\, tg\, w$ ist — auch $Nm \overline{\overline{<}} 2\, \mu\, h$ sein. Für den Reibungscoefficienten μ kann man höchstens 0·25 bis 0·3 annehmen, und diese Annahme gibt die Relation $Nm \overline{\overline{<}} 0{\cdot}5\, h$ bis $0{\cdot}6\, h$.

Die Basis der gleichschenklichen Stangendreiecke darf daher nur 50 bis 60% ihrer Höhe betragen, wenn die alleinige Reibung zwischen den schmiedeeisernen Längenschienen und den gusseisernen Zwischenstücken das Gleiten dieser Stücke übereinander zu verhindern im Stande sein soll. Da übrigens durch das Verspannen der Schrauben die Reibung vermehrt, und ausserdem durch eine solide Verbindung der Eisenstücke an den Tragwandenden noch ein weiterer Widerstand gegen das erwähnte Gleiten hervorgerufen werden

kann, so wird auch eine gegen das vorige Resultat etwas grössere Strebenneigung immerhin ohne Nachtheil angeordnet werden dürfen.

Das practische Verfahren Neville's steht mit diesen Bemerkungen in Uebereinstimmung. Bei der im vorigen §. angeführten Eisenbahnbrücke ist z. B. $tg\,w = \frac{1}{3}$, also die Basis der Dreiecke zwei Dritttheile oder $66\frac{2}{3}\,\%$ ihrer Höhe.

§. 287.

Besondere Bemerkung über die Ausmittlung der Spannweite. Die in den §§. 273 und 274 gegebenen Formeln und Regeln für die Berechnung der Brückenspannweite aus dem Brückenquerschnitte, und umgekehrt, ferner für die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den oberen und unteren Längenschienen, sind auch bei den im gegenwärtigen Kapitel behandelten Brücken nach Neville's System anzuwenden. Nur erübrigt zu untersuchen, wie der vereinte Widerstand der schmiedeeisernen Längenschienen mit den gusseisernen Ausfüllungsstücken in Rechnung genommen werden kann. Bei dem Querschnitte f'' der Längenschienen hat man nämlich auch die gusseisernen Ausfüllungsstücke zu berücksichtigen, indem sie den Widerstand jener schmiedeeisernen Längenschienen $a\,a$ unterstützen. Auf die Art und Weise dieser Berücksichtigung wird man durch folgende Betrachtung geleitet. Der gefährliche Querschnitt in jeder Tragwand liegt in der halben Brückenlänge, wenn man über derselben die grösste zufällige Belastung gleichmässig vertheilt annimmt. Daselbst wird das Gusseisen zwischen den Längenschienen $a\,a$ gezwungen, mit diesen in gleichem Masse nachzugeben, wesshalb die Längenveränderung

$$v = \frac{\text{der Pressung per } \square \text{ Querschnitt}}{\text{den Modul der Längenveränderung}} \quad *)$$

in beiden Eisenstücken gleich ist. Nennt man die Pressung per □'' Querschnitt in den schmiedeeisernen Längenschienen $a\,a$ . . p_s,
und in dem gusseisernen Zwischenstücke . . . . p_g,
ferner den Modul der Längenveränderung bei dem Schmiedeeisen m_s,
bei dem Gusseisen aber . . . . m_g,

*) Siehe die Gleichung (4).

so ist der vorigen Bemerkung gemäss

$$\frac{p_s}{m_s} = \frac{p_g}{m_g}, \text{ also } p_s : p_g = m_s : m_g$$

zu setzen.

Hieraus folgt, dass bei dem gezwungenen gleichmässigen Nachgeben des Schmiede- und Gusseisens das letztere den Widerstand $p_g = p_s \cdot \frac{m_g}{m_s}$ entwickelt, wenn in dem ersteren der Widerstand p_s hervorgerufen wird. Indem nun ungefähr $\frac{m_g}{m_s} = \frac{1}{2}$ ist, so sieht man, dass in dem gusseisernen Zwischenstücke nur circa der halbe Widerstand von demjenigen hervorgerufen wird, welcher vorhanden wäre, wenn jenes Zwischenstück gleichfalls aus Schmiedeeisen bestehen würde. Das Gusseisenstück könnte zwar für sich allein einen grösseren Widerstand leisten, jedoch ist die Hervorrufung desselben in dem vorliegenden Falle nicht zulässig, weil sonst die Zusammendrückung eine solche Grösse annähme, dass in dem gleichmässig nachgebenden Schmiedeeisen die Sicherheitsgränze überschritten würde, was selbstverständlich nicht stattfinden darf.

Gestützt auf diese Betrachtung, folgt, dass der Werth für f'' aus dem Querschnitte der schmiedeeisernen Längenschienen und aus $\frac{m_g}{m_s}$ *) Theilen des Querschnittes der gusseisernen Zwischenstücke zu bilden, und sodann die Rechnung so durchzuführen ist, wie wenn durchaus Schmiedeeisen vorhanden wäre.

Eine ähnliche Berücksichtigung bei der Ausmittlung des Querschnittes f' der unteren Längenschienen bb hat nicht stattzufinden, weil die einzelnen Gusseisenstücke keinen unmittelbaren Zusammenhang besitzen, und desshalb die einem Zuge ausgesetzten schmiedeeisernen Schienen in ihrem Widerstande nicht unterstützen können.

Um das in diesem §. Gesagte näher anschaulich zu machen, führe man die diessfällige Untersuchung für die in den vorigen §§. erwähnte

*) Dieser Bruch hat, wie schon früher bemerkt, den Durchschnittswerth $\frac{1}{2}$.

Brücke (Fig. 324) durch. Zu diesem Behufe hat man Folgendes zu beachten:

1. Jede Längenschiene *aa* [siehe die Fig. 325 und 326] ist $\frac{3}{4}''$ breit und $2\frac{1}{3}''$ hoch, hat also einen Querschnitt von $1\frac{3}{4}\square''$, wesshalb alle sechs Längenschienen in den drei Tragwänden zusammen $10{\cdot}5\square''$ enthalten. Ein gusseisernes Ausfüllungsstück zwischen jenen Längenschienen enthält ungefähr $6\square''$, daher ist der Querschnitt dieser Stücke in den drei Tragwänden $18\square''$. Lässt man nun den oben erwähnten Werth $\frac{m_g}{m_s} = \frac{1}{2}$ gelten, so hat man

$$f'' = 10{\cdot}5 + \frac{18}{2} = 19{\cdot}5\square''.$$

2. Jede der unteren Längenschienen *bb* hat 1″ Breite und 4″ Höhe, welche letztere aber wegen der in der Mitte der Tragwände vorhandenen Schraubenöffnung bis auf $3\frac{1}{2}''$ herabzumindern ist, so dass für alle sechs Längenschienen in den drei Tragwänden der Querschnitt nur mit $f' = 6 \times 1 \times 3\frac{1}{2} = 21\square''$ eingeführt werden kann.

3. Wegen $f'' < f'$ gibt in der Formel (597) die zweite Alternative den kleineren Werth, zumal für Schmiedeeisen auch $r' < a'$ sein wird. Für den im §. 285 angenommenen Werth $g = 197$ Ztr. und für die vorhandene mittlere Tragwandhöhe $h = 54{\cdot}6''$ findet man sofort

$$L = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{r' f'' h}{g}} = 0{\cdot}87\sqrt{r'}.$$

Man kann jetzt die grösste zulässige Pressung r' des Schmiedeeisens den Umständen anpassend wählen, und die entsprechende Spannweite L berechnen, oder aber umgekehrt aus der bekannten Spannweite auf die entstehende Pressung r' schliessen. In dem behandelten Falle ist z. B. $L = 10{\cdot}5^{0}$, man schliesst daher, dass die fragliche Pressung per $\square''$ $r' = \left(\frac{10{\cdot}5}{0{\cdot}87}\right)^2 = 146$ Ztr. betragen werde, wenn die vorausgesetzte zufällige Belastung von 140 Ztr. per Klftr. Brückenlänge eintritt. Diese Pressung ist beinahe dieselbe, wie man solche bei den Streben gefunden hat.

Um endlich auch die entstehende grösste Biegung zu bestimmen, benütze man die Formel (578)

$$\Delta = 4860 \frac{g L^4 F}{m' f' f'' h^2}.$$

Setzt man darin $g = 197$, $L = 10{\cdot}5$, $f' = 21$, $f'' = 19{\cdot}5$, $F = (f' + f'') = 40{\cdot}5$ und $h = 54{\cdot}6$, und nimmt ferner den Modul der Längenveränderung für Schmiedeeisen m' mit 210000, nämlich wegen der zusammengesetzten Construction und wegen der Schraubenöffnungen in den Längenschienen geringer, als für ununterbrochenes Schmiedeeisen an, so erhält man

$$\Delta = 1{\cdot}9 \text{ Zoll.}$$

Diese Biegung zerfällt in die zwei Theile, $\frac{g_1}{g}\Delta = 0{\cdot}55''$ und $\frac{g_2}{g}\Delta = 1{\cdot}35''$, wovon der erste Theil durch das eigene Brückengewicht, der zweite Theil aber durch die zu Grunde gelegte zufällige Belastung veranlasst wird. Hiermit stimmen die Resultate der Versuche, welche an dieser Brücke angestellt worden sind, überein.

Bei den Berechnungen in diesem §. hat man keine Rücksicht auf die vorhandenen schmiedeeisernen Längenschienen *cc* (Fig. 824) genommen. Obwohl dieselben nur zum Auflager für die Brückenbahn bestimmt sind, so tragen sie doch auch zur Stärke und Steifigkeit des Ganzen bei.

§. 288.

Ueber die practische Anwendbarkeit des Neville'schen Systemes. Die bisherige Anwendung des Neville'schen Systemes für fahrbare Brücken erstreckt sich auf Spannweiten unter 25 Klaftern. Mit Rücksicht auf die Untersuchungen in diesem Kapitel kann man zugestehen, dass für Spannweiten bis zu dieser Grösse die Anordnung von Tragwänden nach dem erwähnten Systeme mit Vortheil stattfinden kann, weil die nöthigen Vorsichten und Hilfsmittel zur Sicherung der Verbindung der einzelnen Constructionstheile und zur Erhaltung der Steifigkeit des Ganzen die charakteristische Eigenschaft dieses Systemes, nämlich die Einfachheit, noch nicht wesentlich beeinträchtigen werden. Hingegen würde bei grösseren Spannweiten das Einfache und mit ihr das Empfehlenswerthe der Construction immer mehr verloren gehen, obwohl desshalb die Unmöglichkeit ihrer Anwendung noch nicht behauptet werden könnte.

Zusatz zum 3. und 4. Kapitel.

Noch kommen diejenigen gegitterten Tragwände in Betracht, wo die Streben und Zugstangen eben so, wie bei dem Neville'schen Systeme gleichschenklige Dreiecke (*abc*) bilden, die sich aber gegenseitig durchschneiden, so dass die Streben durch die Zugstangen, und umgekehrt, in gewisse, z. B. n gleiche Stücke getheilt werden, und wo ausserdem die Verbindung der einzelnen Theile untereinander, sowohl an den Dreiecksenden *a*, *b*, *c*, als auch an den Kreuzungsstellen, mittelst Nägeln, Nieten u. s. w. zu geschehen pflegt.

Fig. 330.

bbb

aaa *ccc*

Bei der Beurtheilung von Brücken mit solchen Tragwänden hat man in Uebereinstimmung mit den Untersuchungen der beiden vorgehenden Kapitel zu Werke zu gehen.

Was zuerst die Bedingungen betrifft, welche hinsichtlich der Anordnung der oberen und Streckbalken im Vergleiche zu der Brückenspannweite und der zu tragenden Gesammtlast erfüllt werden müssen, so sind dieselben jenen gleich, auf welche in den §§. 273 und 274 hingewiesen worden ist. Nur sind bei der Bestimmung der dort mit f' und f'' bezeichneten Querschnitte der Streckbalken die allfälligen Durchlochungen in Abschlag zu bringen. Betreffend die weiteren Bedingungen rücksichtlich der Anordnung der Streben und Zugstangen, so hat man offenbar zu ihrer Auffindung die Bemerkungen der §§. 282 und 285 zu combiniren, wornach als Anspruchsnahme dieser Stücke nur der n^te Theil der nach der Formel (603) berechneten Resultate zu gelten hat. Endlich ist noch der Bedingungen zu gedenken, welche in Absicht auf die Verbindung der einzelnen Theile unter einander und mit den oberen und unteren Längenbalken zu erfüllen sind, und die sich ebenfalls aus der Combinirung der vorerwähnten §§. ergeben. Man hat nämlich die auf die Streckbalken horizontal wirkende Pressung, welche von den Streben und Zugstangen dahin übertragen wird, nach der Formel (604) zu berechnen, davon aber wieder nur den n^ten Theil zu nehmen, so dass auch in dieser Hinsicht das mehrfache Kreuzen der Streben und Zugstangen einen gewissen Vortheil gewährt.

Um somit nicht in eine einseitige Anschauung des Gegenstandes zu gerathen, muss man alle angeführten Bedingungen unverrückt im Auge behalten, und dieselben gleichzeitig zu erfüllen anstreben. Mit Unrecht würde man daher auf die Stärke der Streckbalken das grösste Gewicht legen, da doch die Anordnung der Streben und Zugstangen, insbesondere aber deren Verbindung mit den Streckbalken in vielen Fällen weit wichtiger ist. Augenscheinlich ist es keine leichte Aufgabe, so bedeutende Kraftwirkungen, wie sie vorzüglich bei grösseren Brücken auftreten, mittelst Nägeln, Nieten u. s. w. mit Sicherheit und Ausdauer zu begegnen, und in dieser Schwierigkeit liegt unzweifelhaft die Ursache, dass bei Gitterbrücken dieser Art in der Regel der Erfolg hinter den Erwartungen zurückbleibt.

Sechstes Kapitel.

Eiserne Röhrenbrücken.

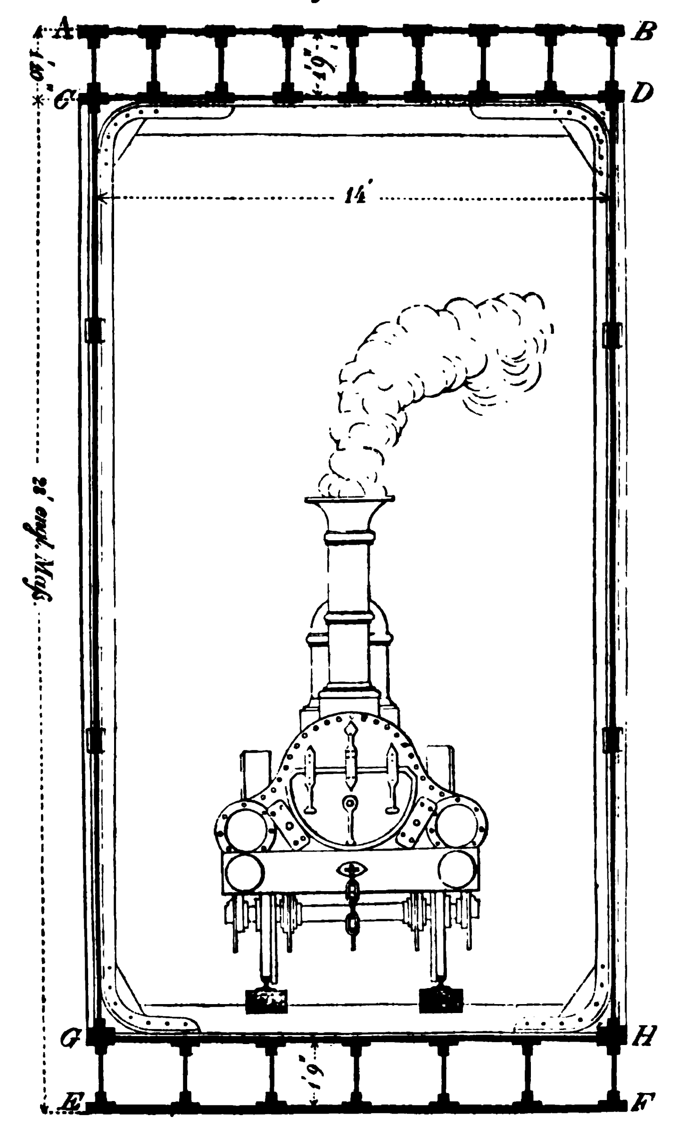
§. 289.

Vorerinnerung. In England wurden von Fairbairn zwei Brücken ausgeführt, welche aus grossen eisernen vierkantigen Röhren bestehen, durch welche die Eisenbahnzüge führen. Diese Brücken sind unter den Namen Röhrenbrücken bekannt. Die eine dieser Röhrenbrücke bei Conway hat nur eine Oeffnung von 400 englische Fuss. Die andere Brücke über die Menai-Straits auf der Chester-Holyhead Eisenbahn (auch Britanniabrücke genannt) hat vier Oeffnungen, von welchen jede der beiden mittleren 460, jede der beiden äusseren aber 230 engl. Fuss lang ist. Uebrigens sind bei diesen Brücken immer zwei Röhren neben einander gelagert, deren jede eine der Eisenbahnspuren trägt. Der Querschnitt einer Röhre hat die in der Fig. 331 dargestellte Form, deren Dimensionen sich insbesondere auf die Britanniabrücke beziehen. *AE* und *BF* sind die verticalen Wände, *ABCD* ist die Decke und *EFGH* der Boden dieser Röhre. Decke und Boden sind zellenförmig construirt, so dass gleichsam dieser aus sechs und jener aus acht kleineren

Britannia - Röhrenbrücke.

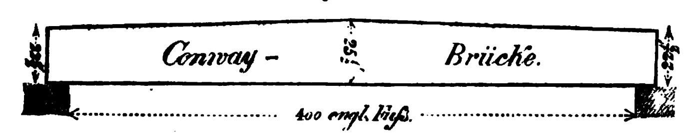
Querschnitt durch die Röhrenmitte.

Fig. 331.



Röhren besteht. Sämmtliche Wände sind aus schmiedeeisernen Platten ($\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}''$ dick) und zwar so zusammengenietet, wie diess schon mittelst der Fig. 301 und 302 anschaulich gemacht wurde. Diese zeigt nämlich die Art der Vernietung in den horizontalen Wänden des Röhrenbodens (*EF* und *GH*), jene die Art der Vernietung in den sämmtichen verticalen Zellenwänden. Im Uebrigen sind bei den beiden erwähnten Brücken die Röhren ganz gleich construirt, nur haben sie verschiedene Längen- und Höhendimensionen. Auch ist die Höhe einer und derselben Röhre nicht überall dieselbe, indem sie von den Landpfeilern gegen die Mitte der Ueberbrückung allmälig

Fig. 332.



zunimmt. So ist z. B. diese Höhenzunahme bei den beiden Röhren der Conway-Brücke in der Fig. 332 ersichtlich gemacht.

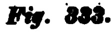
§. 290.

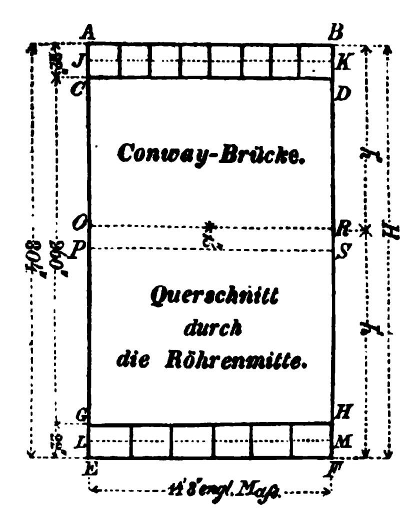
Bemerkungen über die Zweckmässigkeit des gewählten Röhrenquerschnittes. In dem §. 145 hat man die Bedingungen kennen gelernt, welche zu erfüllen sind, um in einem Trägerquerschnitte das Materiale auf die vortheilhafteste Weise in Absicht auf das Tragvermögen zu vertheilen. Hiernach ist bei der Construction eines Querschnittes für eine Röhre der oberwähnten Art dahin zu wirken:

1. Die verticalen Röhrenwände so dünn, als es die Umstände gestatten, zu machen, das übrige Materiale aber nach Zulässigkeit zur Herstellung des Bodens und der Decke der Röhre zu verwenden, und

2. Die Grösse des Bodenquerschnittes (f') zu der Grösse des Querschnittes der Decke (f'') in dasselbe Verhältniss zu bringen, welches zwischen der grössten zulässigen Pressung per □″ in dieser und der grössten zulässigen Spannung per □″ in jenem stattfindet.

Wie bereits im §. 145 bemerkt wurde, ist diesen beiden Anforderungen bei den englischen Röhrenbrücken auf eine sinnreiche Art entsprochen worden. Durch versteifende Rippen wurde es vor Allem möglich gemacht, den verticalen Röhrenwänden bloss eine $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$zöllige Dicke zu geben, so dass z. B. bei der Conway-





Brücke (Fig. 333) die beiden Röhrenwände ($CG + DH$) nicht mehr als 256 engl. □″ enthalten, während der Querschnitt f' des Bodens ($GEHF$) 517, und jener der Decke ($f'' = ABCD$) sogar 670 engl. □″ hat, in welchen letzteren übrigens auch die verticalen Zellenwände, so wie die Winkeleisen und Deckplatten berücksichtigt, die Nietlöcher aber nicht in Abschlag gebracht sind. Nach den gewählten Bezeichnungen f' und f'', und wenn man überdiess den Querschnitt der beiden Verticalwände f''' nennt, ist daher bei der Conway-Brücke

$$\left.\begin{array}{l} f' = 517 \\ f'' = 670 \\ f''' = 256 \end{array}\right| \text{ hiernach } F = (f' + f'' + f''') = 1443 \text{ engl.} \square'',$$

und das Verhältniss, welches zwischen f' und f'' stattfindet,

$$f' : f'' = 517 : 670 = 1 : 1{\cdot}18,$$

welches bekanntlich Fairbairn auf Grundlage der Resultate seiner Versuche zur Anwendung gebracht hat, und das auch in der That mit den theoretischen Betrachtungen (§. 145) in Uebereinstimmung steht. Dort ist zwar nur von den Querschnittstheilen f' und f'' die Rede, ohne dass, wie im vorliegenden Falle noch ein dritter Theil f''' in Betracht kommt; dieser Umstand kann aber die allgemeinen Schlussfolgerungen nicht wesentlich beirren, weil der Einfluss des Flächentheiles f''' auf das Tragmoment des Röhrenquerschnittes augenscheinlich nur ein geringfügiger ist.

§. 291.

Tragmoment des Röhrenquerschnittes. Bemerkungen über die Spannweite und die Anspruchsnahme des Materiales bei Röhrenbrücken. Die genaue Berech-

nung des Tragmomentes ist bei derartigen Querschnitten, wie solche bei den englischen Röhrenbrücken angewendet worden sind, ziemlich umständlich, sie kann indessen um so weniger einem Anstande unterliegen, als die einzelnen Bestandtheile des Querschnittes durchaus Rechtecke sind. Gleichwohl kann man auch ein einfacheres Verfahren anwenden, welches, ob zwar eine angenäherte, dennoch hinreichende Genauigkeit für die Praxis darbietet, so dass man dasselbe unbedenklich jener genauen Berechnung vorziehen wird. Aus dem Nachstehenden ist dieses angenäherte Verfahren zu entnehmen, und dasselbe zur besseren Versinnlichung sogleich auf die Conway-Brücke angewendet:

1. Zuerst kann man zur Bestimmung der durch den Schwerpunct des Querschnittes gehenden neutralen Axe $\overline{OR}$ nach den Bezeichnungen der Fig. 333 die Gleichungen

$$h' = \overline{OE} = \frac{f'\overline{LE} + f''.\overline{JE} + f'''\overline{PE}}{F}$$

und

$$h'' = \overline{AO} = (H - h')$$

benützen, wenn in der genannten Figur $\overline{JK}$ durch den Schwerpunct der Decke, $\overline{LM}$ durch jenen des Bodens, und $\overline{PS}$ durch jenen der beiden verticalen Röhrenwände, daher stets in der halben Höhe dieser Bestandtheile horizontal gezogen wird, so dass $\overline{AJ} = \overline{CJ}$, $\overline{EL} = \overline{GL}$ und $\overline{CP} = \overline{GP}$ ist.

Ex. Für die Conway-Brücke gelten die in der Fig. 333 cotirten Dimensionen, welche sich auf englisches Mass beziehen. Lässt man dieses Mass vorläufig gelten, und benützt zugleich die im vorigen §. für die Querschnittstheile angegebenen Flächenmasse, so ist für jede Röhre der in Rede stehenden Brücke in den obigen Formeln.

$f' = 517 \square''$	ferner $\overline{EL} = 11''$
$f'' = 670$ „	$\overline{EJ} = 293''$
$f'' = 256$ „	$\overline{PE} = 152''$
$F = 1443$ „	und $H = 304''$

zu setzen, und man findet hiermit

$$h' = 137'' = 0{\cdot}4507\,H$$

$$\text{und } h'' = 167'' = 0{\cdot}5493\,H.$$

2. Auf das Trägheitsmoment des Bodenquerschnittes f' übergehend, beachte man, dass seine dünnen Wände sowohl nach horizontaler als nach verticaler Richtung als Linien angesehen werden dürfen. Bezeichnet man von dem Querschnitt f' den Antheil, welcher in den beiden horizontalen Wänden $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ vereinigt ist, mit . . . . f_h,
jenen aber, welcher in den sieben verticalen Zellenwänden vorhanden ist, mit . . . . f_v,
so hat man zunächst

$$f' = f_h + f_v$$

und es ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe $\overline{LM}$

für die Fläche f_h nach der Gleichung (231)

$$= \tfrac{1}{4} f_h \cdot \overline{GE}^2,$$

und für die Fläche f_v nach der Gleichung (51)

$$= \tfrac{1}{12} f_v \cdot \overline{GE}^2,$$

daher für die Fläche f' die Summe beider Werthe

$$= \tfrac{1}{12}(f_v + 3 f_h)\overline{GE}^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{f_v + 3 f_h}{f_v + f_h}\right) f' \cdot \overline{GE}^2 = \tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right) f' \cdot \overline{GE}^2,$$

wenn man der Kürze wegen $\frac{f_v}{f_h} = n$ setzt, welche Verhältnisszahl bei beiden englischen Röhrenbrücken wegen $f_h = 2 f_v$ mit $n = \frac{1}{2}$ angenommen werden kann, wodurch obiger Coefficient

$$\tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right) = \tfrac{7}{36}$$

wird.

Uebersetzt man das für den Bodenquerschnitt gefundene Trägheitsmoment auf die neutrale Axe $\overline{OR}$, und nennt das Resultat t', so ist offenbar

$$t' = \left[\tfrac{1}{12}\left(\frac{3+n}{1+n}\right)\overline{GE}^2 + \overline{OL}^2\right] f',$$

also für die Conway-Brücke
wegen $n = \frac{1}{2}$, $\overline{GE} = 22''$, $\overline{OL} = 156''$ und $f' = 517 \square''$ insbesondere,

$$t' = 12630362.$$

3. Eben so kann man für die Decke der Röhre das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe $\overline{OR}$

$$t'' = (\tfrac{7}{26}\overline{AC}^2 + \overline{OJ}^2)f''$$

setzen, weil für die Vertheilung des Querschnittes in den horizontalen und verticalen Wänden der oben mit n bezeichnete Werth gleichfalls mit $\frac{1}{2}$ angenommen werden kann. Für die Conway-Brücke ist insbesondere

$$\overline{AC} = 22'', \ \overline{OJ} = 126'' \text{ und } f'' = 670 \square'',$$

daher

$$t'' = 10699967.$$

4. Das Trägheitsmoment t''' des Querschnitts f''' der beiden Röhrenwände $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ ist in Beziehung auf die neutrale Axe $\overline{OR}$

$$t''' = (\tfrac{1}{12}\overline{CG}^2 + \overline{OP}^2)f''',$$

daher für die Conway-Brücke, wegen $\overline{CG} = 260''$, $\overline{OP} = 15''$ und $f''' = 260$, insbesondere

$$t''' = 1499725.$$

5. Das Trägheitsmoment T des ganzen Röhrenquerschnittes ist nunmehr die Summe von t', t'' und t''', daher in dem betrachteten speciellen Falle

$$T = 24835054 = 0·1862\ FH^2.$$

Der letzte Werth $0·1862\ FH^2$ gilt jetzt auch für Wiener Mass, indem der Coefficient 0·1862 lediglich eine absolute von der Masseinheit unabhängige Zahl vorstellt.

6. Nach den §§. 77 und 145 ist das Tragmoment des Röhrenquerschnittes

$$M = \frac{a' T}{h'} = \frac{r' T}{h''}$$

zu setzen, weil die im Allgemeinen verschiedenen Alternativwerthe für dasselbe im vorliegenden Falle, wo die Vertheilung des Materiales in den Zellen auf die vortheilhafteste Art geschehen ist, als gleich anzunehmen kommt. Auch ist bezüglich der grössten zulässigen Spannung und Pressung (a' und r') zu bemerken, dass diese Anspruchsnahmen wegen der durch die Nieten geschwächten Wände in Gemässheit der §§. 258, 259, 260 und 261 nicht so gross, wie jene sein können, welche für homogenes Schmiedeeisen stattfinden dürften,

weil der Inhalt der obigen Querschnitte f' und f'' ohne Abzug der Nietlöcher angegeben ist, aus welchem Grunde auch die in den §§. 77 und 145 mit a und r bezeichneten Anspruchsnahmen hier in Uebereinstimmung mit dem Vorgange in jenen vier citirten §§. je mit einem Striche versehen sind.

Aus der obigen Formel findet man analog mit der Formel (250)

$$a' : r' = h' : h'',$$

und dieses Verhältniss wird mit Rücksicht auf die für h' und h'' gegebenen speciellen Werthe

$$a' : r' = 1{\cdot}22 : 1.$$

Dass das Verhältniss $h' : h''$ nicht so genau mit jenem zwischen f'' und f' übereinstimmt, wie diess in den Formeln (250) und (254) der Fall war, hat darin den Grund, weil hier die Flächentheile f' und f'' eine gewisse Höhe einnehmen, was bei dem im §. 145 untersuchten imaginären Falle nicht berücksichtigt erscheint.

Lässt man vor der Hand die eigentlichen Werthe von a' und r' unbestimmt, und setzt in die obigen Formeln für das Tragmoment die bereits für die Conway-Brücke berechneten Werthe, nämlich

$$T = 0{\cdot}1862\,FH^2,\; h' = 0{\cdot}4507\,H \text{ und } h'' = 0{\cdot}5493\,H,$$

so erhält man

$$M = 0{\cdot}3390\,a'FH = 0{\cdot}4131\,r'FH.$$

Dieser auf doppelte Weise dargestellte Werth des Tragmomentes ist offenbar unabhängig von der Mass- und Gewichtseinheit, indem die vorkommenden numerischen Coefficienten absolute Zahlen sind. Man wird jetzt, um das Resultat auf Wiener Mass und Gewicht beziehen zu können, nur nöthig haben, H und F entsprechend auszudrücken. Nun ist

F = 1443 engl. = 1341 Wiener Quadrat-Zoll,
und H = 304 „ = 293 „ Current „

daher nach Benützung dieser Werthe.

$$M = 133197\,a' = 162311\,r'.$$

Um nach diesen Berechnungen gleich auf die Brückenspannweite überzugehen, beachte man, dass zu diesem Behufe für Brücken, welche bloss auf beiden Enden aufliegen, die Formel (571) $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{g}}$

zum Anhaltspuncte zu dienen hat, in welcher M das zuvor besprochene Tragmoment und g das Totalgewicht bezeichnet, welches auf die Klafter Brückenlänge entfällt. Für die Conway-Brücke z. B. beträgt das eigene Gewicht einer Röhre per Längenklafter circa 382 Wr Ztr., und nimmt man noch die zufällige Belastung gleichfalls per Currentklafter mit 130 Ztr. an, so wird das Totalgewicht $g = (g_1 + g_2) = (382 + 130) = 512$ W. Ztr.

Nach diesen Daten findet man

$$L = \sqrt{28{\cdot}91\,a'} = \sqrt{35{\cdot}22\,r'}.$$

Ist man bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen so weit gelangt, so kann man nun entweder die grössten zulässigen Anspruchsnahmen a' und r' den Umständen entsprechend wählen, und die Spannweite L berechnen, oder aber umgekehrt die bekannte oder gewünschte Spannweite zu Grunde legen, und auf die bezüglichen Anspruchsnahmen a und r schliessen. Befolgt man für das behandelte Beispiel der Conway-Brücke das letztere Verfahren, so hat man wegen $L = \overset{0}{64{\cdot}28}$

die grösste Spannung per □'' Querschnitt im Röhrenboden . . . . . $a' = \frac{L^2}{28{\cdot}91} = 143{\cdot}0$ Wr. Ztr.

und die grösste Pressung per □'' Querschnitt in der Röhrendecke . $r' = \frac{L^2}{21{\cdot}76} = 117{\cdot}2$ Wr. Ztr.

Der □'', auf welchen sich diese Anspruchsnahmen a' und r' beziehen, ist jedoch nicht als voll, sondern als durch die Nieten geschwächt anzusehen, so dass auf den vollen Quadratzoll in dem Verhältnisse grössere Anspruchsnahmen a und r zu repartiren sind, als der Röhrenquerschnitt durch die Nietlöcher vermindert worden ist. Berücksichtigt man nach den Bemerkungen im §. 260 die solide Vernietung, wie solche bei den englischen Röhrenbrücken ausgeführt worden ist, so muss man zugeben, dass sich das Verhältniss $\frac{a'}{a}$ und $\frac{r'}{r}$ von der Einheit weniger entfernen wird, als bei den gewöhnlichen Vernietungen, so dass dieses Verhältniss ohne Besorgniss mit $\frac{5}{6}$ angenommen, und demgemäss $a = \frac{6}{5} a' = 171{\cdot}6$ u. $r = \frac{6}{5} r' = 140{\cdot}8$ Ztr. per □'' gesetzt werden kann. Diese Anspruchsnahmen erscheinen

im vorliegenden Falle für Schmiedeeisen von entsprechender Qualität um so weniger bedenklich, als das eigene Gewicht der Brückenröhren viel grösser, als die eintretende zufällige Belastung ist, daher die Erschütterungen durch die Befahrung mit Eisenbahntrains bei Weitem nicht in jenem Grade nachtheilig werden können, wie diess in der Regel bei leichten Brückenconstructionen zu besorgen ist.

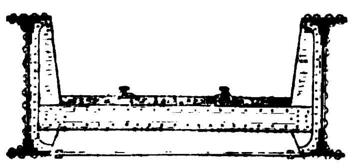
§. 292.

Steifigkeit der Röhrenbrücken. Die Steifigkeit von Röhren überhaupt ist verhältnissmässig gross, wenn man den Querschnitt in seiner Form erhalten kann. Die zu diesem Behufe nöthigen Rippen und Streben werden aber desto umfangreicher, aus je dünneren Wänden die Röhre zu bestehen hat. Es ist daher erklärlich, dass bei den englischen Röhrenbrücken der zu solchen auf die Formerhaltung abzielenden Rippen und Streben erforderliche Materialaufwand sogar bis auf den vierten Theil desjenigen gesteigert werden musste, welcher zu dem eigentlichen Röhrenquerschnitte gehört. Aber ausserdem wurden auch die Seitenwände der Röhren von der Mitte gegen die Enden derselben verstärkt. Die Dicke dieser Wände in der Mitte ist $\frac{1}{2}$, an den Enden hingegen $\frac{3}{4}$ engl. Zoll. Diese Verstärkung erscheint dadurch begründet, dass die normal auf die Längenrichtung der Röhren wirkende Resultirende der offensiven Kräfte, welche in den §§. 271, 277 und 278 mit R bezeichnet wurde, von der Mitte gegen die Enden zunimmt, dieser Anspruchsnahme aber überall in genügender Weise zu begegnen ist. Noch sind zur Vermehrung des Widerstandes in der eben erwähnten Beziehung die Röhrenenden in starke gusseiserne Rahmen eingeschoben werden, welche wesentlich zur Erhaltung der Querschnittsform beitragen.

Anmerkung. Die im vorstehenden Kapitel behandelten Brücken erfordern je nach ihrer Bestimmung für die Brückenröhren eine Höhe von mehreren Klaftern, damit durch dieselben entweder die Eisenbahnzüge oder andere Gattungen Fuhrwerke anstandslos passiren können. Eine so bedeutende Röhrenhöhe ist aber aus Rücksicht für das Tragvermögen solcher Brücken nur bei entsprechend grossen Spannweiten nothwendig, während bei kleineren Brückenlängen die Construction von Brückenröhren der bezeichneten Art offenbar in öconomischer Beziehung höchst unvortheilhaft wäre. Durch diese Betrachtung wird man unmittelbar auf solche Blechbrücken geleitet, deren Träger bloss aus verticalen Wänden bestehen, die

zur Vermehrung der Steifigkeit und des Tragvermögens mit horizontalen Flanschen begränzt werden, so dass dieselben eigentlich I förmig gebildet erscheinen (Fig. 334). Brücken dieser Art eignen sich vorzugsweise für Spannweiten bis zu 20 Klaftern, und ihre Ausführbarkeit ist durch viele practische Fälle bereits sichergestellt. Bei der Ausführung derselben ist insbesondere auf die Formerhaltung des Ganzen durch die Verwendung von Flach- und Winkeleisen zur Anordnung von Verstärkungen und Rippen, so wie durch entsprechende horizontale Verspannungen oder Verstrebungen nach der Quere und nach diagonalen Richtungen, gleichzeitig aber auch auf die Erreichung des grössten Tragvermögens durch eine möglichst solide Vernietung der einzelnen Constructionstheile, und durch die zweckmässigste Vertheilung des Materiales in den oberen und unteren Flanschen der I förmigen Blechwände hinzuwirken, und es sind zu diesem Behufe hauptsächlich die in den §§. 148, 258, 259, 260 und 261 vorgetragenen Lehren zu berücksichtigen. Hiernach wird man die oberen und unteren Flanschen ihrer Grösse nach nur wenig von einander differiren lassen, falls man es nicht vorzuziehen findet, dieselben gleich gross anzuordnen, wie z. B. dann, wenn die oberen Flanschen so steif erhalten werden können, dass die Pressung per □″ in denselben bis zur Sicherheitsgränze in der gleichen Intension zulässig erscheint, wie die Spannung in den unteren Flanschen. Die näheren Berechnungen bei solchen Brücken können der Hauptsache nach eben so, wie bei den Röhrenbrücken vorgenommen werden.

Fig. 334.



Zusatz zum fünften Abschnitte.

In dem §. 263 wurde bei der Bildung der Formel (571) für die grösste zulässige Spannweite vorausgesetzt, dass die Brückenträger an ihren Enden einfach aufruhen, und im Weiteren diese Formel auch nur auf solche Fälle angewendet, wo die gemachte Voraussetzung zugelassen werden konnte. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn die Brückenträger über mehrere Joche oder Pfeiler so fortlaufen, dass sie nach der ganzen Brückenlänge zusammenhängen. Die im letzten Kapitel erwähnte Britannia-Röhrenbrücke ist ein Beispiel dieser Art, und sie unterscheidet sich solchergestalt von der Conway-Brücke, welche nur einfach an beiden Enden aufruht. Die Untersuchung derartiger Fälle geschieht der Wesenheit

nach eben so, wie bei dem Vorhandensein von nur einer Brückenöffnung. Man bestimme nämlich zuerst den Ort des gefährlichen Querschnittes oder die schwächste Stelle der Brückenträger, so wie die Grösse des statischen Momentes (Rx) der einwirkenden Kräfte in Bezug auf diese Stelle, und setze dieses offensiv auftretende Moment gleich dem widerstehenden Tragmomente von Seite des Querschnittes. Die so gebildete Gleichung führt unmittelbar auf die Bedingungen des Gleichgewichtes der Construction, und sie hat zur Bestimmung der einen oder der anderen in Frage stehenden Grösse zu dienen. Sind die Brückenträger prismatisch geformt und gleichmässig construirt, ferner die Brückenfelder alle gleich lang, und stellt man sich vor, dass die grösste zufällige Belastung über alle gleichförmig vertheilt sei, so finden die Resultate in den §§. 218 bis 229 Anwendung. Unter diesen besonderen Verhältnissen lassen sich folgende Betrachtungen anstellen:

Fig. 335.

L_1

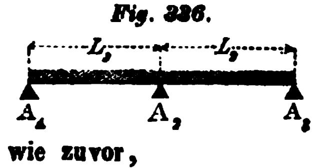
A_1 A_2

1. Vor Allem werde (Fig. 335) bei dem Vorhandensein von nur Einer Brückenöffnung die grösste zulässige Spannweite mit L_1 bezeichnet, und dieselbe in Wiener Klaftern verstanden. Es sei ferner die Totalbelastung per Klafter Brückenlänge g Ztr., und es werde der Einfachheit wegen angenommen, dass das Tragmoment M des Brückenquerschnittes dasselbe bleibe, ob in diesem letzteren die oberen Fasern ausgedehnt und die unteren zusammengedrückt werden, oder umgekehrt. Nach dem §. 81 kann diese Annahme zugelassen werden, einerseits bei jeder Materialgattung, wenn die neutrale Axe in die halbe Höhe des Querschnittes fällt, und dieser zugleich in seiner Form erhalten werden kann, andererseits bei jeder Querschnittsform, wenn die Elasticitätsgränzwerthe für die Ausdehnung und Zusammendrückung als gleich gelten können. Die besagte Annahme wird daher in der That grösstentheils gestattet sein. Sodann ist nach der Gleichung (571) für Eine Brückenöffnung (Fig. 335)

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{g}} \text{ Wiener Klafter.}$$

Dieser Fall werde als der erste bezeichnet.

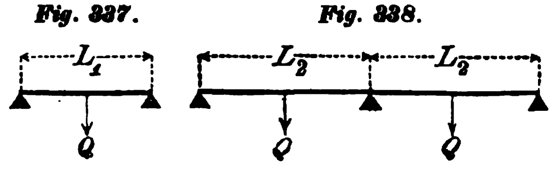
2. Sind in einem zweiten Falle zwei Brückenöffnungen von der Länge L_2 Klafter (Fig. 336) vorhanden, und kann jeder Träger von



A_1 über A_2 bis A_3 als ein Ganzes betrachtet werden, so muss das Tragvermögen eines jeden Brückenfeldes $g\,L_2$ sein. In diesem Falle wird eben so, wie zuvor,

$$L_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{g}},$$

denn aus dem §. 229 ad 1 und 2 geht hervor, dass für $L_1 = L_2$ das Tragvermögen eines Brückenfeldes in den verglichenen Fällen unverändert bleibt, wenn die Träger prismatisch geformt, und gleichförmig construirt sind. In dem betrachteten 2. Falle liegt der gefährliche Querschnitt an der Stelle A_2 (Fig. 336), wie diess aus dem §. 228 für $M_1 = M_2$ hervorgeht. Wenn aber dem Querschnitte der Träger an der schwächsten Stelle in A_2 eine Verstärkung gegeben, und dadurch die Solidität der Construction erhöhet wird, so kann allerdings eine dieser Verstärkung entsprechende Vergrösserung der Spannweite L_2 stattfinden. Die Anbringung von Füllhölzern an der erwähnten Stelle, wie z. B. bei Traggeländerbrücken, dann die Anbringung von Sattelhölzern und Streben daselbst sind einer solchen Verstärkung gleichzuhalten. Diese Bemerkung hat man zu berücksichtigen, wenn man das von mehreren Fachmännern empfohlene Verhältniss $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{4}$ in Anwendung bringen will. Auf diesen Umstand wird insbesondere darum aufmerksam gemacht, weil es eine gewöhnliche Meinung ist, dass die Anwendung des fraglichen Verhältnisses $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{4}$ schon bei den rein prismatischen Trägern ohne jener erwähnten Verstärkung zulässig wäre, indem man von der Ansicht auszugehen pflegt, dass die Sache so wie in den Fig. 337 und 338 betrachtet werden könne, wornach



man sich nämlich erlaubt, die Belastung eines jeden Brückenfeldes stets in der Mitte desselben concentrirt anzunehmen. Bei dieser An-

nahme ist es allerdings richtig, dass die Brückenfelder ein gleiches Tragvermögen besitzen, wenn die Spannweite L_2, verglichen mit der Spannweite L_1, in dem Verhältnisse wie 3:4 vergrössert wird, ohne eine weitere Vorsichtsmasssregel anzuwenden. Diese Wahrheit bestätigen die Formeln im §. 217 ad 3, nach welchen die Tragfähigkeiten in den beiden verglichenen Fällen bei gleich grossen Brückenfeldern, wie $4:5\frac{1}{3}=12:16=3:4$ sich verhalten, also auch umgekehrt die Brückenfelder bei dem Verhältnisse $L_1:L_2=3:4$ ein gleiches Tragvermögen besitzen werden. Allein diese einseitige Betrachtung kann nicht massgebend für die Anwendung sein, indem der erwähnte Vortheil nicht mehr vorhanden ist, wenn die grösste zufällige Belastung die ganze Brücke bedeckt; daher man, weil diese Belastungsweise den thatsächlichen Verhältnissen gemäss als die ungünstigste zu gelten hat, zu dem auf die Fig. 335 und 336 Bezug nehmenden Resultate zurückkehren, und die Zulässigkeit der Vergrösserung der Spannweite L_2 im Vergleiche zu der Spannweite L_1 jedenfalls an die Bedingung knüpfen muss, dass die Stärke der Träger an der Stelle A_2 (Fig. 336) angemessen erhöht werde.

3. Sind in einem dritten Falle (Fig. 339) drei Brückenöffnungen, jede von der Spannweite L_3 vorhanden, und die Träger über alle

Fig. 339.

continuirlich fortlaufend, übrigens prismatisch geformt und durchaus gleichförmig construirt, so ist das Tragvermögen eines Brückenfeldes $g\,L_3$, und dasselbe nach dem §. 229 ad 2 dem Werthe $\frac{10\,M}{72\,L}$ gleich zu setzen, wenn man beachtet, dass die Spannweite L_3 gegenwärtig die Benennung Klafter hat, während sie in der betreffenden Formel im §. 229 in Zollen verstanden ist. Aus der so gebildeten Gleichung folgt

$$L_3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{5\,M}{g}} = 0{\cdot}3727\sqrt{\frac{M}{g}},$$

und hieraus, wenn man dieses Resultat mit dem des ersten Falles vergleicht

$$L_1 : L_3 = \tfrac{1}{3} : \frac{\sqrt{5}}{6} = 1 : 1{\cdot}118 \text{ nahe wie } 17 : 19.$$

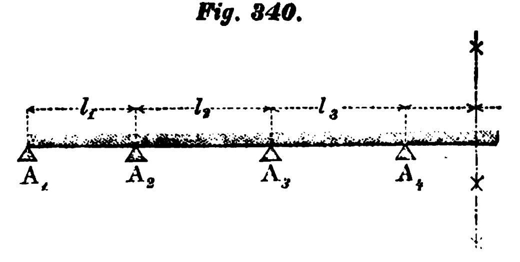
In dem betrachteten dritten Falle liegt der gefährliche Querschnitt an den beiden Stellen A_2 und A_3. Erhöht man an diesen Stellen die Solidität der Träger, so kann man für L_3 einen entsprechend grösseren Werth zulassen.

4. Sind mehr als drei Brückenfelder vorhanden, und haben von diesen alle die gleiche Spannweite, so kann man für continuirliche Träger das dem dritten Falle correspondirende Resultat beibehalten, weil sodann den Gleichungen (508) zufolge der Zustand der äusseren Brückenfelder von jenem des dritten Falles nicht wesentlich abweicht.

Die vorstehenden Betrachtungen sind unter anderen auch auf die Voraussetzung gegründet, dass in einem und demselben Falle die Brückenöffnungen alle gleich gross sein sollen. Man hat gesehen, dass unter dieser Bedingung der gefährliche Querschnitt stets bei dem zweiten und vorletzten Stützpuncte liegt, und dass die zwischen diesen liegenden Brückenfelder eine grössere Stärke, als nöthig, besitzen. Daraus schliesst man, dass es vortheilhaft sein wird, die Brückenfelder nicht gleich weit, sondern die den Landpfeilern zunächst gelegenen enger, als die übrigen anzuordnen.

Das vortheilhafteste Verhältniss, welches zwischen l_1, l_2, l_3... (Fig. 340) stattfindet, ist offenbar an die Bedingung zu knüpfen, dass

Fig. 340.



in keinem Brückenfelde eine überflüssige Stärke vorhanden sein, also der gefährliche Querschnitt in allen Brückenfeldern vorkommen soll. Um Behufs der Erörterung dieses Verhältnisses in keine weitläufigen Untersuchungen zu gerathen, erlaube man sich die Annahme der Bedingungen, dass die ganze Belastung gleichförmig nach der ganzen Länge vertheilt sei, und dass die Tangenten der Biegungscurve an allen Stützpuncten mit Ausnahme der beiden äussersten horizontal gehen.

Unter diesen Bedingungen kann man

$$M = \frac{1}{8} g l_1^2 = \frac{1}{12} g l_2^2$$

setzen, wenn man beachtet, dass in Bezug auf die schwächste Stelle A_2 nach den Relationen (353) $\frac{1}{8} g l_1^2$ das statische Moment der Belastung $g l_1$ des ersten Brückenfeldes $A_1 A_2$, ferner nach den Relationen (404) $\frac{1}{12} g l_2^2$ das statische Moment der Belastung $g l_2$ des zweiten Brückenfeldes $A_2 A_3$ vorstellt.

Daraus findet man

$$l_1 : l_2 = \sqrt{2} : \sqrt{3} = 1 : 1{\cdot}225 \text{ nahe wie } 4 : 5.$$

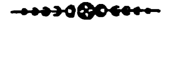
Selbstverständlich bezieht sich dieses Verhältniss auch auf das letzte und vorletzte Brückenfeld. Für alle übrigen Felder kann man als Spannweite ebenfalls den Werth l_2 gelten lassen.

Nach diesem Resultate kann also die Spannweite zwischen den Mittelpfeilern im Vergleiche mit den beiden äussersten Brückenöffnungen im Verhältnisse wie 5:4 vergrössert werden, was mit dem Vorschlage Ghega's*) und anderer anerkannter Fachmänner übereinstimmt.

Da übrigens die zufällige Belastung auch anders, als gleichförmig nach der ganzen Länge, z. B. nur auf einige Brückenfelder vertheilt sein kann, dadurch aber die oben angenommenen Bedingungen mehr oder weniger verändert werden, so erfordert es die Vorsicht, die Solidität der Träger an ihren Auflagestellen in angemessener Weise, z. B. durch die Anbringung von Füllhölzern, Satteln, Streben u. s. w. zu vermehren, und auf diese Weise den Nachtheilen für das Brückenobject zu begegnen, die sonst aus Anlass jener veränderten Bedingungen entstehen könnten.

---

*) Siehe dessen Werk: „Ueber nordamerikanischen Brückenbau" (Wien 1845), Seite 62.



Sechster Abschnitt.

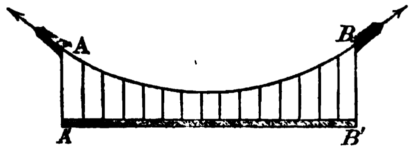
Kettenbrücken.

---

§. 293.

Vorerinnerung. Bei den Kettenbrücken wird die Brückenbahn $A'B'$ (Fig. 341) von eisernen Ketten AB getragen, welche dessbalb auch Tragketten genannt werden. Diese Tragketten bilden das Wesentlichste einer solchen Brückenconstruction. Sie werden bloss nach der Länge gezogen. Es handelt sich vor Allem um die Aufklärung, welche krumme Linie die Tragketten zu bilden anstreben, und welche Spannungen in denselben entstehen. Durch diese Fragen wird man zunächst auf die Untersuchung der Kettenlinien geleitet.

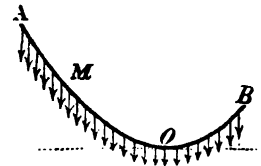
Fig. 341.



§. 294.

Kettenlinien. Wenn eine an zwei Puncten A und B (Fig. 342) aufgehängte Kette in allen ihren Theilen vollkommen beweglich und zugleich nach irgend einem Gesetze belastet wäre, so würde sie, als mathematische Linie angesehen, im Zustande des Gleichgewichtes eine Curve bilden, die mit Rücksicht auf ihre Entstehung Kettenlinie genannt wird. Es leuchtet ein, dass die Form dieser krummen Linie unter anderen auch von der Art und Weise der Belastungsvertheilung abhängt, wesshalb es unzählige

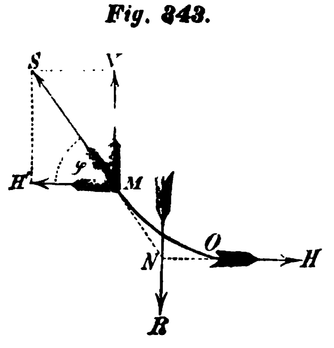
Fig. 342.



Arten von Kettenlinien geben kann. Wie aber auch die Belastung vertheilt sein mag, so lassen sich doch immerhin mehrere Eigenschaften auffinden, die für alle Kettenlinien giltig sind. Diese allgemeinen Eigenschaften sind im Nachstehenden angegeben:

1. Ist die Kettenlinie lang genug, so wird es einen tiefsten Punct O (Fig. 342) geben, wo die Tangente an die Kettenlinie horizontal geht. Dieser Punct werde der Scheitel der Kettenlinie genannt. Wäre daselbst die Kette abgeschnitten, so müsste man, um das Gleichgewicht nicht zu stören, in der horizontalen Richtung der Tangente eine Kraft H (Fig. 343) anbringen, und zwar eben so gross, wie die Spannung, welche die Kette an dieser Stelle erleidet. Betrachtet man ferner ein beliebiges Kettenstück $\widehat{OM}$ (Fig. 342) und stellt sich die Kette in M gleichfalls abgeschnitten vor, so muss man zur Erhaltung des Gleichgewichtes an dieser Stelle sich eine Kraft S (Fig. 343) nach der tangentiellen Richtung angebracht denken, welche der Spannung der Kette in M (Fig. 342) gleich ist. Den beiden Kräften H und S ist nun die Bestimmung zugewiesen, dem belasteten Kettenstücke $\widehat{OM}$, also dem resultirenden Gewichte R Gleichgewicht zu halten. Diese Resultirende R ist nämlich durch den Schwerpunct der ganzen Belastung zu ziehen, welche von dem Kettenstücke $\widehat{OM}$ getragen wird, wobei auch das eigene Gewicht der Kette zu berücksichtigen ist. Aus dieser Darstellung geht zunächst hervor, dass der Horizontalzug H unabhängig von der Grösse des Kettenstückes $\widehat{OM}$ ist.

Fig. 343.



2. Um die näheren Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen den erwähnten drei Kräften H, S und R zu finden, beachte man, dass in dem Kräftensysteme weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung stattfinden darf. Zur Hintanhaltung einer fortschreitenden Bewegung muss offenbar

$$\left.\begin{array}{r} H' = H \\ \text{und } V = R \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (605)$$

sein, wenn H' und V die Componenten der Tangentialspannung S nach horizontaler und nach verticaler Richtung vorstellen.

Zur Verhinderung einer drehenden Bewegung müssen sich aber noch die Richtungen der drei Kräfte H, S und R in einem Puncte N durchschneiden.

Den Gleichungen (605) zufolge ist die horizontale Componente H' in der ganzen Ausdehnung der Kette eine constante Grösse, indem der ihr gleiche Werth H von der Lage des Punctes M nicht abhängt, während die verticale Componente V der gesammten von dem Kettenstücke $\widehat{OM}$ zu tragenden Belastung gleich, daher mit der Lage der Puncte M variabel ist.

3. Bezeichnet man den Stellungswinkel des Kettenelementes in M, welcher nämlich von den Kräften S und H' eingeschlossen wird, mit φ, so folgen aus dem von den Componenten H' und V gebildeten Kräftenparallelogramme und mit Rücksicht auf die Relationen (605) die weiteren Bedingungsgleichungen:

$$tg\,\varphi = \frac{R}{H},\ R = H\,tg\,\varphi,\ S = \frac{H}{\cos\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi} = \sqrt{R^2 + H^2}. \quad . \quad (606).$$

4. Die Gleichung $tg\,\varphi = \frac{R}{H}$ lehrt, dass $tg\,\varphi$ mit dem Gewichte R im geraden und einfachen Verhältnisse wächst, wesshalb φ immer grösser wird, je mehr M sich dem Aufhängepuncte A nähert. Jede Kettenlinie muss daher gegen den durch den Scheitel O gelegten Horizont convex geformt sein. Da ferner $\varphi = o$ nur für $R = 0$ folgt, jedenfalls aber $\varphi < 90^0$ sein muss, weil offenbar nur endliche Werthe von R und H in Betracht kommen, so schliesst man, dass eine Kettenlinie niemals eine gerade Linie bilden, aber auch niemals verticale Tangenten an ihren Aufhängepuncten besitzen kann. Im Uebrigen hängt die Gestalt der Curve von der Art und Weise der Belastung ab. Ist z. B. die Belastung nach der Länge der Kette gleichförmig vertheilt, hat somit jedes Kettenelement gleich viel zu tragen, so entsteht die gemeine Kettenlinie. Man kann übrigens auch umgekehrt jede krumme Linie, welche die zuvor angegebenen allgemeinen Eigenschaften besitzt, als eine Kettenlinie gelten lassen, und sodann auf das diessfalls nöthige Gesetz der Belastungsvertheilung schliessen. So z. B. kann ein Kreissegment, dessen Centri-

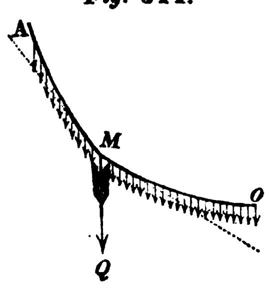
winkel 180° nicht erreicht, ganz wohl eine Kettenlinie repräsentiren.

5. Die Relationen $H = \frac{R}{tg\,\varphi}$ und $S = \frac{R}{sin\,\varphi}$ lassen entnehmen, dass die Tangentialspannung S und ihre horizontale Componente H mit der Abnahme von φ zunehmen, also desto grösser werden, je flächer das Curvenstück $\widehat{OM}$ ist. Für $\varphi = o$ würden die Kräfte H und S unendlich gross, wenn R einen von o verschiedenen endlichen Werth hat, woraus in Uebereinstimmung mit der Bemerkung ad 4 hervorgeht, dass eine Kette, wie sie auch belastet sein möge, niemals geradlinig sein kann.

6. Die Relation $S = \frac{H}{cos\,\varphi} = \sqrt{H^2 + R^2}$ zeigt deutlich, dass die Tangentialspannung S mit dem Winkel φ, also auch mit dem Kettenstücke $\widehat{OM}$ zunimmt. Daraus folgt, dass die Kettenspannung S im Scheitel O am kleinsten, nämlich $S = H$ ist, und von da aus gegen die Aufhängepuncte der Kette hin zunimmt, so dass dieselbe in diesen letzteren am grössten wird. Die Kette wird daher an ihren verschiedenen Stellen ungleich gespannt.

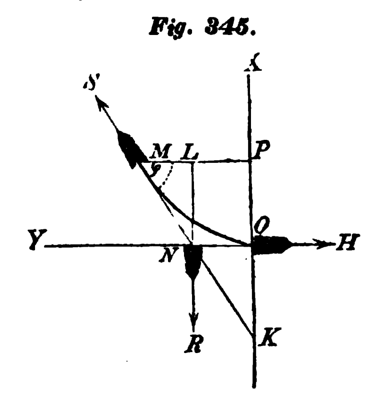
7. Wegen $tg\,\varphi = \frac{R}{H}$ ändert sich φ continuirlich oder sprungweise, je nachdem R in der einen oder der anderen Weise mit der Lage des Punctes M veränderlich ist. Im ersten Falle kommt auf jedes Kettenelement eine unendlich kleine Belastung, und die Curve ist continuirlich, d. h. zwei unmittelbar auf einander folgende Tangenten schliessen einen Winkel ein, der nur unendlich wenig von 180 Graden verschieden ist. Im zweiten Falle hingegen hat man sich die sprungweise Veränderung in der Belastungsvertheilung dadurch entstanden vorzustellen, dass sich an der betreffenden Stelle M (Fig. 344) noch eine besondere Belastung Q concentrirt, so dass daselbst das Kettenelement nicht unendlich wenig, sondern eben diese Last Q zu tragen hat. In diesem Falle wird die Curve in M eine Ecke bilden, nämlich gleichsam

Fig. 344.



aus zwei Curvenstücken $\widehat{AM}$ und $\widehat{BM}$ zusammengesetzt sein, welche an ihrem Zusammenstosse M keine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Fig. 345.



8. Legt man durch den Scheitel O (Fig. 345) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, bei welchem die Abscissen vertical und die Ordinaten horizontal angenommen werden, und setzt man für einen beliebigen Punct M die Abscisse $\overline{OP} = x$ und die Ordinate $\overline{MP} = y$, so findet man mit Rücksicht auf die Bemerkung ad 2, wornach die Kräfte S, H und R sich in einem Puncte schneiden müssen, und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LMN und MPK die Proportion

$$\overline{ML} : \overline{MP} = \overline{LN} : \overline{PK},$$

$$\text{oder } \overline{ML} : y = x : \overline{PK},$$

und hieraus die Subtangente des Punctes M

$$\overline{PK} = \frac{xy}{ML} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (607).$$

Diese Relation kann benützt werden, um die Gleichung der Kettencurve zu finden, wenn die Lage des Schwerpunctes der Belastung zwischen O und M, durch welchen die Resultirende R gezogen ist, also auch das Stück $\overline{LM}$ bekannt erscheint. In diesem Falle hat man nur für die Subtangente $\overline{PK}$ den Werth $y \, tg \, \varphi = y \frac{dx}{dy}$ zu setzen, und von der so entstehenden Differentialgleichung

$$y \frac{dx}{dy} = \frac{xy}{ML} \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\overline{LM}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (608)$$

den entsprechenden Gebrauch zu machen. Liegt z. B. der Schwerpunct der Belastung für den Kettentheil $\widehat{OM}$ so, dass die durch denselben gezogene Resultirende R die Ordinate $\overline{PM}$ stets halbirt, ist nämlich $\overline{LM} = \frac{1}{2} y$, so erhält man nach der Gleichung (607)

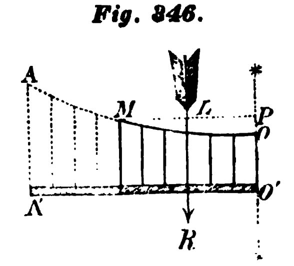
$$\overline{PK} = 2x,$$

also die Subtangente gleich der doppelten Abscisse. Diese Eigenschaft besitzt bekanntlich eine gemeine Parabel, welche ihren Scheitel in O hat, und deren Axe vertical liegt.

§. 295.

Zulassung der parabolischen Kettenlinie für Kettenbrücken. Es liegt im mehrseitigen Interesse, die Ketten bei Kettenbrücken nur flache Curven bilden zu lassen. Desshalb und weil die Brückenbahn nach der Länge als gleichförmig construirt anzusehen ist, wird die von der Kette zu tragende Belastung sich ziemlich gleichförmig nach horizontaler Richtung vertheilen, wenn auf derselben keine oder aber eine solche zufällige Belastung vorhanden ist, welche sich ebenfalls nach der Brückenlänge gleichmässig vertheilt. Unter diesen Umständen wird die Resultirende R der von einem Kettenstücke $\overset{\frown}{OM}$ (Fig. 346) getragenen Belastung die Ordinate $\overline{MP}$ in L sehr nahe halbiren, und man wird sich der Wahrheit genügend annähern, wenn man mit Rücksicht auf den vorigen §. ad 8 die von einer Brückenkette gebildete krumme Linie als eine gemeine Parabel annimmt. Man lasse daher unter den vorausgesetzten Umständen diese Annahme in der Ueberzeugung gelten, dass dadurch ein wesentlicher Irrthum nicht entstehen kann.

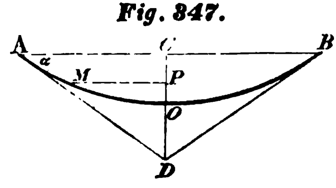
Fig. 346.



§. 296.

Spannweite, Pfeilhöhe, Aufhängewinkel und Länge der Tragketten. Es sei $\overset{\frown}{AOB}$ (Fig. 347) eine Tragkette, deren Form in Gemässheit des vorigen §. als parabolisch angenommen wird, wenn keine oder eine solche zufällige Belastung, welche sich nach der Bahnlänge gleichförmig vertheilt, vorhanden ist; auch sei die Linie $\overline{AB}$ horizontal und daher die Curve auf beiden Seiten der Parabelaxe symmetrisch gebildet; endlich stelle man sich in $\overset{\frown}{AOB}$ alle vorhandenen Ketten vereinigt vor.

Fig. 347.



Man setze die Spannweite $\overline{AB}$ . . . . $= 2h$,
nämlich jede ihrer Hälften $\overline{AC} = \overline{BC}$ . . . . $= h$,
die Pfeilhöhe $\overline{CO}$ . . . . $= f$,
den Aufhängewinkel, welchen die Tangente $\overline{AD}$ mit der Spannweite $\overline{AB}$ bildet . . . . $= \alpha$,
die Kettenlänge $\widehat{AO} = \widehat{OB}$ . . . . $= l$,

ferner für einen beliebigen Punct M
die Abscisse $\overline{OP}$ . . . . $= x$,
die Ordinate $\overline{MP}$ . . . . $= y$
und den Bogen $\widehat{OM}$ . . . . $= s$.

Da es zweckmässig ist, das Verhältniss zwischen der Spannweite und Pfeilhöhe einzuführen, so setze man dasselbe

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CO}} = \frac{2h}{f} = n,$$

und bemerke, dass in den practisch vorkommenden Fällen n in der Regel zwischen 12 und 18 liegt. Diesen Bezeichnungen gemäss ist zunächst die Gleichung der parabolischen Curve

$$y^2 = \frac{h^2}{f}x \text{ oder } \left(\frac{y}{h}\right)^2 = \frac{x}{f} \quad . \; . \; . \; . \quad (609),$$

und weil die Subtangente des Punctes A gleich der doppelten Pfeilhöhe, also $CD = 2f$ ist, auch

$$tg\,\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{2f}{h} = \frac{4}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (610),$$

d. h. die trigonometrische Tangente des Aufhängewinkels α ist gleich dem 4fachen reciproken Werthe jener Verhältnisszahl n.

Hiernach ist insbesondere

für $n = 12$, $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 18^0\ 26'$
„ $n = 13$, $tg\,\alpha = \frac{4}{13}$ „ $\alpha = 17^0\ 6'$
„ $n = 14$, $tg\,\alpha = \frac{2}{7}$ „ $\alpha = 15^0\ 57'$
„ $n = 15$, $tg\,\alpha = \frac{4}{15}$ „ $\alpha = 14^0\ 56'$
„ $n = 16$, $tg\,\alpha = \frac{1}{4}$ „ $\alpha = 14^0\ 2'$
„ $n = 17$, $tg\,\alpha = \frac{4}{17}$ „ $\alpha = 13^0\ 14'$
„ $n = 18$, $tg\,\alpha = \frac{2}{9}$ „ $\alpha = 12^0\ 32'$ *).

*) Man bemerkt nicht ohne Interesse, dass, während n von 12 bis 18 steigt, der Winkel α (beiläufig genommen) von 18° bis 12° sich vermindert,

Um sogleich auf die Berechnung der Bogenlänge überzugehen, benütze man nach den Lehren der analytischen Geometrie für das Bogenelement ds die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}},$$

und beachte, dass nach der Gleichung (609)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2fy}{h} = \frac{4y}{nh},$$

somit

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2}$$

zu setzen ist. Das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen ist in den vorkommenden Fällen viel kleiner als die Einheit, man kann daher die Wurzelgrösse in eine convergirende Reihe auflösen, und hiernach die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dy} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2 \left(\frac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{4}{n}\right)^4 \left(\frac{y}{h}\right)^4 + \tfrac{1}{16}\left(\frac{4}{n}\right)^6 \left(\frac{y}{h}\right)^6 - \ldots.$$

benützen, woraus man durch Integration zwischen den Gränzen 0 und y

$$s = y\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\frac{4}{n}\right)^4\left(\frac{y}{h}\right)^4 + \tfrac{1}{112}\left(\frac{4}{n}\right)^6\left(\frac{y}{h}\right)^6 - \ldots\right] \quad (611)$$

findet.

Zur Bestimmung der Bogenlänge $\widehat{AO} = \widehat{BO} = l$ substituire man in dieser Relation $y = h$ und $s = l$. Dadurch erhält man

$$l = h\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\frac{4}{n}\right)^4 + \tfrac{1}{112}\left(\frac{4}{n}\right)^6 - \ldots\right] \quad . \quad . \quad (612).$$

---

wornach die Summe $(n + \alpha)$, wenn α in Gradmass verstanden ist, immer beinahe 30 wird, was zu wissen zuweilen nützlich sein kann. So z. B. springt die Unrichtigkeit sogleich in die Augen, wenn man in der deutschen Uebersetzung des Navier'schen Werkes über Kettenbrücken (übersetzt von J. G. Kutschera 1829) für das dort besprochene Project einer Kettenbrücke (Seite 194) den Winkel $\alpha = 10^\circ 28' 9''$ angegeben findet, während die Dimensionen h und f mit 75 und 10 Metern angenommen sind, so dass obige Verhältnisszahl $n = 15$ zu setzen, und hiernach augenblicklich zu erkennen ist, dass jener Winkel α nur wenige Minuten von 15 Graden abweichen kann.

So z. B. ist

für $n = 12$, $l = 1{\cdot}01822 \, . \, h$
„ $n = 13$, $l = 1{\cdot}01556 \, . \, h$
„ $n = 14$, $l = 1{\cdot}01344 \, . \, h$
„ $n = 15$, $l = 1{\cdot}01172 \, . \, h$
„ $n = 16$, $l = 1{\cdot}01032 \, . \, h$
„ $n = 17$, $l = 1{\cdot}00915 \, . \, h$
„ $n = 18$, $l = 1{\cdot}00817 \, . \, h$

wornach also in den practisch vorkommenden Verhältnissen l und h nur wenig von einander abweichen.

Die Reihe (612) ist umzukehren, wenn man die Pfeilhöhe f aus der Spannweite $2h$ und aus der Kettenlänge $\widehat{AOB} = 2l$ zu bestimmen hat. In diesem Falle erhält man nach gehöriger Reduction

$$\left(\frac{4}{n}\right)^2 = \left(\frac{2f}{h}\right)^2 = 6\left[\left(\frac{l-h}{h}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{l-h}{h}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{l-h}{h}\right)^3 + \ldots\right] \quad (613)$$

Kann man sich, wie in vielen Fällen der Praxis, schon mit den beiden ersten Gliedern der Reihe (612) begnügen, so hat man

$$l = h\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2\right] = h\left[1 + \frac{8}{3n^2}\right] = h\left[1 + \frac{2f^2}{3h^2}\right] = h + \frac{2}{3}\frac{f^2}{h},$$

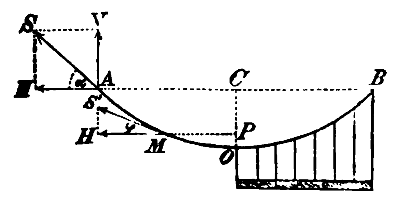
daher mit demselben Grade der Annäherung auch

$$n = 4\sqrt{\frac{h}{6(l-h)}} \text{ und } f = \sqrt{\tfrac{3}{2} h \cdot (l-h)}.$$

§. 297.

Spannungen in der parabolischen Kettenlinie. (Fig. 348.) Es sei die ganze von der Kette zu tragende Belastung,

Fig. 348.



welche sich gleichmässig nach horizontaler Richtung vertheilt $= P$, die Tangentialspannung in dem Aufhängepuncte A . . . . . $= S$,

ihre horizontale Componente . . . . $= H$,
ihre verticale Componente aber . . . . $= V$,
und man behalte die Bezeichnungen des vorigen §., so wie die Vorstellung bei, dass in $\widehat{AOB}$ alle Ketten vereinigt seien.

Sowohl der Aufhängepunct, als auch die halbe Kette $\widehat{AO}$ haben die Hälfte des Gewichtes P zu tragen, es ist daher nach den Gleichungen (605) und (606) $V = \frac{1}{2}P = H\,tg\,\alpha$, woraus

$$H = \frac{P}{2\,tg\,\alpha} = \frac{n}{8}P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (614)$$

folgt, wenn unter Einem für $tg\,\alpha$ der Werth (610) substituirt wird.

Die Horizontalkraft H ist daher gleich dem Totalgewichte P, multiplicirt mit dem achten Theile des Verhältnisses n, welches zwischen der Spannweite, und der Pfeilhöhe stattfindet. Innerhalb der gewöhnlichen practischen Gränzen für Kettenbrücken ($n = 12$ bis 18) wird demnach H von $1\frac{1}{2}P$ bis $2\frac{1}{4}P$ variiren.

Was die Tangentialkraft S betrifft, so ist dieselbe

$$S = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{P}{2\sin\alpha} = \sqrt{H^2 + \tfrac{1}{4}P^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}P\sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}} \quad . \quad . \quad (615).$$

So z. B. wird

für $n = 12$, $S = 1{\cdot}5811\,P$
„ $n = 16$, $S = 2{\cdot}0616\,P$
„ $n = 18$, $S = 2{\cdot}3049\,P$.

Da in der Formel $S = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}}$ das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen in der Regel gegen die Einheit klein ist, so kann man sich in den meisten Fällen auch eines genäherten Werthes für S bedienen, und diesen erhalten, wenn man die Wurzelgrösse in eine convergirende Reihe auflöset. Es ist nämlich

$$S = H\sqrt{1 + \frac{16}{n^2}} = H\left(1 + \frac{16}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = H\left(1 + \frac{8}{n^2} - \frac{32}{n^4} + \frac{256}{n^6} - \ldots\right)$$

somit, wenn man nur die beiden ersten Glieder in den Klammern beibehält, annäherungsweise

$$S = H\left(1+\frac{8}{n^2}\right) = \frac{Pn}{8}\left(1+\frac{8}{n^2}\right) = \frac{Pn}{8}+\frac{P}{n} = H+\frac{P}{n},$$

so wie

$$(S-H) = \frac{P}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (616).$$

Es ist also die Differenz zwischen dem Tangentialzuge am Aufhängepuncte und seiner horizontalen Componenten sehr nahe dem n^{ten} Theile der Gesammtbelastung P gleich.

So z. B. hat man für $n = 18$ zuerst

$$H = \frac{n}{8}P = 2{\cdot}25\,P, \text{ sodann aber}$$

$$S = H + \frac{1}{n}P = 2{\cdot}25\,P + \tfrac{1}{18}P = 2{\cdot}3055\,P,$$

welcher Werth sich von dem der Relation (615) entsprechenden in der That nicht wesentlich unterscheidet. Die Formel (616) ist insbesondere wegen ihrer Einfachheit zum practischen Gebrauche geeignet.

Der Tangentialzug S' an einer anderen Stelle M der Curve, für welche die Coordinaten $\overline{OP} = x$ und $\overline{MP} = y$ sind, ist, wie bereits bekannt, kleiner, als die Tangentialspannung S an dem Aufhängepuncte A. In der That hat man wegen der Gleichheit der horizontalen Componenten jener Tangentialspannungen in A und M

$$S = \frac{H}{\cos\alpha},\quad S' = \frac{H}{\cos\varphi},\quad S' : S = \frac{1}{\cos\varphi} : \frac{1}{\cos\alpha},$$

sonach

$$S' = \frac{S\cos\alpha}{\cos\varphi}.$$

Es ist aber

$$tg\,\varphi = \frac{dx}{dy} = \frac{2fy}{h^2} = \frac{4y}{nh},$$

folglich

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+tg^2\varphi} = \sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2},$$

und

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}},$$

daher

$$S' = H\sqrt{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2} = S\sqrt{\frac{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{n}\right)^2}} \quad . \quad (617),$$

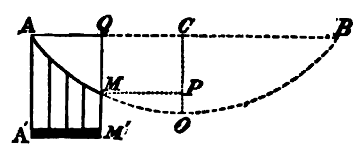
also für $y < h$ auch $S' < S$.

Aus der Relation (617) erhält man übrigens ganz ordnungsmässig für $y = o$, d. i. am Scheitel O, $S' = H$, und für $y = h$, d. i. am Aufhängepuncte A, $S' = S$.

§. 298.

Von einem Stücke der parabolischen Kettenlinie aus gewissen Daten auf die Lage ihres Scheitels zu schliessen. Es sei (Fig. 349) der eine Aufhängepunct der parabolischen Kettenlinie in . . . . A, und für den Endpunct des gegebenen Stückes $\widehat{AM}$ . . $\overline{AQ} = c$ u. $\overline{MQ} = d$, es sei ferner der Verticaldruck

Fig. 349.



in A . . . . $= V$,
und der auf die Längeneinheit der Spannweite entfallende Belastungsantheil . . . . $= p$.
Man suche jetzt aus diesen Daten die Lage des Scheitels O der Kettenlinie, nämlich die unbekannten Grössen $\overline{AC} = h$ und $\overline{CO} = f$.

Das Gewicht, welches zu der halben Kette $\widehat{AO}$ gehört, ist offenbar ph, und dem verticalen Drucke V gleich. Aus der hiernach gebildeten Gleichung folgt zunächst

$$h = \frac{V}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (618),$$

d. h. **die halbe Spannweite ist gleich dem verticalen Drucke an dem Aufhängepuncte, dividirt durch die Belastung per Längeneinheit der Spannweite.**

Die Pfeilhöhe $\overline{CO} = f$ findet man jetzt in Berücksichtigung der Relation (609) aus der Gleichung

$$\left(\frac{\overline{MP}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}},$$

welche wegen $\overline{AC}=h$, $\overline{MP}=(h-c)$, $\overline{OC}=f$ und $\overline{OP}=(f-d)$ übergeht in:

$$\left(\frac{h-c}{h}\right)^2=\left(\frac{f-d}{f}\right), \text{ oder in } \left(1-\frac{c}{h}\right)^2=\left(1-\frac{d}{f}\right),$$

woraus folgt

$$f=\frac{dh^2}{(2ch-c^2)}=\frac{d}{(2v-v^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (619),$$

wenn der Kürze wegen das bereits bekannte Verhältniss $\frac{c}{h}=v$ gegesetzt wird.

Von diesen Formeln kann man erforderlichen Falles Gebrauch machen, wie man diess aus dem §. 301 ersehen wird.

§. 299.

Wirkung einer zufälligen Belastung bei Kettenbrücken auf die Form der Ketten und auf die Spannungen in denselben. Man hat gesehen, dass bei Kettenbrücken die von den Ketten gebildeten Curven als parabolisch gelten können, wenn auf der Brückenbahn keine zufällige Belastung vorhanden ist. Unter dieser Voraussetzung ist man nach den §§. 296 und 297 im Stande, die Form der Ketten, so wie auch die in denselben entstehenden Spannungen zu bestimmen, indem nämlich die Belastung P im §. 297 das ganze eigene Gewicht der Brücke zwischen den Aufhängepuncten A und B vorstellt. Es entsteht nunmehr die Frage, welche Veränderungen in der Form und in der Anspruchsnahme der Ketten durch eine zufällige Belastung hervorgebracht werden. Zu ihrer Beantwortung hat man offenbar auf die verschiedene Art und Weise, in welcher sich die zufällige Belastung über die Brückenbahn vertheilen kann, Rücksicht zu nehmen. Man wird in dieser Beziehung die wesentlichsten Fälle untersuchen.

§. 300.

Gleichförmig vertheilte Belastung nach der ganzen Bahnlänge. Bei dem Stattfinden einer solchen Belastung kann nach Inhalt des §. 295 die parabolische Kettenlinie für die unbelastete Brücke unverändert beibehalten werden, wenn man von der Dehnbarkeit der Ketten absieht, so dass man sodann die Grössen h, f, n, α und l als constant zu betrachten, und nur die Ver-

grösserung der Kettenspannungen zu bestimmen hat. Es leuchtet ein, dass diese letzteren genau so, wie die von den Ketten zu tragende Belastung zunehmen müssen. Stellt man sich nämlich sämmtliche Ketten vereinigt vor, und heisst man das eigene Brückengewicht P, die an jedem der beiden Aufhängepuncte entstehende Tangentialspannung . . . . S,
ferner deren horizontale Componente . . . . H,
und bezeichnet man die zufällige Belastung mit . . . . . ΔP,
so wie die dadurch in den Kräften S und H hervorgerufene Vergrösserung beziehungsweise mit . . . . ΔS und ΔH,
so ist unter den oben angenommenen Umständen nach den Relationen (614) und (615)

$$H = \frac{n}{8} P \quad \text{und} \quad S = \frac{P}{2 \sin \alpha},$$

daher auch

$$\Delta H = \frac{n}{8} \Delta P \text{ und } \Delta S = \frac{\Delta P}{2 \sin \alpha},$$

und durch Vergleichung

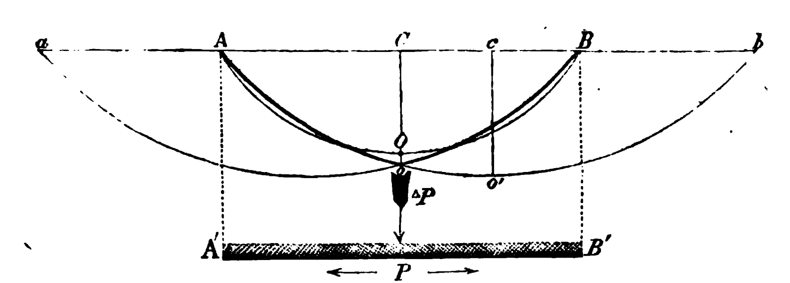
$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta P}{P} \quad \ldots \ldots \quad (620).$$

Da die grösste Veränderung in den Kettenspannungen mit der **grössten zufälligen** Belastung correspondirt, so ist der Fall des Eintrittes dieser letzteren in der betrachteten Hinsicht als der **ungünstigste** anzusehen. Es wird allgemein angenommen, dass bei gewöhnlichen Strassenbrücken durch Menschengedränge die grösste zufällige Belastung auf der Brückenbahn entsteht, und dass in diesem ungünstigsten Falle 25 bis 30 Zentner auf die □° Bahnfläche als zufällige Belastung zu rechnen sind. (Siehe §. 263.) Man wird in der Folge sehen, dass das eigene Gewicht der Brücke in der Regel viel geringer ist, als die grösste zufällige Belastung, und dass diese von jenem nur bei sehr grossen Brückenspannweiten erreicht werden kann. Es wird daher mit Rücksicht auf die grösste zufällige Belastung in der Regel $\Delta P > P$, daher auch $\Delta H > H$ und $\Delta S > S$ sein, woraus auf die bedeutende Vermehrung in den Kettenspannungen zu schliessen ist, welche möglicher Weise stattfinden kann.

§. 301.

Zufällige Belastung in der Mitte der Bahn (Fig. 350). Wenn in der Mitte der Brückenbahn eine zufällige Belastung sich

Fig. 350.



concentrirt, welche also gleichsam den Angriffspunct im Kettenscheitel hat, so wird sich letzterer senken und dadurch die ganze Form der Kettenlinie verändern. Um diese Veränderung kennen zu lernen, sei

$\overset{\frown}{AOB}$ die parabolische Kettenlinie mit Rücksicht auf das eigene Brückengewicht, welches

P genannt, und in seiner Projection auf den Horizont $\overline{A'B'}$ als gleichförmig nach der Längenrichtung der Bahn vertheilt angenommen wird, so dass der Gewichtsantheil

$p = \frac{P}{2h}$ auf die Längeneinheit der Spannweite entfalle, und

$\frac{P}{2}$ den verticalen Druck V an dem Aufhängepuncte A bezeichnet; es sei ferner

ΔP die zufällige Belastung in der Mitte der Brückenbahn, so dass

$\left(\frac{P + \Delta P}{2}\right)$ den hiernach veränderten verticalen Druck $V' = (V + \Delta V)$ an dem Aufhängepuncte A, und

$\overset{\frown}{AoB}$ die veränderte Form der Kettenlinie und zwar unter der Voraussetzung vorstellt, wenn die Brückenbahn gar keine Steifigkeit besitzen würde, sondern einer jeden Veränderung in der Kettenform vollkommen nachgeben könnte.

Es ist leicht einzusehen, dass unter dieser Voraussetzung die Curvenstücke $\widehat{Ao}$ und $\widehat{Bo}$ gleichfalls parabolisch geformt sein, jedoch dem §. 294 ad 6 zufolge in o eine Ecke bilden werden, welche als der Durchschnitt der zwei symmetrischen Parabeln $\widehat{Aob}$ und $\widehat{Boa}$ anzusehen ist. Behält man die früheren Bezeichnungen $\overline{AC} = h$ und $\overline{CO} = f$ bei, und setzt mit Rücksicht auf den Scheitel o' der neuen Parabel die analogen Grössen $\overline{Ac} = h' = (h + \Delta h)$ und $\overline{co'} = f' = (f + \Delta f)$, so erhält man Folgendes:

1. In Gemässheit der Gleichung (618) ist

$$h = \frac{V}{p} = \frac{P}{2p} \text{ und } h' = (h + \Delta h) = \frac{V'}{p} = \frac{(P + \Delta P)}{2p},$$

also auch

$$\left.\begin{array}{rl} \Delta h = & \dfrac{\Delta P}{2p} \\ \text{und } \dfrac{\Delta h}{h} = & \dfrac{\Delta P}{P} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (621).$$

Da die zufällige Belastung ΔP, welche sich in der Mitte der Brücke concentriren kann, in der Regel gegen das ganze Brückengewicht P nicht gross ist, so wird $\frac{\Delta h}{h}$ zumeist ein ziemlich kleiner Bruch sein. Sei z. B. die halbe Spannweite $h = 30$ Klftr., das eigene Brückengewicht per Current-Klafter Bahn $p = 100$ Ztr., und die zufällige Belastung $\Delta P = 200$ Ztr., so findet man $P = 2ph = 6000$ Ztr., $\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{30}$ und $\Delta h = 1$ Klftr.

Die Veränderung Δh hängt, wie man bemerkt, bloss von p und ΔP ab, und wird desto geringer, je grösser unter sonst gleichen Umständen das eigene Brückengewicht ist. Da übrigens die Brückenbahn nicht, wie vorausgesetzt wurde, vollkommen nachgiebig sein, sondern jedenfalls eine gewisse Steifigkeit besitzen wird, so ist der nach den Formeln (621) berechnete Werth von Δh eigentlich nur als ein Gränzwerth zu betrachten, der niemals erreicht werden kann.

2. In Gemässheit der Gleichung (619) hat man

$$\overline{co'} = f' = \frac{\overline{Co}}{(2v - v^2)}, \text{ wenn } v = \frac{\overline{AC}}{\overline{Ac}} = \frac{h}{h'}, \text{ gesetzt wird.}$$

Es ist aber

$$\frac{h}{h'} = \frac{h}{(h + \Delta h)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)},$$

sonach

$$(2v - v^2) = v\,(2 - v) = \left\{\frac{1 + 2\left(\frac{\Delta h}{h}\right)}{1 + 2\left(\frac{\Delta h}{h}\right) + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}\right\}.$$

Nach der Bemerkung ad 1 ist $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta P}{P}$ in der Regel ein so kleiner Bruch, dass $\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2$ dagegen vernachlässigt, daher $(2v - v^2)$ mit der Einheit verwechselt, und sofort $f' = \overline{Co}$ gesetzt werden darf. Desshalb kann man sich erlauben, $\overline{co'} = \overline{Co} = f'$, $\overline{Oo} = \Delta f$ und $\widehat{oo'} = \overline{Cc} = \Delta h$, also die Senkung $\overline{Oo}$ des Kettenscheitels O eben so gross, wie die Differenz (Δf), welche zwischen den beiden Pfeilhöhen $\overline{co'}$ und $\overline{CO}$ stattfindet, anzunehmen, so dass man aus der Bestimmung von Δf unmittelbar auf die Senkung des Kettenscheitels schliessen wird. Um nun den Werth von Δf selbst aufzufinden, lasse man noch die angenäherte Gleichung für die Bogenlänge nach dem §. 296 gelten. In diesem Falle wird

$$\widehat{AO} = h + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{h} \text{ und } \widehat{Ao'} = h' + \tfrac{2}{3}\frac{f'^2}{h'}, \text{ ferner}$$

$$\widehat{Ao'} - \widehat{AO} = \widehat{oo'} = \Delta h = (h' - h) + \tfrac{2}{3}\left(\frac{f'^2}{h'} - \frac{f^2}{h}\right),$$

und hieraus wegen $(h' - h) = \Delta h$ zunächst

$$\frac{f'^2}{h'} = \frac{f^2}{h},$$

ferner

$$f' = f\sqrt{\frac{h'}{h}} = f\sqrt{1 + \frac{\Delta h}{h}} = f\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta h}{h}\right) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + ..\right].$$

Substituirt man statt $\frac{\Delta h}{h}$ den Werth $\frac{\Delta P}{P}$ aus den Gleichungen (621), und vernachlässiget die höheren Potenzen von $\frac{\Delta P}{P}$ in der Voraussetzung ihrer Kleinheit, so erhält man

$$f' = f\left(1 + \frac{\Delta P}{2P}\right) = f + \frac{f}{2}\left(\frac{\Delta P}{P}\right),$$

daraus aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{P} \\ \text{und } \Delta f &= \frac{f}{4ph}\Delta P = \frac{\Delta P}{2pn} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (622),$$

wenn noch das im §. 296 eingeführte Verhältniss $n = \frac{2h}{f}$ berücksichtigt wird.

Ex. Für $h = 30^0$, $f = 4^0$, $p = 100$ Ztr. und $\Delta P = 200$ Ztr., erhält man wegen $n = 15$ und $P = 6000$ Ztr.,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{60} \text{ und } \Delta f = \overline{Oo} = \frac{1}{15} \text{ Klftr.} = 4{\cdot}8 \text{ Zoll.}$$

Aus den Gleichungen (622) schliesst man rücksichtlich der Senkung des Kettenscheitels O, welche durch eine zufällige Belastung in der Mitte der Brückenbahn angestrebt wird, dass das Verhältniss dieser Senkung zur ganzen Pfeilhöhe nur von jenem Verhältnisse abhängig ist, welches zwischen der zufälligen Belastung und dem ganzen Brückengewichte stattfindet. Was die eigentliche Grösse dieser Kettensenkung anbelangt, so hängt dieselbe augenscheinlich nicht von der Grösse der Brücke, sondern nur von p und n ab. Bei zwei Brücken von verschiedenen Spannweiten, welche jedoch ähnlich geformte Ketten besitzen, und bei welchen überdiess das von ihnen getragene Gewicht per Current-Klafter Spannweite dasselbe ist, würde daher durch den Eintritt einer und derselben zufälligen Belastung in der Mitte der Brücke auch ein und dieselbe Senkung des Kettenscheitels entstehen, wenn die Brückenbahn in beiden Fällen vollkommen nachgeben könnte, und wenn man nur die Veränderung in den Gleichgewichtscurven ohne Rücksicht auf die Kettenausdehnung, welche durch die vermehrte Spannung entsteht, betrachtet. Gewöhnlich sind grosse Kettenbrücken massiver als kleine construirt, somit die Werthe von p bei diesen kleiner, als bei jenen, es wird daher in der Regel die Senkung des Kettenscheitels in dem vorigen Sinne unter sonst gleichen Umständen bei grossen Kettenbrücken sogar geringer, als bei kleinen anzunehmen sein. Dieses Resultat ist insoferne merkwürdig, als es lehrt, dass man bei Kettenbrücken

mit der Zunahme der Spannweite keineswegs auch eine Zunahme der Veränderung der Kettenform in Folge einer zufälligen Belastung zu besorgen hat.

Bei der Aufstellung der Gleichungen (622) ging man zwar von der Voraussetzung aus, dass die Ketten vollkommen beweglich, und die Brückenbahn der beabsichtigten Veränderung der Kettenform vollkommen nachgeben könne. In der Wirklichkeit ist diese Voraussetzung, jedoch zu Gunsten der Stabilität der Construction nicht vorhanden, es wird daher die nach den Formeln (622) berechnete Senkung des Kettenscheitels eigentlich nur als eine Gränze anzusehen sein, deren Erreichung bloss angestrebt wird. Uebrigens ist Δf nur diejenige Senkung, die von dem Unterschiede der verglichenen Gleichgewichtscurven herrührt. Eine andere Senkung wird noch aus dem Grunde stattfinden, weil durch die in Folge der zufälligen Belastung entstehende grössere Spannung in den Ketten diese letzteren etwas ausgedehnt werden.

Gleichwohl führen diese Bemerkungen zu dem Schlusse, dass bei einer Kettenbrücke die Kettenform desto weniger sich verändern wird, je flächer die Kettencurve, dann je schwerer und steifer die Brückenbahn construirt ist, endlich je kürzer die Hängestangen insbesondere in der Nähe des Kettenscheitels sind, um nämlich das Ausweichen des Kettenscheitels auch nach horizontaler Richtung möglichst zu beschränken.

3. Nachdem in der Fig. 349 die halbe Spannweite

$$\overline{Ac} = h' = (h + \Delta h)$$

und die Pfeilhöhe $\overline{co'} = f' = (f + \Delta f)$ der veränderten Kettencurve $\overset{\frown}{Ao'b}$ bekannt ist, so kann man auch die Veränderung von $n = \frac{2h}{f}$ bestimmen. Sei diese Veränderung Δn, so hat man in der Ueberzeugung, dass es sich überhaupt nur um geringe Differenzen handeln wird, und desshalb bei der Entwicklung derselben die Regeln der Differentialrechnung mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden können,

$$\Delta n = 2\Delta\frac{h}{f} = 2\left(\frac{f\Delta h - h\Delta f}{f^2}\right) = \frac{2h}{f}\left(\frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta f}{f}\right) = \frac{n}{2}\frac{\Delta P}{P},$$

und hieraus

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\frac{\Delta P}{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (623).$$

4. Auf ähnliche Weise findet man die Veränderung ΔH, welche in der horizontalen Kettenspannung H durch die zufällige Belastung ΔP hervorgebracht wird. Es ist nämlich nach der Formel (614) $H = \frac{1}{8} n P$, daher annäherungsweise

$$\Delta H = \tfrac{1}{8}(n \Delta P + P \Delta n) = \frac{Pn}{8}\left(\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta n}{n}\right) = \tfrac{3}{2} H \frac{\Delta P}{P},$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta H}{H} &= \tfrac{3}{2}\frac{\Delta P}{P} \\ \text{so wie } \Delta H &= \frac{3n}{16}\Delta P \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (624).$$

Endlich ist nach der genäherten Gleichung (616) $S = \left(H + \frac{1}{n} P\right)$, daher die Differenz ΔS in der Tangentialspannung S, welche die zufällige Belastung ΔP hervorzubringen strebt,

$$\Delta S = \Delta H + \Delta \frac{P}{n} = \Delta H + \frac{n \Delta P - P \Delta n}{n^2} = \Delta H + \frac{P}{n}\left(\frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta n}{n}\right)$$

$$= \Delta H + \frac{P}{n} \cdot \frac{\Delta P}{2P} = \frac{3n}{16}\Delta P + \frac{1}{2n}\Delta P = \frac{3n}{16}\Delta P\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right)$$

$$= \Delta H\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right),$$

woraus sich das Verhältniss

$$\Delta S : \Delta H = \left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) : 1 = l : h \quad \ldots\ldots\ldots \quad (625)$$

ergibt, wenn man nach dem §. 296 die angenäherte Relation

$$\widehat{AO} = l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right)$$

einführt.

Lässt man in Uebereinstimmung mit den practischen Verhältnissen die Zahl n von 12 bis 18 variiren, so sieht man, dass die Aenderung ΔH des Horizontalzuges H zwischen $2\frac{1}{2}\Delta P$ und $3\frac{3}{4}\Delta P$ sich bewegen, also im Verhältnisse zu dem ursprünglichen Horizontalzuge gewöhnlich nicht bedeutend sein wird, da die zufällige Belastung ΔP, welche in der Mitte der Brückenbahn stattfinden kann, im Vergleiche zu dem ganzen Brückengewichte, wenigstens bei nicht zu kleinen Brücken, ebenfalls nicht gross sein wird. Ist z. B. wie ad 1 und 2, $P = 6000$ Ztr., $\Delta P = 200$ Ztr. und $n = 15$, so erhält man $\Delta H = \frac{1}{20} H = 562\frac{1}{2}$ Ztr.

So gross wäre übrigens diese Veränderung nur in dem Falle anzunehmen, wenn die Brückenbahn vollkommen nachgeben könnte. Da nun dieselbe jedenfalls eine gewisse Steifigkeit besitzen wird, so wird natürlicher Weise die obige Veränderung $\frac{\Delta H}{H} = \frac{3 \Delta P}{2 P}$ nur angestrebt werden, ohne dass sie in der Wirklichkeit diese Höhe erreichen kann. Wäre die Brückenbahn vollkommen steif, und könnte sich desshalb die Kettenform in Folge einer zufälligen Belastung gar nicht verändern, so dass also auch von der Ausdehnung der Ketten aus Anlass ihrer vermehrten Spannung abgesehen würde, so dürfte offenbar wegen $H = \frac{n}{8} P$ und wegen des constant bleibenden Verhältnisses n die Vermehrung in der Horizontalspannung nicht höher, als

$$\Delta H = \frac{n}{8} \Delta P, \text{ oder } \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta P}{P}$$

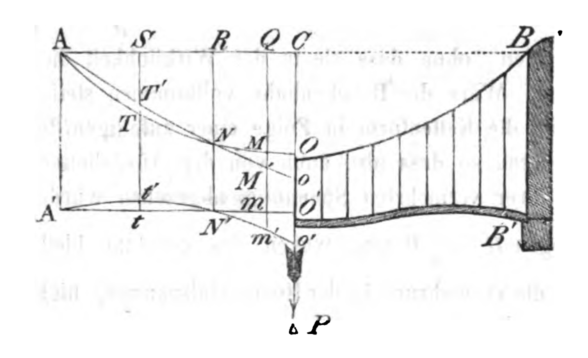
angenommen werden, wornach man in diesem Falle unter Zugrundelegung der obigen speciellen Daten $\frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{80}$ und $\Delta H = 375$ Ztr. erhalten würde. Allein auch diese Annahme der vollkommenen Steifigkeit der Brückenbahn entspricht der Wirklichkeit nicht, und desshalb wird der letztgefundenene Werth für ΔH ebenfalls nur als eine Gränze anzusehen sein, die nicht erreicht werden kann. Auf diese Weise hat man zwei Gränzen kennen gelernt, zwischen welchen ohne Zweifel das wahre Resultat liegen muss, und es kann nunmehr behauptet werden, dass die wirkliche Veränderung $\frac{\Delta H}{H}$ zwischen die Gränzwerthe $\frac{\Delta P}{P}$ und $\frac{3}{2} \frac{\Delta P}{P}$ fallen, und nach Umständen sich bald diesem, bald jenem Werthe annähern werde, je nachdem die Brückenbahn eine geringere oder grössere Steifigkeit besitzt.

Jedenfalls aber muss ΔH mit n zunehmen, also ein und dieselbe zufällige Belastung ΔP in der Mitte der Brücke die Kettenspannungen desto mehr vergrössern, je flächer die Kettenform ist.

Anmerkung. Die Resultate der vorstehenden Untersuchung eignen sich zur Vorstellung über die Form der krummen Fläche, welche die Brückenbahn in Folge der zufälligen Belastung ΔP annimmt. Es sei nämlich

(Fig. 351) $\overset{\frown}{AO}$ die ursprüngliche, $\overset{\frown}{Ao}$ aber die durch die zufällige Belastung ΔP veränderte Kettencurve, wenn die Brückenbahn keine Steifigkeit hätte,

Fig. 351.



sondern vollkommen nachgiebig wäre. Sodann hätte man die Veränderung der ursprünglichen geraden Bahnrichtung $\overline{A'O'}$ mittelst der krummen Linie $\overset{\frown}{A'o'}$ anschaulich zu machen, und hierbei $\overline{Oo} = \overline{O'o'} = \Delta f$, ferner für einen beliebigen Punct (M) $\overline{MM'} = \overline{mm'}$ zu setzen, wenn die verticalen Abstände zwischen der Kettencurve und der Brückenbahn unverändert bleiben sollen. Um unter diesen Voraussetzungen die Curve für die Brückenbahn $\overset{\frown}{Ao'}$ zu bestimmen, behalte man die obigen Bezeichnungen bei, und setze noch für den gewählten Punct M die ursprünglichen Coordinaten $\overline{AQ} = u$ und $\overline{QM} = v$, ferner seine Ortsveränderung $\overline{MM'} = \Delta v$.

Vor Allem ist die Gleichung der ursprünglichen Parabel $\overset{\frown}{AO}$

$$\left(\frac{h-u}{h}\right)^2 = \left(\frac{f-v}{f}\right) \text{ oder } \frac{v}{f} = \frac{2u}{h} - \frac{u^2}{h^2},$$

also auch die Gleichung der veränderten Kettenlinie $\overset{\frown}{Ao}$

$$\frac{v + \Delta v}{f'} = \frac{2u}{h + \Delta h} - \frac{u^2}{(h + \Delta h)^2},$$

indem zu den Puncten M und M' dieselbe Abscisse u gehört. Hiernach hat man

$$\frac{v}{f}\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)\left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right)^{-1} = \frac{2u}{h}\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^{-1} - \frac{u^2}{h^2}\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^{-2},$$

$$\frac{v}{f}\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)\left(1 + \frac{\Delta P}{2P}\right)^{-1} = \frac{2u}{h}\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right)^{\;1} - \frac{u^2}{h^2}\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right)^{-2},$$

daher annähernd, wenn die Brüche $\frac{\Delta v}{v}$ und $\frac{\Delta P}{P}$ sehr klein sind,

$$\frac{v}{f}\left(1+\frac{\Delta v}{v}-\frac{\Delta P}{2P}\right)=\frac{2u}{h}\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)-\frac{u^2}{h^2}\left(1-\frac{2\Delta P}{P}\right).$$

Wird von diesem Ausdrucke die ursprüngliche Curvengleichung zwischen $\frac{v}{f}$ und $\frac{u}{h}$ abgezogen, so findet man aus der Differenz

$$\frac{\Delta v}{f}=\frac{\Delta P}{2P}\left(\frac{v}{f}-\frac{4u}{h}+\frac{4u^2}{h^2}\right)=\frac{\Delta P}{2P}\left(-\frac{2u}{h}+\frac{3u^2}{h^2}\right)=\frac{\Delta f}{f}\left(\frac{3u^2}{h^2}-\frac{2u}{h}\right),$$

und hieraus die Gleichung der fraglichen Curve $\widehat{A'o'}$

$$\frac{\Delta v}{\Delta f}=\frac{u}{h}\left(\frac{3u}{h}-2\right) \quad \ldots\ldots \quad (626),$$

wenn dabei für den Curvenpunct m' die Coordinaten $\overline{A'm}=u$ und $\overline{mm'}=\Delta v$ gesetzt, und auf den Ursprung A' bezogen werden.

Diese Gleichung ist in Bezug auf Δv vom zweiten Grade, sie repräsentirt somit eine gemeine Parabel, deren Axe durch den Scheitel t' vertical geht. Die Lage dieses Scheitels bestimmt sich aus den Relationen

$$\overline{A't}=\tfrac{1}{3}\overline{A'O'}=\tfrac{1}{3}h \text{ und } \overline{tt'}=-\tfrac{1}{3}\Delta f=-\tfrac{1}{3}\overline{O'o'},$$

wesshalb derselbe oberhalb der ursprünglichen Bahnfläche liegt.

Der Durchschnittspunct N' von den verglichenen Bahnlinien zeigt diejenige Stelle an, welche durch die zufällige Last weder gehoben, noch gesenkt würde, und die Lage dieses Punctes findet man aus der Gleichung (626) für $\Delta v=o$, wornach

$$u=\overline{A'N'}=\tfrac{2}{3}h=\tfrac{1}{3}AB$$

wird, so dass die Ordinaten Δv zwischen A' und N' negativ, d. i. nach aufwärts gekehrt, hingegen zwischen N' und o' positiv, d. i. nach abwärts gekehrt sind.

Unter den angenommenen Umständen würde daher in Folge der zufälligen Belastung das mittlere Längendrittel der Bahn gesenkt, die beiden anderen Drittel aber gehoben werden. Zwar sind jene Umstände imaginär, gleichwohl wird das gefundene Resultat auch in der Wirklichkeit, wo die Brückenbahn eine gewisse Steifigkeit besitzt, nicht weit von der Wahrheit sich entfernen können. Nur die Form der gebogenen Brückenbahn wird eine ganz andere als die parabolische sein, ungefähr eine solche, wie die Zeichnung auf der rechten Seite der Fig. 350 anzeigt, vorausgesetzt, dass das Ende B' gezwungen wird, seine Lage beizubehalten, weil sonst ein Verbiegen der daselbst befindlichen Hängstangen durch den nach aufwärts stattfindenden Druck, und hiernach eine Hebung des Brückenbahnendpunctes über das eigentliche Niveau zu besorgen wäre, was sowohl aus technischen, als auch aus Communicationsrücksichten nicht zugelassen werden soll.

§. 302.

Ungünstigste Belastungsweise der Kettenbrücken. Es wird allgemein angenommen, dass die ungünstigste Belastungsweise bei Kettenbrücken diejenige ist, wenn die grösste zufällige Belastung nach der ganzen Brückenlänge sich gleichmässig vertheilt, insoferne nämlich in der Praxis die grösste Kettenspannung zu berücksichtigen ist. In der That berechtigen die Resultate der beiden vorhergehenden §§. mit Rücksicht auf die gewöhnlichen practischen Verhältnisse zu dieser Annahme. Betreffend die Grösse der zufälligen Belastung selbst, welche per □° benützbarer Bahnfläche als Maximum anzunehmen kömmt, so hat man schon im §. 263 gesehen, dass dieselbe mit Rücksicht auf die Möglichkeit des Entstehens vom Menschengedränge mit 25 bis 30 Ztr. bemessen werden muss.

§. 303.

Berechnung des Querschnittes für die Tragketten. Behufs dieser Berechnung nenne man

G_1 das Gewicht der Tragketten,

G_2 jenes der Brückenbahn sammt den Hängstäben,

G_3 die auf der Brücke stattfindende zufällige Belastung, und

$G = (G_1 + G_2 + G_3)$ das totale Brückengewicht (in Wiener Zentnern); ferner

F die bei dem Verkehre benützte Bahnfläche (in Wiener □ Klftrn.),

$g_1 = \frac{G_1}{F}$, $g_2 = \frac{G_2}{F}$, $g_3 = \frac{G_3}{F}$ und $g = (g_1 + g_2 + g_3) = \frac{G}{F}$ die per Quadratklafter dieser Bahnfläche durchschnittlich entfallenden Antheile der obigen Gewichte,

$L = 2l$ die nach §. 296 zu berechnende Länge der Kettencurve,

q den fraglichen Querschnitt aller Tragketten in Wiener □ Zollen,

k in Zentnern das Gewicht eines Kettenstückes von einer Klafter Länge und 1 □″ Querschnitt mit Rücksicht auf die Verbindungen der Kettenglieder, und

a in Zentnern die grösste Spannung per □″ Querschnitt, welche man in dem Kettenmateriale mit Rücksicht auf die besonderen Umstände ohne Gefahr zulassen darf;

endlich behalte man die Bezeichnungen h, f, n, α, S und H nach den früheren §§. bei.

Hiernach hat man

$$G_1 = kqL,\ G_2 = g_2 F,\ G_3 = g_3 F,$$

daher

$$G = kqL + (g_2 + g_3) F,$$

und nach der Gleichung (615) die Totalspannung an den Aufhängepuncten

$$S = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{G}{2} \sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = G\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right) = cG,$$

wenn man den Coefficienten von G, d. i.

$$\frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{n^2}{16}} = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right) = c$$

setzt.

Sonach ist einerseits

$$S = c\,[kqL + (g_2 + g_3) L],$$

andererseits aber

$$S = aq,$$

somit durch Vergleichung

$$c\,[kqL + (g_2 + g_3) F] = aq,$$

und hieraus findet man den Kettenquerschnitt q mit

$$q = \frac{(g_2 + g_3) F}{\left(\frac{a}{c} - kL\right)} \square'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (627).$$

Bezüglich dieser Formel ist Folgendes zu bemerken:

1. Das Einheitsgewicht g_2 variirt je nach der Constructionsweise der Brückenbahn mit Rücksicht auf ihre Bestimmung in der Regel von 8 bis 20 Zentnern.

2. Die zufällige Belastung g_3 ist nach dem vorigen §. mit 25 bis 30 Zentnern zu bemessen.

3. Bei der Bestimmung der Bahnfläche $F = 2bh$ ist zu beachten, dass die Bahnlänge $2h$ und die Bahnbreite b in Wiener Klaftern zu substituiren sind, wobei diese nicht die Breite der ganzen Brücke, sondern nur diejenige vorstellt, welche bei der Passage wirklich benützt wird. Selbstverständlich ist auf diesen Umstand bei der Ausmittlung des Einheitsgewichtes g_2 Rücksicht zu nehmen.

4. Die grösste zulässige Spannung a per $\square''$ ist je nach der Gattung und Qualität des Kettenmateriales verschieden. In der

Regel wird dazu Schmiedeeisen verwendet *). Bei diesem wird man die obige Spannung a ungefähr mit $\frac{5}{6}$ von jener, welche den Versuchen zufolge den günstigsten Umständen entspricht, annehmen können. (Siehe §. 18.) In der Regel liegt der zulässige Werth für a zwischen 100 und 220 Ztr., so dass $a = 180$ schon einer guten Eisengattung zugehören wird.

5. Das Einheitsgewicht k hängt von dem Materiale und von der Art und Weise ab, wie die Kettenglieder unter sich verbunden sind. Für Schmiedeeisen ist das Gewicht einer Stange von einer Klafter Länge und einem Quadratzoll Querschnitt ungefähr 18 Pfund. Der Werth von k wird daher mit Rücksicht auf die Verbindungen der Kettenglieder zwischen 0·2 und 0·3 Ztr. zu liegen kommen.

Ex. Bei der über den Donaucanal in Wien anno 1824 und 1825 erbauten Sophienbrücke ist

$2h = 37^0 3' 0'' = 37\overset{0}{\cdot}5$	$l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) = 1{\cdot}018\,h,$
$f = 2^0 4' 1'' 5''' = 2{\cdot}686$	$L = 2l = 37{\cdot}987$
$n = 14$	$b = 2^0 1' 6'' = 2\overset{0}{\cdot}25$
$c = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n}\right) = 1{\cdot}821$	$F = 2bh = 84{\cdot}375\,\square^0.$

Setzt man noch $g_2 = 11$, $g_3 = 30$, $a = 200$ und $k = 0{\cdot}25$ Ztr., so findet man nach der Formel (627)

$$q = 32\,\square''.$$

Mit diesem Resultate steht die Ausführung in Uebereinstimmung. Die Brückenbahn hängt nämlich an vier Ketten, deren zwei auf jeder Seite vertical über einander situirt sind. Eine Kette besteht aus vier Gliedern à 2'' Höhe und 1'' Breite. Der ausgeführte Kettenquerschnitt misst daher in der That $4 \times 4 \times 2 \times 1 = 32\,\square''$.

Bei der Vertheilung des nach der Formel (627) berechneten Kettenquerschnittes auf die einzelnen Ketten ist darauf zu sehen, dass alle auf eine gleiche Weise in Anspruch genommen werden. Die weitere Auflösung einer Kette in mehrere Glieder geschieht in der

*) Auch Stahl- und Drahtseile sind zu diesem Zwecke in Anwendung gekommen. Die Karlsbrücke über den Donaucanal in Wien hat Ketten aus Stahl; sie ist die einzige dieser Art. Drahtseilbrücken sind mehrere ausgeführt worden. Die bekannteste unter diesen ist die Brücke bei Freiburg in der Schweiz.

Regel auf die in der Fig. 297 angezeigte Art. Zu solchen Gliedern pflegt man flache Schienen zu verwenden, die im Vergleiche zur Breite eine nur geringe Dicke besitzen, wie diess bereits im §. 19 erwähnt wurde.

Die Formel (637) kann auch benützt werden, um die grösste Spannung des Kettenmateriales per □'' Querschnitt, d. i. a zu finden, wenn der Kettenquerschnitt q bekannt ist.

Ex. Die grosse Kettenbrücke über den Meeresarm Menai-Strait zur Verbindung der Insel Anglesey bei Bangor mit dem festen Lande von England, welche nach Telford's Project im Jahre 1825 ausgeführt worden ist, enthält drei Oeffnungen, von denen die mittlere und zugleich grösste eine Länge von circa 90 Wiener Klaftern hat. Die Brückenbahn ist in zwei Fahrbahnen à 12 engl. Fuss Breite für die hin- und herfahrenden Wägen und einem dazwischen liegenden 4 engl. Fuss breiten Gehweg abgetheilt. Die benützbare Bahnbreite ist daher $b = 28$ engl. Fuss $= 4\frac{1}{2}$ Wiener Klafter. Die Verhältnisszahl n ist nahe $13\frac{1}{2}$, und der ausgeführte Kettenquerschnitt 260 engl. $=$ 241·7 Wiener □''.

Hiernach hat man für die mittlere Kettenbrücken-Oeffnung

$$2h = 90 \qquad F = 2bh = 405$$

$$b = 4\tfrac{1}{2} \qquad l = h\left(1 + \frac{8}{3n^2}\right) = 1{\cdot}015\,h$$

$$n = 13\tfrac{1}{2} \qquad L = 2l = 91{\cdot}35$$

$$c = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n}\right) = 1{\cdot}762 \qquad q = 241{\cdot}7.$$

Setzt man noch $g_2 = 16$, $g_3 = 30$ und $k = 0{\cdot}3$, so findet man aus der Formel (627) für die grösste Spannung des Schmiedeeisens per □''

$$a = c\left[kL + \frac{1}{q}(g_2 + g_3)F\right] = 177 \text{ Wr. Ztr.}$$

Anmerkung 1. Die Formel (627) kann durch eine annäherungsweise Darstellung auf eine noch einfachere Form gebracht werden. Nimmt man z. B. für Kettenbrücken von gewöhnlicher nicht allzuschwerer Construction durchschnittlich $g_2 = 12$ Ztr., ferner $g_3 = 30$ Ztr., $k = \frac{1}{4}$ Ztr. und für Schmiedeeisen von guter Qualität $a = 190$ Ztr. an, und setzt man noch beiläufig $c = \frac{n}{8}$ und $L = 2h$, so erhält man für den Kettenquerschnitt

$$q = \frac{84\,F}{\left(\frac{3040}{n} - h\right)} = \frac{84\,Fn}{(3040 - hn)},$$

zu dessen Bestimmung nur die Bahnlänge $2h$, die benützbare Bahnbreite b (wegen $F = 2bh$), und die Verhältnisszahl n (§. 296) benöthigt wird.

Ex. Für die in den Jahren 1827 und 1828 über den Wienfluss ausgeführte fahrbare Kettenbrücke ist $2h = 14°$, also $h = 7°$, ferner $n = 16$, $b = 5\frac{1}{4}°$ und $F = 73·5$ □°; man findet somit nach der obigen Formel $q = 33$ □″, welches Resultat sehr nahe mit der Ausführung übereinstimmt. Die Brücke hängt nämlich an vier Ketten, deren jede vier Glieder à 2″ Höhe und 1″ Dicke hat, wornach der wirkliche Kettenquerschnitt $4 \times 4 \times 2 \times 1 = 32$ □″ beträgt.

Anmerkung 2. Dividirt man den für q gegebenen Werth durch F, so gelangt man offenbar zur Kenntniss, wie viel von dem ganzen Kettenquerschnitte durchschnittlich auf 1 □° Brückenbahn entfällt. Man findet nämlich allgemein aus der Formel (627)

$$\frac{q}{F} = \frac{(g_2 + g_1)}{\left(\frac{a}{c} - kL\right)} \square''.$$

Dieser Werth nimmt unter sonst gleichen Umständen mit L, also mit der Spannweite zu, so dass der gesammte Kettenquerschnitt in einem grösseren Verhältnisse wächst, als die Bahnfläche F.

Legt man auch die vorige annäherungsweise Formel für q zu Grunde, so erhält man

$$\frac{q}{F} = \frac{84}{\left(\frac{3040}{n} - h\right)} = \frac{84\,n}{(3040 - n\,h)},$$

$$\text{also für } n = 12 \text{ und } 2h = \begin{cases} 10° \\ 50°, \\ 100° \end{cases} \frac{q}{F} = \begin{cases} 0·34 \square'' \\ 0·37 \;,, \\ 0·41 \;,, \end{cases}$$

$$\text{und für } n = 18 \text{ und } 2h = \begin{cases} 10° \\ 50°, \\ 100° \end{cases} \frac{q}{F} = \begin{cases} 0·51 \;,, \\ 0·58 \;,, \\ 0·71 \;,, \end{cases}$$

In der Praxis liegen die Werthe für n in der Regel zwischen 12 und 18, und jene der Spannweite zwischen 10 und 100 Klaftern, es wird somit für gewöhnliche aus gutem Schmiedeeisen construirte Kettenbrücken der Kettenquerschnitt per □° Bahn zwischen 0·34 und 0·71 □″ fallen. Der Mittelwerth hieraus ist ungefähr $\frac{1}{2}$ □″. Diese Bemerkung kann als Anhaltspunct zu einer beiläufigen Beurtheilung der Grösse des Kettenquerschnittes dienen.

§. 304.

Gränzen der Spannweiten für Kettenbrücken. Zufolge der Formel (627) nimmt der erforderliche Kettenquerschnitt mit der Spannweite $2h$ zu; jene Formel ist aber nur so lange brauchbar, als der Nenner $(a - ckL)$ einen positiven Werth hat. Hiernach erhält man die Bedingung

$$L < \frac{a}{ck},$$

aus welcher mit Rücksicht auf die §§. 296 und 303 wegen

$$L = 2l = 2h\left(1 + \frac{8}{3n^2} - \ldots\right)$$

$$\text{und } c = \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{n}{8} + \frac{1}{n} - \ldots$$

die weitere

$$2h < \frac{a}{\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)k}$$

folgt.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung bezeichnet offenbar die Gränze der Spannweite $(\lim. 2h)$, welche nie erreicht werden darf.

Es ist nämlich

$$\lim. 2h = \frac{a}{\left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)k}$$

$$= \frac{8a}{\left(1 + \frac{8}{n^2} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right)nk}$$

$$= \frac{8a}{\left(1 + \frac{32}{3n^2} - ..\right)nk}$$

$$= \frac{8a}{nk}\left(1 - \frac{32}{3n^2} + ..\right),$$

somit annähernd

$$\lim. 2h = \frac{8a}{nk}\left(1 - \frac{32}{3n^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (628).$$

Nach dieser Formel wurde folgende Tabelle zusammengestellt:

Die Gränzen der Spannweite bei Kettenbrücken werden			
für n	allgemein $lim. 2h$	und insbesondere für $k = \frac{1}{4}$ und	
		$a = 100$	$a = 220$
12	$0{\cdot}617 \frac{a}{k}$	247 Klafter	543 Klafter
13	$0{\cdot}577 \frac{a}{k}$	231 „	508 „
14	$0{\cdot}540 \frac{a}{k}$	216 „	475 „
15	$0.508 \frac{a}{k}$	203 „	447 „
16	$0{\cdot}479 \frac{a}{k}$	192 „	422 „
17	$0{\cdot}453 \frac{a}{k}$	181 „	399 „
18	$0{\cdot}430 \frac{a}{k}$	172 „	378 „

In der Praxis pflegen die Werthe von n zwischen 12 und 18, jene von a zwischen 100 und 220 Ztr. zu liegen, und $\frac{1}{4}$ bezeichnet so ziemlich den Durchnittswerth von k. Es fallen daher die Gränzen der Spannweiten in der Regel zwischen 172 und 543 Klaftern. Das Mittel aus diesen Zahlen gibt $357\frac{1}{2}$ Klafter.

Gleichwohl können die wirklichen Spannweiten die obigen Gränzen nicht erreichen, sondern sie werden offenbar viel geringer sein müssen. Die Gründe hiefür sind practischer und öconomischer Natur. Bei verhältnissmässig grossen Brückenspannweiten wären nämlich so starke Ketten und so hohe Pfeiler erforderlich, dass die bedeutenden Schwierigkeiten in der Ausführung und die Kostspieligkeit eines solchen Bauobjectes Veranlassung geben, die

practischen Gränzen der Spannweiten für Kettenbrücken weit unter den obigen Zahlenwerthen anzunehmen.

Die grösste bisher ausgeführte Kettenspannung ist bei der Kettenbrücke über die Donau zwischen Ofen und Pesth vorhanden. Diese enthält drei Oeffnungen, von welchen die mittlere 100 und jede der beiden andern 50 Klafter misst.

§. 305.

Gewicht der Tragketten. Das Gewicht der Tragketten, welches im §. 303 mit G_1 bezeichnet und mit kqL ausgedrückt wurde, kann nunmehr nach erlangter Kenntniss des Kettenquerschnittes (q) berechnet werden.

Man hat nämlich wegen der Gleichung (627)

$$G_1 = kqL = \frac{kL(g_2+g_3)F}{\frac{a}{c} - kL} = \frac{kL(G_2+G_3)}{\frac{a}{c} - kL} \quad . \quad (629).$$

Auch folgt hieraus

$$\frac{a}{k} G_1 = c\,(G_1 + G_2 + G_3)\,L = c\,G\,L,$$

und da mit Rücksicht auf die Entstehung der Gleichung (628)

$$\frac{a}{k} = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right) lim.\,2h,$$

ferner

$$cL = \left(\frac{n}{8} + \frac{1}{n} - ..\right)\left(1 + \frac{8}{3n^2} - ..\right) 2h$$

ist, so erhält man nach gehöriger Reduction überdiess

$$G_1 \;.\; lim.\,2h = G \;.\; 2h,$$

und demgemäss die eben so einfache wie merkwürdige Proportion

$$G_1 : G = 2h : lim.\,2h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (630).$$

Es verhält sich daher das Kettengewicht (G_1) zum Totalgewichte ($G = G_1 + G_2 + G_3$), wie die wirkliche Spannweite ($2h$), zur Gränze der Spannweite ($lim.\,2h$).

Hätte man z. B. mit Rücksicht auf die betreffenden Werthe von a, k und n die Gränze der Spannweite nach der Gleichung (628) mit $lim.\,2h = 300^0$ gefunden, so würde bei jenen Werthen und bei einer Spannweite von $2h = 60^0$ das fragliche Kettengewicht

$$G_1 = \frac{2h}{lim. 2h} G = \tfrac{1}{5} G = 20\% \text{ von } G$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{4}(G_2 + G_3) = 25\% \text{ von } (G_2 + G_3)$$

sein. Dieses Kettengewicht ist übrigens nur dasjenige, welches auf die Länge der Brückenbahn ($2h$) entfällt.

Es leuchtet ein, dass zwischen den per □° Brückenbahn entfallenden Gewichtsantheilen g_1, g_2, g_3 und g dieselben Beziehungen stattfinden, wie zwischen den Gewichten G_1, G_2, G_3 und G. Wäre also in dem obigen Beispiele $g_2 = 10$ und $g_3 = 30$, somit

$$(g_2 + g_3) = 40 \text{ Zentner.},$$

so entfiele von den Tragketten per □° Bahn durchschnittlich der Gewichtsantheil

$$g_1 = \tfrac{1}{4}(g_2 + g_3) = 10 \text{ Zentner.}$$

Nachdem in der Regel die anwendbaren Spannweiten zwischen 10 und 100° liegen, die Gränzen der Spannweiten aber nach dem vorigen §. von 172 bis 543° anzunehmen sind, so folgt, dass unter gewöhnlichen Umständen das Kettengewicht von 2 bis 59% des Totalgewichtes variiren kann.

§. 306.

Länge der Hänge- oder Tragstangen. Die Länge einer Tragstange hängt ab von der Krümmung der Kettencurve $\widehat{AO}$ (Fig. 352), von jener der Brückenbahn $\overline{A'O'}$, von dem Abstande der Curvenscheitel O und O', und von dem Orte der betreffenden Tragstange $\overline{MM'}$ selbst. Es sei die halbe Spannweite $\overline{AC}$ . . . . $= h$,

Fig. 352.

die Pfeilhöhe $\overline{CO}$ der Kettencurve . . . . $= f$,

die Pfeilhöhe $\overline{C'O'}$ d. Brückenbahn . . . . $= f'$,

ferner für die Hängstange $\overline{MM'}$

die Abscisse $\overline{OP}$ . . . . $= x$,

die Ordinate $\overline{MP} = \overline{M'P'}$ . . . . $= y$,

die Bogenlänge $\widehat{OM}$ . . . . $= s$,
und die Abscisse $\overline{O'P'}$ . . . . $= x'$,
endlich die Länge der kleinsten Tragstange $\overline{OO'}$ . . $= t_o$,
und jene der Tragstange $\overline{MM'}$ . . . . $= t_y$.

Nach diesen Bezeichnungen hat man zunächst

$$x = f\left(\frac{y}{h}\right)^2 \text{ und } x' = f'\left(\frac{y}{h}\right)^2,$$

somit

$$t_y = t_o + x + x' = t_o + (f+f')\left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad . \quad (631),$$

wenn man auch die Curve für die Brückenbahn als eine Parabel gelten lässt, wobei für eine ebene Bahn $f' = o$ zu setzen ist. Dem Resultate (631) zufolge hängt die Länge einer Tragstange von den einzelnen Pfeilhöhen f und f' nur insoferne ab, als die Summe derselben $(f+f')$ in Betracht kömmt. Auch ist zur Bestimmung von t_y die Kenntniss der Ordinate y nöthig. In der Regel ist diese aber nicht bekannt, indem gewöhnlich bloss die Kettenlänge $\widehat{OM} = s$ und das Verhältniss $n = \frac{2h}{f}$ gegeben sind. In einem solchen Falle hat man den Werth von y erst aus jenem von s aufzusuchen. In dieser Absicht nehme man die Gleichung (611)

$$s = y\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\frac{4}{n}\right)^4\left(\frac{y}{h}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{112}\left(\frac{4}{n}\right)^6\left(\frac{y}{h}\right)^6 - \ldots\right]$$

zu Hilfe, und kehre die Reihe so um, dass $\frac{y}{h}$ durch $\frac{s}{h}$ ausgedrückt erscheint. Wird diese Reihenumkehrung nach den Lehren der Mathematik ausgeführt, so findet man

$$\left(\frac{y}{h}\right) = \left(\frac{s}{h}\right)\left[1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{s}{h}\right)^2 + \tfrac{13}{120}\left(\frac{4}{n}\right)^4\left(\frac{s}{h}\right)^4 - \right.$$
$$\left. - \tfrac{493}{5040}\left(\frac{4}{n}\right)^6\left(\frac{s}{h}\right)^6 + \ldots\right] \quad (632).$$

Diese Reihe ist in der Regel sehr convergent und desshalb zum Gebrauche bequem. Hat man die Länge der einzelnen Hängestangen bestimmt, so wird man hieraus unverzüglich die verglichene Stangenlänge ausmitteln können.

Anmerkung. Die verglichene Tragstangenlänge kann auch annäherungsweise aus folgender Betrachtung gefunden werden.

Es ist

$$Area\ AA'OO' = A'ACC' - AOC - A'O'C' = hT - \tfrac{2}{3}hf - \tfrac{2}{3}hf'$$
$$= h\,[T - \tfrac{2}{3}(f+f')],$$

wenn man die grösste Tragstangenlänge, welche vorkommen kann, d. i. $\overline{AA'} = T$ setzt. Hiernach ist noch $(f+f') = (T-t_0)$, somit

$$Area\ AA'OO' = \left(\frac{T+2t_0}{3}\right)h,$$

woraus ersichtlich wird, dass die verglichene verticale Höhe der Fig. $AA'OO'$ durch $\left(\frac{T+2t_0}{3}\right)$ ausgedrückt erscheint. Wären daher unendlich viele Tragstangen vorhanden, welche sodann die Fig. $AA'OO'$ vollständig ausfüllten, so würde man die verglichene Stangenlänge nach der Formel $\left(\frac{T+2t_0}{3}\right)$ zu berechnen haben. Gleichwohl wird man auch in der Wirklichkeit, wo die Anzahl der Tragstangen eine endliche ist, dieses Resultat als ein annäherungsweises gelten lassen dürfen, und zwar wird dasselbe desto genauer sein, je grösser die Stangenanzahl ist. Da die Formel

$$\left(\frac{T+2t_0}{3}\right) = \left(\frac{T+t_0+t_0}{3}\right)$$

das arithmetische Mittel von einer grössten und zwei kleinsten Stangenlängen vorstellt, so hat man dadurch eine einfache Regel, einen angenäherten Werth für die verglichene Tragstangenlänge zu finden, welcher z. B. bei der Verfassung eines Voranschlages über den Materialbedarf zu den Tragstangen ganz gut wird angewendet werden können.

§. 307.

Querschnitt der Hänge- oder Tragstangen. Dieser Querschnitt ist leicht zu finden, wenn man erwägt, dass sämmtliche Hängestangen im ungünstigsten Falle das Gewicht

$$(G_2 + G_3) = (g_2 + g_3)F$$

zu tragen haben. Ist daher der Querschnitt aller Hängestangen $= q'$, und die grösste zulässige Spannung per □″ des Stangenmateriales . . . . $= a'$,
so muss offenbar sein

$$q' = \frac{(G_2 + G_3)}{a'} = \frac{(g_2 + g_3)F}{a'} \quad . \; . \; . \quad (633).$$

Im §. 303 wurde angenommen, dass in dem Gewichte G_2 (beziehungsweise g_2) auch das Stangengewicht enthalten sei. Zur genauen Feststellung der Werthe von G_2 und g_2 sollte sonach der erst zu bestimmende Querschnitt q' schon im Voraus bekannt sein. Diese Unzukömmlichkeit hat indessen keinen Nachtheil. Da nämlich das Stangengewicht im Vergleiche zu dem Gewichte der Brückenbahn und der zufälligen Belastung nur sehr klein sein wird, so kann man sich erlauben, dieses letztere wenigstens vorläufig ausser Acht zu lassen, und statt G_2 bloss das Gewicht der Brückenbahn zu setzen. Wird hiernach q bestimmt, so kann man erforderlichen Falls das Gewicht G_2 (beziehungsweise g_2) rectificiren, und mit dem so verbesserten Werthe die Rechnung neuerdings durchführen, was aber unter den gewöhnlichen practischen Verhältnissen nicht nöthig sein wird.

Betreffend die grösste zulässige Spannung a' per □'' des Stangenmateriales (Schmiedeeisen), so darf man hiefür nur etwa die Hälfte von jener annehmen, welche den Versuchen zufolge unter den günstigsten Umständen stattfinden könnte, weil der nachtheilige Einfluss von Erschütterungen auf die Stangen wegen ihren geringen Querschnittsdimensionen, so wie jener der grossen Ungleichförmigkeit, welcher in dem Zuge dieser Stangen eintreten kann, viel höher anzuschlagen ist, als bei den Ketten. (Vergleiche §. 18, Seite 23.) Da nun die grösste zulässige Spannung unter den günstigsten Umständen von 120 bis 280 Zentnern varriirt, so wird der Werth von a' in der Regel zwischen 60 und 140 Zentner liegen, und $a' = 100$ einer mittelguten Eisenqualität entsprechen.

Anmerkung. Der aus der Gleichung (633) resultirende Quotient

$$\frac{q'}{F} = \frac{(g_1 + g_2)}{a'}$$

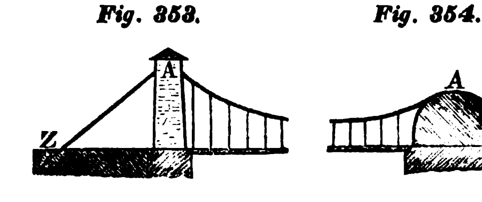
zeigt offenbar an, welcher Antheil des Stangenquerschnittes q' im Durchschnitte auf die □° Brückenbahn entfällt. Indem g_2 zwischen 8 und 20, und a' zwischen 60 und 140 zu liegen pflegt, so fällt, wenn man unter Einem $g_2 = 30$ setzt, der per □° resultirende Stangenquerschnitt in der Regel zwischen die Gränzen 0·27 und 0·83 □''. Diese Gränzen sind beinahe dieselben, welche man im §. 303 (Anmerkung 2) für den Kettenquerschnitt gefunden hat. Man kann daher zur ungefähren Uebersicht bemerken, dass die Gleichheit der totalen Querschnitte von den Ketten und Tragstangen einer harmonischen Anordnung so ziemlich entspricht.

Dass wirklich das Stangengewicht, wie oben bemerkt, verhältnissmässig unbedeutend ist, kann leicht anschaulich gemacht werden. Sei z. B. die mittlere Länge der Tragstangen 3° und der per □° Bahn resultirende Stangenquerschnitt sogar 0·83 □'', so erhielte man für das Stangengewicht per □° Brückenbahn $3 \times 72 \times 0{\cdot}83 \times \frac{1}{4} = 45$ Pfd., daher selbst mit Berücksichtigung der Schrauben und Verbindungen kaum einen halben Zentner, während das Gewicht der Bahn und die zufällige Belastung zusammen 38 bis 50 Zentner betragen kann. Sonach wird man gegen die obige Berechnungsweise um so weniger etwas einzuwenden haben, als das Gewicht $(g_2 + g_3)$ bis auf Pfunde auszumitteln einerseits nicht nöthig, andererseits nicht möglich ist.

§. 308.

Spannketten. Die Spannketten *AZ* (Fig. 353 und 354) bilden gleichsam eine Fortsetzung der Tragketten, sie laufen vom

Fig. 353. *Fig. 354.*

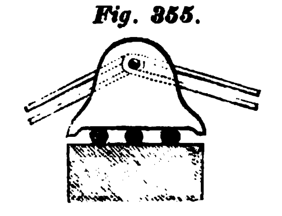


Kopfe des Landpfeilers abwärts gegen das Erdreich, in welchem sie auf eine angemessene Weise zu befestigen sind. Eben so wie bei den Tragketten, wird auch bei den Spannketten vor Allem die Frage zu beantworten sein, welchen Zug sie zu erleiden haben, um daraus ihre Stärke zu beurtheilen. Zu diesem Behufe ist zu unterscheiden, ob der Pfeiler einem Horizontalzuge ausgesetzt werden soll, oder nicht.

§. 309.

I. Fall. Der Pfeiler soll keinem Horizontalzug ausgesetzt werden. In diesem Falle gibt man dem Pfeiler eine horizontale Begränzung und befestigt die beiderseitigen Ketten an einen sogenannten Kettenwagen, welcher auf dem Pfeiler steht, und dem eine möglichst leichte Beweglichkeit nach horizontaler Richtung gestattet ist. Die Fig. 355 zeigt die An-

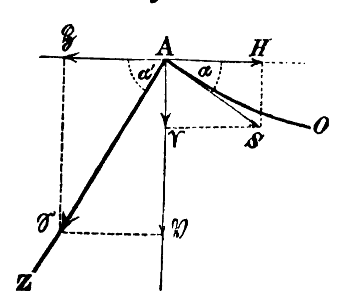
Fig. 355.



ordnung eines solchen Kettenwagens bei der Petersburger Kettenbrücke *). Derselbe ruht auf Rollen, um die Reibung thunlichst zu beseitigen.

Behufs der Untersuchung dieses Falles sei Fig. 356 bezüglich der T r a g k e t t e n

Fig. 356.



AO die parabolische Kettenlinie,
α der Aufhängewinkel,
S die Tangentialspannung im Aufhängepuncte,
H die horizontale } Componente derselben,
V die verticale }
q der Kettenquerschnitt;

bezüglich der S p a n n k e t t e n aber

AZ ihre Richtung, welche geradlinig angenommen werden kann,
α' ihr Abfallswinkel,
$\mathfrak{S}$ ihre Totalspannung,
$\mathfrak{H}$ die horizontale } Componente dieser Spannung,
$\mathfrak{V}$ die verticale }
und $\mathfrak{q}$ der Kettenquerschnitt;

während die Grössen h, f, n und G (das Totalgewicht) die frühere Bedeutung beibehalten.

Hiernach erhält man

$$\left.\begin{array}{l} H = \frac{n}{8} G = S \cos \alpha \\ V = \frac{1}{2} G = S \sin \alpha \end{array}\right\} \text{und} \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{H} = \mathfrak{S} \cos \alpha' \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{S} \sin \alpha'. \end{array}\right.$$

*) Die Kettenglieder bei dieser Brücke sind schlingenförmig.

Da im vorliegenden Falle die beiden horizontalen Componenten H und $\mathfrak{H}$ sich gegenseitig aufheben müssen, um der Voraussetzung gemäss den Pfeiler keiner Horizontalwirkung auszusetzen, so erhält man

$$H = S \cos\alpha = \mathfrak{H} = \mathfrak{S} \cos\alpha'$$

somit

$$\mathfrak{S} : S = \cos\alpha : \cos\alpha' = \frac{1}{\cos\alpha'} : \frac{1}{\cos\alpha} \text{ und}$$

$$\mathfrak{S} = S \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (634).$$

Bestehen die Trag- und Spannketten, wie gewöhnlich, aus der gleichen Materialgattung, so werden offenbar die Kettenquerschnitte q und $\mathfrak{q}$ zu einander in demselhen Verhältnisse stehen, wie die betreffenden Kettenspannungen S und $\mathfrak{S}$.

Sodann ist

$$\mathfrak{q} : q = \mathfrak{S} : S = \cos\alpha : \cos\alpha' = \frac{1}{\cos\alpha'} : \frac{1}{\cos\alpha}$$

daher

$$\mathfrak{q} = q \frac{\mathfrak{S}}{S} = q \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (635).$$

Für $\alpha' = \alpha$ wird $\mathfrak{S} = S$ und $\mathfrak{q} = q$,
„ $\alpha' < \alpha$ „ $\mathfrak{S} < S$ „ $\mathfrak{q} < q$ und
„ $\alpha' > \alpha$ „ $\mathfrak{S} > S$ „ $\mathfrak{q} > q$.

Gewöhnlich ist $\alpha' > \alpha$, es werden dann die Spannketten einem grösseren Zuge ausgesetzt sein, und desshalb einen grösseren Querschnitt benöthigen, als die Tragketten. Ist z. B. $n=16$ und $\alpha'=45^0$, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} \text{wegen } \cos\alpha = 1 - \frac{8}{n^2} + .. = 0{\cdot}969 \\ \text{und } \cos\alpha' = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad = 0{\cdot}707 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathfrak{S} = 1{\cdot}370\, S, \\ \text{und } \mathfrak{q} = 1{\cdot}370\, q. \end{array}$$

Die Summe $(V + \mathfrak{V})$ der beiden verticalen Componenten zeigt den Druck an, welchen der Pfeiler zu erleiden hat. Es ist nämlich

$$(V + \mathfrak{V}) = (\tfrac{1}{2} G + \mathfrak{S} \sin\alpha') = (\tfrac{1}{2} G + S \cos\alpha \, tg\,\alpha') =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} G + \frac{n}{8} G \, tg\,\alpha'\right) = \tfrac{1}{2} G\left(1 + \frac{n}{4} tg\,\alpha'\right) \quad . \quad . \quad (636).$$

So hat man z. B. für $n = 16$ und $\alpha' = 45^0$,

$$(V + \mathfrak{V}) = 2\tfrac{1}{2} G.$$

Hieraus wird ersichtlich, dass der Druck auf den Pfeiler weit grösser werden kann, als das Totalgewicht G. Aus Anlass dieses bedeutenden Druckes erheischt die Herstellung des Pfeilermauerwerks eine besondere Vorsicht. Namentlich soll dabei das gemischte Mauerwerk vermieden werden, weil solches leicht Anlass zur Entstehung von ungleichen Setzungen und Mauerrissen gibt. Statt gemauerter Pfeiler können übrigens auch Holz- oder Eisengerüste aufgestellt werden. Da ein Umkanten derselben nicht zu besorgen ist, so wird bloss darauf zu sehen sein, dass sie gegen die verticale Pressung genügenden Widerstand leisten.

Betreffend die Anwendbarkeit der betrachteten Constructionsweise mittelst des Kettenwagens, so hat diese das Gute, dass die Landpfeiler keinen Horizontalzug zu erleiden, also keine Tendenz zum Umsturz haben, sondern bloss vertical gedrückt werden; hingegen hält man die nachtheilige Wirkung nicht für unwesentlich, welche durch das fortwährende Oscilliren des Kettenwagens in Folge der Ausdehnung und Zusammenziehung der Ketten aus Anlass der Elasticität und Temperaturabwechslung auf die Pfeiler hervor gebracht wird.

Mit der Zunahme des Abfallswinkels α' für die Spannketten nimmt nach der Gleichung (635) der nöthige Kettenquerschnitt q zu, ihre Länge hingegen ab, und umgekehrt. Da nun die Herstellungskosten der Spannketten mit dem Gewichte im Verhältnisse stehen, und dieses letztere mit dem Producte aus der Kettenstärke und der Länge zu- und abnimmt, so ist klar, dass bei einem gewissen Abfallswinkel die Herstellungskosten für die Spannketten am kleinsten werden. Um diesen vortheilhaftesten Winkel zu finden, sei (Fig. 357)

Fig. 357.

die mit der Neigung variable Länge der Spannketten $AZ = \lambda$, und E die constante Entfernung des Horizontes, welcher durch das Ende Z gelegt wird, von dem Aufhängepuncte A.

Hiernach ist

$$\lambda = \frac{E}{\sin \alpha'} \text{ und } q = \frac{q \cos \alpha}{\cos \alpha'} \quad . \; . \quad \text{(s. Gleich. 635),}$$

somit

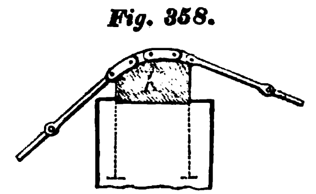
$$q \lambda = \frac{q E \cos \alpha}{\sin \alpha' \cos \alpha'} = \frac{2 q E \cos \alpha}{\sin 2 \alpha'}.$$

Dieses Product wird ein Minimum mit dem Maximalwerthe von $\sin 2\alpha'$, also für $\alpha' = 45^0$, wornach bei diesem Abfallswinkel die Herstellungskosten für die Spannketten am kleinsten werden. In der Praxis, wo man ausser den Spannketten auch die Pfeiler zu berücksichtigen hat, pflegt man die vortheilhafteste Neigung der Spannketten etwas sanfter, als 45^0 (nämlich 30 bis 40^0) anzunehmen, weil es in der Regel wünschenswerth ist, den Druck auf den Pfeiler nicht so gross werden zu lassen, als dieses für $\alpha' = 45^0$ der Fall wäre.

§. 310.

II. Fall. Der Pfeiler soll ausser einem verticalen Drucke auch einem Horizontalzuge ausgesetzt sein. In diesem Falle lässt man die Ketten über ein Kettenlager *K* (Fig. 358) gehen, welches mit dem Pfeiler fest verbunden ist. Das Kettenlager wird oben von einer kreisförmigen Cylinderfläche begränzt, und den aufliegenden Kettengliedern wird die entsprechende Krümmung, obwohl nur eine geringe Länge gegeben, um nämlich die Beweglichkeit der Ketten und hiernach das Gleiten derselben auf dem Lager zu erleichtern. Ein solches Gleiten wird aus Anlass der Elasticität des Kettenmateriales und der wechselnden Temperatur jedenfalls, wenn auch nur im geringen Masse, stattfinden.

Fig. 358.



Behufs der Erörterung dieses II. Falles untersuche man die Bedingungen des Gleichgewichtes zuerst ohne, dann mit Rücksicht auf die Reibung, welche zwischen dem Kettenlager und den darauf ruhenden Kettengliedern vorhanden ist. Obgleich in der Wirklichkeit die Reibung nie vollkommen beseitigt werden kann, so wird man doch die Resultate ohne Rücksicht auf die Reibung in der Praxis dann benützen können, wenn diese Reibung klein genug ist, um sie ohne Besorgniss eines wesentlichen Irrthums vernachlässigen zu dürfen.

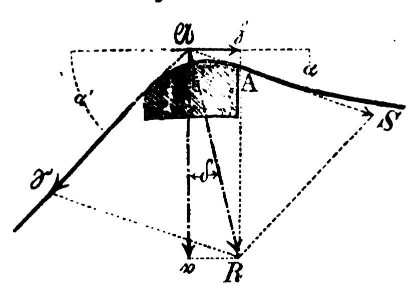
§. 311.

Die Reibung zwischen den Ketten und dem Kettenlager sei so gering, dass sie vernachlässigt wer-

den kann. Diese Annahme kann man in der Regel gelten lassen, wenn der Halbmesser der krummen Oberfläche des Kettenlagers nicht zu klein ist, und durch sorgfältiges Poliren dieses letzteren, das gewöhnlich aus Gusseisen angefertigt wird, das Gleiten der Ketten auf demselben möglichst erleichtert wird.

Es sei (Fig. 359)

Fig. 359.



S die Tangentialspannung in dem Aufhängepuncte A der Tragketten,

𝔖 der Zug in den Spannketten,

𝔄 der Durchschnitt beider Spannkräfte, durch welchen die Resultirende

R aus denselben zu ziehen ist,

𝔥 die horizontale } Componente dieser Resultirenden,
𝔳 die verticale }

δ der Winkel, den sie mit der Verticalen einschliesst,

α der Aufhängewinkel der Tragketten, und

α' der Abfallswinkel der Spannketten.

Abgesehen von der Reibung sind offenbar die Spannungen in den beiderseitigen Ketten einander gleich, demnach ist

$$\mathfrak{S} = S \quad \ldots\ldots\ldots \quad (637)$$

zu setzen. In diesem Falle ist das aus den beiden Spannungen gebildete Kräftenparallelogramm ein Rhombus, und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(180^0 - \alpha - \alpha')$ wird durch ihre Resultirende R halbirt, so dass man hat

$$\delta + \tfrac{1}{2}(180^0 - \alpha - \alpha') + \alpha = 90^0$$

und hieraus

$$\delta = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (638).$$

Die Abweichung der Resultirenden R von der verticalen Richtung ist sonach der halben Differenz zwischen dem Abfalls- und Aufhängewinkel gleich. Insbesondere geht die Resultirende

für $\alpha' = \alpha$ genau vertical,

sonst aber schief, und zwar fällt dieselbe

für $\alpha' < \alpha$ auf die Seite der Spannketten,

für $\alpha' > \alpha$ hingegen auf jene der Tragketten.

Der letzte Fall ist der gewöhnliche.

Ferner findet man

$$\tfrac{1}{2} R = S \cos\left(\frac{180 - \alpha - \alpha'}{2}\right) = S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right),$$

somit

$$R = 2 S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639),$$

und sofort mit Benützung dieser Gleichung, so wie jener unter (638)

$$\mathfrak{h} = R \sin\delta = 2 S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = S(\cos\alpha - \cos\alpha') =$$

$$= H\left(1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (640)$$

und

$$\mathfrak{v} = R \cos\delta = 2 S \sin\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = S(\sin\alpha + \sin\alpha') =$$

$$= \tfrac{1}{2} G\left(1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (641),$$

wenn man beachtet, dass $S\cos\alpha$ und $S\sin\alpha$ die Componenten von S nach horizontaler und verticaler Richtung sind, von welchen die erste der Horizontalspannung H in den Tragketten, die letzte aber dem halben Totalgewichte ($\tfrac{1}{2} G$) gleich ist.

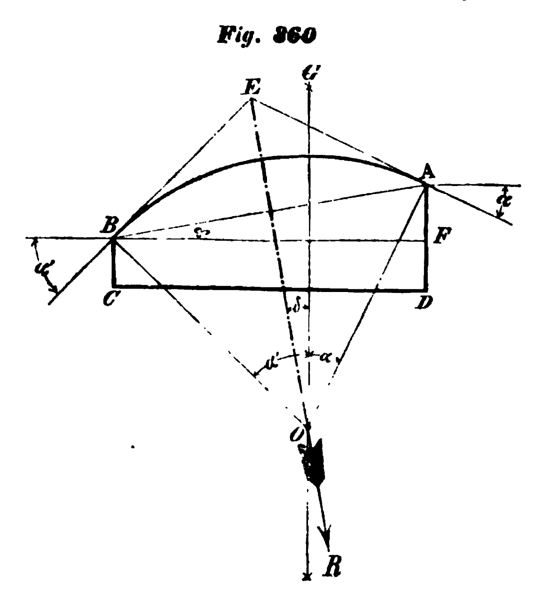
§. 312.

Bemerkungen über das Kettenlager. Wie man aus dem vorigen §. entnimmt, hat das Kettenlager in dem behandelten Falle die Form $ABCD$ (Fig. 360). Die Sehne AB der kreisförmigen Begränzung schliesst mit dem Horizontalen BF den Winkel

$$ABF = \delta = \left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)$$

ein, so dass der Punct A in der Regel höher liegt, als der Punct B, weil gewöhnlich $\alpha' > \alpha$ ist. Die beiden Radien AO und BO,

Fig. 260



welche sich im Centrum O des Kreisbogens schneiden, schliessen mit der Verticalen GO beziehungsweise die Winkel α und α' ein, so zwar, dass

$$\angle AOG = \alpha, \angle BOG = \alpha' \text{ und } \angle AOB = (\alpha + \alpha')$$

ist. Die Resultirende R endlich geht durch den Mittelpunct O des Kreisbogens nach der Richtung EO, wobei E der Durchschnitt der beiden Tangenten an den Enden des Kreisbogens ist, indem auf diese Weise der Bedingung im vorigen §. gemäss der von jenen Tangenten eingeschlossene Winkel AEB halbirt wird.

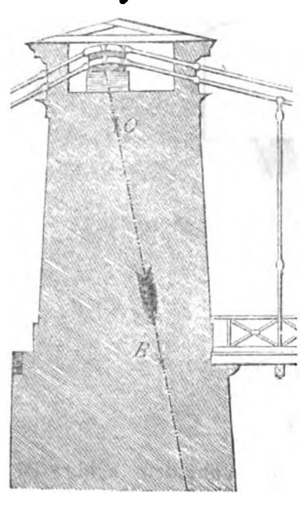
Betreffend die Stabilität des Pfeilers, so ist es offenbar angezeigt, die Resultirende R aus den beiderseitigen Kettenspannungen nicht zu nahe an die Aussenfläche des Pfeilers kommen zu lassen. Zur Erreichung dieser Absicht sind folgende Anordnungen empfehlenswerth:

1. Man bringe die Werthe α und α' einander so nahe, als es die Umstände erlauben, um die Abweichung der Resultirenden R von der verticalen Richtung möglichst zu vermindern.

2. Man gebe dem Pfeiler eine angemessene Kronenbreite, und nöthigen Falls seinen Aussenflächen kleine Böschungen.

3. Man stelle das Kettenlager nur für $\alpha' = \alpha$ in die Mitte des Pfeilers, für $\alpha' > \alpha$ aber (wie in der Regel) näher gegen die Spannketten.

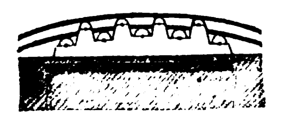
Fig. 361.



Diese Anordnungen sind z. B. bei der Kettenbrücke über die Elbe zu Podiebrad in Böhmen befolgt worden, wie aus dem betreffenden Pfeilerdurchschnitte (Fig. 361) zu ersehen ist.

Kettenlager eigener Art befinden sich bei der Hammersmith-Brücke über die Themse oberhalb London (Fig. 362). Daselbst liegen die Ketten auf beweglichen Rollen, wodurch eben so, wie durch das Poliren von massiven Kettenlagern, die Reibung wesentlich vermindert werden kann.

Fig. 362.



Die Anordnung von Kettenlagern, bei welchen die Reibung zwischen ihnen und den Ketten möglichst beseitigt wird, lässt im Vergleiche mit der Anordnung von Kettenwagen (§. 309) bestimmte Vor- und Nachtheile erkennen, wenn man den gewöhnlichen Fall $\alpha' > \alpha$ vor Augen hat.

Vortheile sind:

1. dass die Spannketten einen geringeren Zug auszuhalten haben, also einen kleineren Querschnitt benöthigen, überdiess dabei der Abfallswinkel α' keinen Einfluss hat, und

2. dass der Pfeiler einem geringeren Verticaldrucke ausgesetzt ist.

Nachtheile sind:

1. dass der Pfeiler einen auf das Umkanten abzielenden Horizontalzug zu erleiden hat, wornach derselbe aus Anlass der nöthigen grösseren Stabilität viel massiver herzustellen ist, und

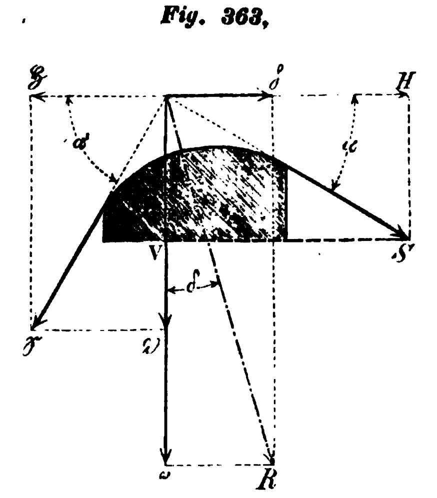
2. dass die auf den Pfeiler wirkende Resultirende R eine schiefe Richtung hat, und eine Schadhaftigkeit in seinem Mauerwerke durch ein ungleiches Setzen desselben desto eher zu besorgen ist, je grösser der Abfallswinkel gemacht wird. Aus diesem Grunde soll bei der

Herstellung des Pfeilers vorzüglich das gemischte Mauerwerk vermieden, und überhaupt der Solidität desselben alle mögliche Sorgfalt zugewendet werden.

§. 313.

Die Reibung zwischen den Ketten und ihrem Lager sei so bedeutend, dass sie zu berücksichtigen ist. Man nenne in diesem Falle (Fig. 363)

Fig. 363.



die Spannung in den Tragketten . . . . S,
die verticale / die horizontale } Componente derselben . . . { V, H,
den Zug in den Spannketten . . . . $\mathfrak{S}$,
die verticale / die horizontale } Componente desselben . . . { $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{H}$,
die Resultirende aus beiden Spannungen S und $\mathfrak{S} = R$,
die verticale / die horizontale } Componente derselben . . . { $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{h}$,
und den Coefficienten der oben erwähnten Reibung μ,

während α, α' und δ die in der Figur bezeichneten Winkel vorstellen.

Hiernach ist vor Allem

$$V = S \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,G \;\Big|\; \mathfrak{V} = \mathfrak{S}\sin\alpha' \;\Big|\; \mathfrak{v} = V + \mathfrak{V} = S\sin\alpha + \mathfrak{S}\sin\alpha'$$

$$H = S\cos\alpha = \frac{n}{8}\,G \;\Big|\; \mathfrak{H} = \mathfrak{S}\cos\alpha' \;\Big|\; \mathfrak{h} = H = \mathfrak{H} = S\cos\alpha - \mathfrak{S}\cos\alpha'$$

$$tg\,\delta = \frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{v}} = \frac{S\cos\alpha - \mathfrak{S}\cos\alpha'}{S\sin\alpha + \mathfrak{S}\sin\alpha'} \text{ und } R = \sqrt{\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{v}^2} = \frac{\mathfrak{v}}{\cos\delta} = \frac{\mathfrak{h}}{\sin\delta}.$$

Man hat nun zu unterscheiden, ob sich die Reibung dem Gleiten im Sinne der Kraft S oder jenem im Sinne der Kraft $\mathfrak{S}$ widersetzt, je nachdem nämlich die Spannketten sich ausdehnen oder zusammenziehen.

A) Dehnen sich die Spannketten aus, wie in dem Falle, wenn auf der Brückenbahn eine zufällige Belastung eintritt, so ist in Folge der Reibung der Zug in den Spannketten g e r i n g e r, als jener in den Tragketten, und zwar findet nach den Lehren der Mechanik folgende Relation statt:

$$\mathfrak{S}_\mu = S \,.\, e^{-\mu(\alpha + \alpha')} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (642),$$

wobei der Zug $\mathfrak{S}$ in den Spannketten mit dem Zeiger μ versehen wurde, um die Berücksichtigung der Reibung symbolisch anzudeuten.

Ferner ist $e = 2{\cdot}7182818..$ die Basis der natürlichen Logarithmen, und $(\alpha + \alpha')$ der Centriwinkel des kreisförmigen Kettenlagers, welcher nicht in Graden, sondern im Längenmasse für den Halbmesser 1 auszudrücken ist.

Der Reibungscoefficient μ kann verschiedene Werthe haben. Ist die Oberfläche des Kettenlagers aus Eisen und nicht abgeglättet, so wird der Werth von μ in der Nähe von $\frac{1}{4}$ liegen. Ist hingegen das Kettenauflager aus Stein, so hat μ einen grösseren Werth, der bis $\frac{1}{2}$ und darüber gehen kann.

Der Centriwinkel des kreisförmigen Kettenlagers, mit dessen Grösse der Reibungswiderstand zunimmt, kann bedeutend werden, indem zuweilen der Abfallswinkel der Spannketten α' ein Rechter ist.

Sei z. B. $\alpha = 15^0$, $\alpha' = 45^0$ und $\mu = \frac{1}{4}$, so findet man

$$(\alpha + \alpha') = 60^0 = \frac{\pi}{3} = 1{\cdot}0472., \ \mu(\alpha + \alpha') = 0{\cdot}2618.$$

und

$$e^{-\mu(\alpha + \alpha')} = (2{\cdot}7181828.)^{-0{\cdot}2618} = 0{\cdot}770,$$

daher

$$\mathfrak{S}_\mu = 0{\cdot}770\, S.$$

Wäre die Reibung nicht vorhanden, also $\mu = o$, so erhielte man

$$\mathfrak{S}_o = S,$$

d. h. der Reibungswiderstand in dem obigen Falle beträgt circa 23% von der Spannung S in den Tragketten, und die Spannketten werden um eben so viel weniger gezogen, als diess ohne jenem Reibungswiderstande sein würde.

Mit Hilfe des unter (642) gegebenen Zuges gehen die früheren Gleichungen dieses §. über in:

$$\mathfrak{v}_\mu = S\left[\sin\alpha + \sin\alpha' e^{-\mu(\alpha + \alpha')}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} e^{-\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$\mathfrak{h}_\mu = S\left[\cos\alpha - \cos\alpha' e^{-\mu(\alpha + \alpha')}\right] =$$

$$= H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} e^{-\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$tg\,\delta_\mu = \left[\frac{\cos\alpha - \cos\alpha' e^{-\mu(\alpha+\alpha')}}{\sin\alpha + \sin\alpha' e^{-\mu(\alpha+\alpha')}}\right], \text{ endlich}$$

$$R_\mu = S\sqrt{\left[1 - 2\cos(\alpha + \alpha') e^{-\mu(\alpha+\alpha')} + e^{-2\mu(\alpha+\alpha')}\right]},$$

wenn man auch hier durch die Zeiger μ die Berücksichtigung der Reibung symbolisch andeutet. Vernachlässigt man die Reibung, so ist $\mu = o$ und

$$\mathfrak{v}_o = \tfrac{1}{2} G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\right], \ \mathfrak{h}_o = H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right],$$

$$tg\,\delta_o = \left(\frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}\right) = tg\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right) \text{ d. i. } \delta_o = \left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) \text{ und}$$

$$R = S\sqrt{\left[2 - 2\cos(\alpha+\alpha')\right]} = 2\,S\sin\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right),$$

welche Gleichungen mit jenen im §. 311 übereinstimmen. Durch die Vergleichung der gefundenen Relationen ergibt sich nun

$$\mathfrak{S}_\mu < \mathfrak{S}_o, \ \mathfrak{v}_\mu < \mathfrak{v}_o, \ \mathfrak{h}_\mu > \mathfrak{h}_o, \ \delta_\mu > \delta_o \text{ und } R_\mu < R_o,$$

wesshalb der Zug in den Spannketten, der Verticaldruck auf den Pfeiler und auch die auf ihn einwirkende Resultirende aus den beiderseitigen Kettenspannungen desto kleiner, hingegen die auf das Umkanten des Pfeilers abzielende Horizontalkraft und die Abweichung der erwähnten Resultirenden von der verticalen Richtung desto grösser werden, je beträchtlicher die Reibung zwischen den Ketten und ihren Lagern ist.

Von dieser einen Seite aus betrachtet (nämlich in dem Falle ad A) hat daher die Vermehrung der fraglichen Reibung sowohl Vortheile, als auch Nachtheile.

B) Ziehen sich die Spannketten zusammen, so werden sich augenscheinlich die Resultate verkehren, indem dann in Folge des Reibungswiderstandes die Spannung $\mathfrak{S}$ grösser sein wird, als S. Dieser Fall kann eintreten, wenn während der Zeit, als die zufällige Belastung auf der Brücke vorhanden ist, die Temperatur sich wesentlich vermindert. Sodann wird man die entsprechenden Resultate aus denen ad A finden, wenn man $-\mu$ statt $+\mu$ setzt, und umgekehrt. Hiernach erhält man unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen

$$\mathfrak{S}_{-\mu} = S \,.\, e^{+\mu(\alpha+\alpha')} \quad . \; . \; . \; . \quad (643)$$

$$\mathfrak{v}_{-\mu} = S\left[\sin\alpha + \sin\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right] = $$
$$= \tfrac{1}{2} G\left[1 + \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$\mathfrak{h}_{-\mu} = S\left[\cos\alpha - \cos\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right] = $$
$$= H\left[1 - \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} e^{+\mu(\alpha+\alpha')}\right]$$

$$tg\,\delta_{-\mu} = \left[\frac{\cos\alpha - \cos\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}}{\sin\alpha + \sin\alpha' e^{+\mu(\alpha+\alpha')}}\right], \text{ endlich}$$

$$R_{-\mu} = \sqrt{\left[1 - 2\cos(\alpha+\alpha') e^{+\mu(\alpha+\alpha')} + e^{+2\mu(\alpha+\alpha')}\right]}.$$

So findet man für das Beispiel ad A wegen $\alpha = 15^0, \alpha' = 45^0$ und $\mu = \frac{1}{4}$

$$\mathfrak{S}_\mu = 1{\cdot}299\, S.$$

Auch ist

$$\mathfrak{S}_\mu \,.\, \mathfrak{S}_{-\mu} = S^2 \text{ oder } \mathfrak{S}_\mu : S = S : \mathfrak{S}_{-\mu}.$$

Vergleicht man die hier gefundenen Resultate mit jenen, wo keine Reibung angenommen ist, so folgt

$$\mathfrak{S}_{-\mu} > \mathfrak{S}_o,\ \mathfrak{v}_{-\mu} > \mathfrak{v}_o,\ \mathfrak{h}_{-\mu} < \mathfrak{h}_o,\ \delta_{-\mu} < \delta_o \text{ und } R_{-\mu} > R_o,$$

wesshalb in diesem Falle ad B verglichen mit dem Falle ad A die Vor- und Nachtheile der Reibung sich geradezu verkehren.

Für die Praxis, wo man offenbar den Eintritt beider Fälle ad A und B zu gewärtigen hat, können daher die einseitig vorhandenen Vortheile, welche durch die Vermehrung der Reibung zwischen den Ketten und ihrem Lager erreicht werden könnten, nicht in Betracht kommen, so dass nur die Nachtheile einer solchen Anordnung übrig bleiben. Hieraus schliesst man, dass es vortheilhaft ist, die Reibung zwischen den Ketten und ihren Lagern auf den Landpfeilern auf ein Minimum zu bringen.

§. 314.

Mittelpfeiler. In den §§. 310, 311, 312 und 313 handelt es sich nur um sogenannte Landpfeiler. Bei den Mittelpfeilern hingegen ist es jedenfalls vorzuziehen, die Ketten mit ihrem Lager und dieses wieder mit den Pfeilern fest zu verbinden, welches letztere mittelst Verankerungsketten, die von den Pfeilerköpfen bis in das untere Pfeilermauerwerk geführt werden, in zweckmässiger Weise geschehen kann. Dabei ist die Pfeilerstärke nach der ungünstigsten Belastungsweise zu beurtheilen, welche indessen nicht mehr bei dem Eintritte der grössten zufälligen Belastung auf der ganzen Brücke, sondern augenscheinlich dann stattfinden wird, wenn von den zu beiden Seiten eines Mittelpfeilers vorhandenen Brückenfeldern nur das eine zufällig belastet, das andere aber von einer solchen Belastung ganz frei ist. Doch gilt auch bei den Mittelpfeilern die schon bezüglich der Herstellung der Landpfeiler gemachte Bemerkung,

dass nämlich bei der Aufführung des Mauerwerkes mit der grössten Vorsicht zu Werke gegangen, insbesondere für eine genaue und innige Verbindung der einzelnen Steine und Steinschichten unter einander Sorge getragen, und zur möglichsten Verhinderung ungleicher Setzungen das gemischte Mauerwerk vermieden werden soll.

§. 315.

Verankerung der Spannketten an ihrer Wurzel. Dieser Verankerung ist eine grosse Aufmerksamkeit zuzuwenden, indem ein Versehen in dieser Hinsicht leicht den Ruin der ganzen Kettenbrücke herbeizuführen im Stande ist. Durch Rechnung kann man zwar den Zug in den Spannketten finden, und daraus rückwärts auf die nöthige Solidität der erwähnten Befestigungsweise schliessen, doch kann diese letztere selbst auf verschiedene Art stattfinden. Ohne in das Detail der bisher zur Anwendung gekommenen Befestigungsarten einzugehen, das besser aus den speciellen Beschreibungen von ausgeführten Kettenbrücken zu studiren ist, sei hier nur bemerkt, dass es jedenfalls am sichersten erscheint, die Spannketten in grosse Massen von solid construirtem Mauerwerk derart zu verankern, dass sich die Wirkung des Kettenzuges so ziemlich auf das ganze massenhafte Mauerwerk erstreckt, ohne dass einzelne kleinere Theile desselben herausgerissen werden können. Zugleich ist aber auch die Anordnung so zu treffen, dass die Oxydation der Kettenglieder ferne gehalten, und so der Schwächung derselben möglichst entgegengewirkt werde.

Fehler-Verzeichniss.

Seite.	Zeile.	statt:	lies:
8	11 v. u.	$\Delta l_1 + \Delta l_2$	$(\Delta_1 l + \Delta_2 l)$
9	14 „	Fructionszeichen	Functionszeichen
11	7 v. o.	$K' O' V'$	$K O V'$
12	1 „	kann man mit	kann mit
12	11 v. u.	Erklärungspunct	Erklärungsgrund
13	3 u. 6 „	K	k
14	20 v. o.	müsse.	müssen.
28	1 v. u.	Nothrücken	Nothbrücken
42	18 v o.	Gleichung (12)	Gleichung (13)
48	14 „	$r = 160$ und 125000	$r = 240$ und $m = 125000$
48	17 „	$0{\cdot}1024\, l$	$0{\cdot}2304\, l$
48	22 „	1 : 4	1 : 9
49	2 v. u.	0·1024	0·2304
49	1 „	1·28	2·88
50	22 v. o.	indess die des Schmiedeeisens nicht	auch die des Schmiedeeisens
50	5 v. u.	sid	sind
56	4 „	derselben	der Kraft oder der Kräfte
56	3 „	theilen.	theilen, welche eine solche Biegung hervorbringt oder hervorbringen.
89	10 v. o.	$\alpha^2 \beta$	$\alpha^2 \beta^2$
93	13 „	$\frac{d^2 y}{dx}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
111	1 „	$(c - x)$	$(c - x)^2$
112	5 v. u.	$s_1 = \frac{h R z}{l}$	$s_1 = \frac{h' R z}{l}$
126	3 „	$\frac{1}{6} r f$	$\frac{1}{6} r f \beta$
140	16 v. o.	$\frac{1}{4}(Q_3 + \frac{1}{2} Q_4) = M$	$\frac{1}{4}(Q_3 + \frac{1}{2} Q_4) l = M$
141	1 „	h'	$h' l$
141	2 „	h''	$h'' l$
161	7 „	h'	h'^2

Seite.	Zeile.	statt:	lies:
166	1 v. o.	${}^{3}a$	a^{3}
166	2 „	${}^{2}r$	r^{2}
207	5 v. u.	$\frac{aT}{\alpha'}$	$\frac{aT}{\alpha''}$
221	11 v. o.	des	dieses
225	9 v. u	$\frac{t'}{h}$	$\frac{t'}{h'}$
240	19 v. o.	$+(2n-1)^{2}]$;	$+(2n-1)^{2}]FH_{1}^{2}$;
240	22 „	$+(2n-1)^{2}]$.	$+(2n-1)^{2}]FH_{1}^{2}$.
261	26 „	zwischer	zwischen
299	1 v. u.	Relationen	Relationen (151)
326	5 v. o.	l^{3}	l^{2}
334	13 „	Werthe	Gleichungen
352	14 „	l^{6}	l^{3}
355	2 „	l^{2}	l^{3}
361	1 v. u.	624	264
379	5 v. o.	D_{n-1}	D_{n+1}
380	3 „	$\frac{\Delta N+2}{2}$	$\frac{\Delta N+1}{2}$
393	1 v. u.	1·10065	1·0065
417	16 „	nur	nun
455	6 „	$=$	$<$
466	12 „	Berbin-	Verbin-
474	6 v. o.	Werthe a	Werthe a'
536	1 „	3. und 4.	4. und 5.
541	8 v. u.	Formeln.	Formeln
541	5 „	f''	f'''
568	3 v. o.	ad 6	ad 7.

Höhere Ingenieur-Wissenschaften.

(Zweiter Band.)

Theorie

des

Erddruckes und der Futtermauern,

mit

besonderer Rücksicht auf das Bauwesen.

Von

Georg Rebhann,

o. ö. Professor für Baumechanik und Brückenbau am k. k. polytechnischen Institute zu Wien, k. k. Baurath, Ritter des kais. österr. Franz Joseph-Ordens, Doctor der Philosophie und Magister der freien Künste zu Giessen, etc.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.

WIEN.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1871.

Uebersetzungsrecht vorbehalten.

VORREDE.

Das vorliegende Buch bildet den zweiten Band des Werkes über höhere Ingenieurwissenschaften, von welchem der erste Band, enthaltend: die „Theorie der Holz- und Eisen-Constructionen", im Jahre 1855 erschienen ist.

Nicht nur zum Gebrauche für die Vorlesungen des Verfassers an der hiesigen technischen Hochschule bestimmt, wird dieser zweite Band auch den in der Praxis sich bewegenden Ingenieuren nützliche Dienste leisten.

Neues, Verbessertes und Vervollständigtes in der Theorie des Erddruckes und der Futtermauern gelangt nämlich hiermit zur Veröffentlichung, und namentlich sind es die grafischen Darstellungen der bezüglichen Eigenschaften und Resultate, worauf die Aufmerksamkeit gelenkt wird.

Die Spitze der Neuerungen bildet der auf den activen Erddruck Bezug nehmende Satz, dass es ein Prisma vom grössten Drucke, von welchem seither immer die Rede war, eigentlich gar nicht gibt, vielmehr alle in einem gegebenen Falle am

Fusse der Stützwand zusammenlaufend und an diese sich anlehnend gedachten Erdprismen einen und denselben Erddruck ausüben.

In analoger Weise gilt dies auch in Bezug auf den passiven Erddruck oder den Widerstand der Erde gegen eine daran gepresste Wand. Hier fällt nämlich die bisherige Annahme eines Prisma's vom kleinsten passiven Drucke hinweg, indem nachgewiesen wird, dass alle in einem gegebenen Falle am Fusse der Wand zusammenlaufend und an diese sich anlehnend gedachten Erdprismen einen und denselben Widerstand gegen das Anpressen der Wand leisten.

Wohl aber gibt es jederzeit ein Bruch- oder gefährliches Erdprisma, das unter allen sonstigen Erdprismen zunächst der Gefahr des Lostrennens, somit des Herabstürzens, beziehungsweise Zurückschiebens ausgesetzt ist. Es ist dies übereinstimmend mit dem Verhalten fester, elastischer Körper, bei welchen in Folge ihrer Beanspruchung ebenfalls Bruch- oder gefährliche Stellen entstehen. Es zeigt sich zwar schliesslich, dass das Bruch- oder gefährliche Erdprisma mit demjenigen gleichbedeutend ist, welches man bisher als Erdprisma vom grössten, beziehungsweise kleinsten Drucke (je nachdem entweder der active oder der passive Erddruck in Betracht kommt) bezeichnete, indessen kann dieses Ergebniss dem Werthe der neuen Darstellung keinen Abbruch thun, weil dieselbe jedenfalls mehr sachgemäss ist, und zudem die irrige Vorstellung beseitiget, wozu die älteren Methoden Anlass geben.

Nach diesen wird man nämlich zu der Ansicht verleitet, als würde das Prisma vom grössten, beziehungsweise kleinsten Drucke wirklich einen grösseren, beziehungsweise kleineren Druck ausüben, als alle übrigen Erdprismen, was jedoch keineswegs

stattfindet und füglich nicht stattfinden kann, weil in einem gegebenen Falle die Wand, hinter welcher das Erdreich aufgeschichtet ist, nur einen bestimmten Druck erleidet, dessen Rückwirkung nicht nur mit dem Drucke des Bruch- oder gefährlichen Erdprisma's, sondern auch mit jenem aller sonstigen Erdprismen, die auf die ganze Wand drücken, im Gleichgewichte sein muss.

Von den grafischen Darstellungen sind insbesondere diejenigen hervorzuheben, welche — gestützt auf die jeweilig zusammengehörigen zwei neuen, eben so einfachen wie merkwürdigen und besonders praktisch benützbaren Hauptregeln (177) und (178), (288) und (289), (472) und (473), (481) und (482) — allgemein zeigen, wie man das Bruch- oder gefährliche Erdprisma, so wie die Grösse des Erddruckes selbst ganz leicht construiren kann, und zwar sowohl in Bezug auf den activen, als auch in Bezug auf den passiven Erddruck, dann nicht nur ohne, sondern auch mit Berücksichtigung des Reibungswiderstandes an der Stützwand.

Die überall geschehene Zurückführung der Wirkung des Erddruckes auf jene einer tropfbaren Flüssigkeit von einem gewissen specifischen Gewichte ist geeignet, die Vorstellung über jene Wirkung zu erleichtern; zu diesem Verfahren gab übrigens auch das Bestreben Veranlassung, die bezüglichen Endresultate in einfache und für die Ausübung bequeme Formeln und Tabellen zu bringen.

In den Untersuchungen über die Stabilität der Futtermauern wurden neben den Berechnungen gleichfalls grafische Methoden angegeben, übrigens auch die Festigkeitsverhältnisse der Mauersteine berücksichtiget, so wie die nöthigen Bemerkungen über die Mittellinie des Druckes im Mauerwerke beigefügt.

Indem der Verfasser diesen zweiten Band der Oeffentlichkeit übergibt, hat er behufs der vollständigen Erfüllung seiner, in der Vorrede zu dem ersten Bande gemachten Zusage noch in Absicht, die Theorie der Gewölbe nachfolgen zu lassen.

Wien, im December 1870.

Der Verfasser.

INHALTS-UEBERSICHT.

Erste Abtheilung.

Zweite Abtheilung.

Erster Abschnitt.

Erstes Capitel.

Zweites Capitel.

Drittes Capitel.

Zweiter Abschnitt.

Erste Abtheilung.

Theorie des Erddruckes.

Vorbemerkungen.

---

§. 1.

Eigenschaften des Erdreiches. Unter Erdreich oder Erde im weitesten Sinne versteht man Dammerde, Sand, Lehm und Schotter, auch zusammengeworfene Fels- oder sonstige Steintrümmer. Zwischen den einzelnen Theilchen des Erdreichs findet ein Aneinanderhaften statt. Der Zusammenhalt ist zwar nicht so gross, wie bei den eigentlich festen Körpern, er setzt indessen jedenfalls Verschiebungskräften, wenn solche auftreten, einen gewissen Widerstand entgegen, welcher im Allgemeinen von folgenden drei Ursachen herrührt:

1. Von der Adhäsion, mit welcher die sich berührenden Erdtheilchen an einander haften.

2. Von der Cohäsion, womit dieselben unter einander zusammenhängen.

3. Von der Reibung zwischen den auf einander gelagerten Erdtheilchen in Folge ihrer rauhen Oberfläche, sowie ihrer gegenseitigen Lagerung, und zwar nach Massgabe des Druckes, mit welchem sie aneinander gepresst werden.

Die Adhäsion ist so geringfügig, dass sie nicht besonders in Betracht gezogen zu werden braucht, es bleiben daher nur die Widerstände in Folge der Cohäsion und der Reibung zu berücksichtigen übrig.

Die Cohäsion ist je nach der Erdgattung und dem Zustande derselben (locker oder gestossen, trocken, feucht oder durchnässt) verschieden.

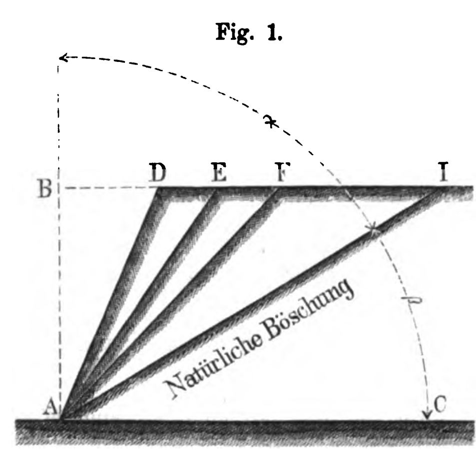
Dammerde und Lehm haben verhältnissmässig die bedeutendste Cohäsion, namentlich im verdichteten Zustande. Bei dem Sande ist dieselbe nur gering, und bei reinem Schotter oder zusammengeworfenen Steintrümmern geradezu gleich Null zu setzen.

Auch die Reibungsverhältnisse sind nach der Erdgattung und dem Zustande, in welchem sich solche befindet, mehr oder weniger verschieden. So z. B. ist der fragliche Reibungswiderstand bei dem Flussschotter wegen seiner glatten Steine ein geringerer, als bei dem eckig gestalteten Schlägelschotter.

§. 2.

Natürliche Böschung und Grösse der Cohäsion des Erdreiches. Wird auf einer Bodenfläche $\overline{AC}$ (Fig 1) Erde aufgeschüttet, so bemerkt man, dass — falls diese Bodenfläche rauh genug ist, um ein Ausrutschen der Erde darauf zu verhindern — im Grenzzustande des Gleichgewichtes eine gewisse steilste Erdböschung $\overline{AD}$ sich bildet; so dass unter einer steileren Böschung ein Gleichgewichtszustand in dem freistehenden, ungebölzten Erdkörper nicht mehr möglich ist.

Fig. 1.



Die gedachte steilste Böschung wird offenbar von den Reibungs- und Cohäsionswiderständen abhängen, welche sich der Verschiebung der Erdtheilchen entgegensetzen. Je grösser diese Widerstände sind, desto steiler wird die erwähnte Böschung sein, und umgekehrt.

Bleibt die aufgeschüttete Erdmasse den Einflüssen der Temperatur und des Wetters ausgesetzt, so wird die Cohäsion an der Böschungsfläche $\overline{AD}$ allmälig zerstört, daher nach einer gewissen

Zeit ein Theil der Erde abrutschen und sich eine neue Böschung $\overline{AE}$ bilden, welche weniger steil, als die anfängliche ist. Die Ursache hievon ist leicht einzusehen. Gesetzt es sei anfänglich trockenes, später nasses Wetter vorhanden, hierauf folge Frost, dann Thauwetter und endlich wieder Trockenheit. Zunächst wird das Wasser in die Zwischenräume der Erdmasse an der Böschungsfläche bis auf eine gewisse Tiefe eindringen, sodann gefrieren, wobei es ein grösseres Volumen annimmt und die Erdtheilchen daselbst mehr oder weniger aus ihrem Zusammenhange bringt, wornach schliesslich, wenn Thauwetter und darauf folgend wieder Trockenheit eintritt, die Cohäsion der Erdtheilchen an, und zum Theile unter der Böschungsfläche derart zerstört oder verringert wird, dass sich dieselben auf der anfänglichen Böschungsfläche nicht mehr erhalten können, sondern bis zur Erreichung einer weniger steilen Böschung abrutschen müssen. Wiederholen sich solche Einflüsse, so werden sich nach und nach immer minder steile Böschungen $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ u. s. w. herausstellen, bis endlich eine solche Böschung $\overline{AJ}$ entsteht, auf welcher sich die Erdtheilchen schon vermöge des alleinigen Reibungswiderstandes im Gleichgewichte erhalten, und daher, ohne ein gewaltsames Zuthun, nicht weiter abrutschen können.

Diese besondere Böschung nennt man die **natürliche Böschung des Erdreiches**. Der entsprechende Böschungswinkel $CAI = \beta$ ist offenbar der Reibungswinkel für die Reibung von Erde auf Erde.

Nennt man den diessfälligen Reibungs-Coefficienten f, so hat man daher:

$$\text{tang}\ \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = f \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Mitunter ist es zweckmässiger, statt β die Ergänzung zu einem Rechten, nämlich den $\measuredangle\ BAI$, welcher α heissen soll, einzuführen.

Hiernach erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha + \beta) = 90^\circ,\ f = \text{tang}\ \beta = \text{cotg}\ \alpha \\ \text{tang}\ \alpha = \frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{1}{f} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die natürliche Böschung wird sich in allen jenen Fällen gleich anfänglich genau oder fast genau einstellen, in welchen keine oder nahezu keine Cohäsion zwischen den Erdtheilchen stattfindet, wie z. B. bei reinem Schotter, trockenem Sande. Dagegen kann Dammerde und Lehm, besonders im angestampften Zustande, in welchem die Cohäsion bedeutend ist, eine sehr steile Böschung annehmen, welche die natürliche weit überragt.

Was überhaupt die Cohäsion des Erdreichs, nämlich die Widerstandsfähigkeit gegen die Trennung seiner Theile in der Richtung der Trennungsfläche, betrifft, so soll dieselbe per Quadrateinheit dieser letzteren mit c bezeichnet werden, so dass man für ein cohäsionsloses Materiale $c = o$ zu setzen hat.

Es ist hier am Platze, diejenigen Methoden anzudeuten, nach welchen man bestrebt gewesen ist, sowohl die Reibungs- als auch die Cohäsionsverhältnisse von Erdarten in directer Weise zu bestimmen.

Handelt es sich um ein ganz oder fast cohäsionsloses Erdmateriale, so kann man entweder sogleich die natürliche Böschung desselben, also den Reibungswinkel, oder aber zuerst den Reibungscoefficienten, und erst hieraus jenen Winkel bestimmen. Ersteres Verfahren hat Martony*) eingeschlagen, zu welchem Zwecke er einen parallelopipedischen, oben offenen Kasten mit horizontal gestelltem Boden und beweglicher Vorderwand gebrauchte.

Um die natürliche Böschung zu finden, „wurde die Erde“ — so sagt Martony, pag. 82 — „mit Schaufeln in den Kasten geworfen, und dabei darauf gesehen, dass diese gestreut, und die Anschüttung lagenweise emporsteigend gemacht wurde; sobald die Anschüttung rückwärts die Höhe des Kastens erreicht hatte, und

---

*) Versuche über den Seitendruck der Erde, ausgeführt auf höchsten Befehl des Herrn General-Genie-Directors, Erzherzog Johann, kaiserliche Hoheit, und verbunden mit einer theoretischen Abhandlung über diesen Gegenstand nach Coulomb und Français nebst einer Nachweisung älterer Versuche dieser Art von Carl Martony de Köszegh, Major im k. k. Ingenieur-Corps. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staats-Aerarial-Druckerei. 1828.

die gebildete Böschung sich gegen den vorderen Rand des Kastens verlief, wurden auf dem oberen Rande der Anschüttung noch einige Schaufeln Erde sachte gelegt, und mittelst einer gehobelten Latte vorwärts gestrichen. War die gebildete Böschung wirklich jene, welche die Theorie für die natürliche, d. h.: für die den Reibungswinkel bestimmende annimmt; so konnte sich die abgestrichene Erde auf der gebildeten Böschung nicht erhalten, sondern gleitete bis zu dem Fusse derselben hinab, ohne eine Veränderung an dieser Böschung dadurch zu bewirken. Mittelst der beiden Lineale" — welcher sich nämlich Martony zur Abmessung bediente — „wurde sonach die Anlage der so gefundenen Böschung genau gemessen und gezeichnet. Man erhält nie den wahren Winkel der natürlichen Böschung, wenn man die Erde ohne die beschriebene Vorsicht aufwirft, weil durch den Fall der geworfenen Erde der ruhenden eine Bewegung mitgetheilt wird, durch welche auch solche Erde, welche in Ruhe geblieben wäre, mit abgerissen wird, und die Böschung sich sanfter bildet, als sie nach der Voraussetzung sein sollte."

Obgleich nicht in Abrede gestellt wird, dass durch den beschriebenen Vorgang, bei Aufwendung der nöthigen Umsicht, Resultate erzielt werden dürften, welche sehr oft der Wahrheit nahe liegen, so darf denn doch nicht übersehen werden, dass, auch abgesehen von dem Einflusse der in dem betrachteten Falle allerdings nur gering vorausgesetzten Cohäsion, die Reibung des Erdreiches an den Seitenwänden des Kastens immerhin eine störende Einwirkung verursachen und hiedurch die schliesslich als natürliche Erdböschung angesehene Neigung etwas zu steil erhalten werden kann. Ohne Zweifel würde man besser ganz ohne Zuhilfename eines Kastens vorgehen, nämlich das Erdreich bloss auf einer rauhen Grundfläche aufschütten, oben horizontal abstreichen, sonst aber vollkommen frei halten, um es so nach allen Seiten hin abfallen zu lassen. Ausser der von Martony für derartige Versuche mit Recht empfohlenen Vorsicht ist übrigens auch nothwendig, die endgiltige Beobachtung nicht augenblicklich zu machen, sondern hiezu einige Zeit verstreichen zu lassen, um

wahrzunehmen, ob nicht von der entstandenen Böschung nachträglich noch einiges abrollt, was anfänglich durch die, wenn auch schwache Cohäsion zwischen den Erdtheilchen, zurückgehalten wurde. Selbstverständlich muss man darauf sehen, dass ein solches nachträgliches Abrollen nicht etwa durch gewaltsame Einwirkungen von aussen her begünstiget werde.

Hagen*) hat sich ebenfalls mit Versuchen über den Seitendruck der Erde beschäftiget; er wählte hiezu, um durch die Cohäsion des Materiales nicht beirrt zu werden, insbesondere feinen staubartigen Sand, wie er bei Berlin gewöhnlich vorkommt, in vollkommen trockenem Zustande, dann auch Streusand und Schrot. Auf Seite 20 des gedachten Buches sagt er über den Winkel der natürlichen Böschung Folgendes:

„Es entsteht die Frage, auf welche Art man diesen Winkel unmittelbar messen kann, denn seine Grösse stellt sich sehr verschieden dar. Schüttet man nämlich diesen Sand in einen Kasten, dem die eine Seitenwand fehlt, so dass sich hier die Böschung darstellt und man lässt vorsichtig längere Zeit hindurch kleine Sandmassen darüber fliessen, so finden die einzelnen Körnchen noch immer Unebenheiten, in welche sie gerade passen und indem sie hier liegen bleiben, so wird die Böschung merklich steiler und sie nimmt eine Neigung von 58 auch wohl von 57 Graden**) gegen das Loth an; man kann sie auch noch steiler machen, wenn man eine Platte darauf legt und fest andrückt, und alsdann den Kasten noch leise neigt. In diesem Falle ist die Ablagerung der Körnchen aber keineswegs zufällig, wie sie bei der Aufschüttung in den beschriebenen Versuchen war, sondern man hat künstlich eine recht dichte und geschlossene Oberfläche erzeugt. Wenn man andererseits den Kasten mit einer beweglichen Wand versieht, und letztere nach der Füllung fortnimmt, so stürzt keineswegs die

*) Handbuch der Wasserbaukunst von Dr. G. Hagen, geheimem Oberbaurath und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin. 2. Theil. 1. Band. Königsberg in Preussen bei den Gebrüdern Bornträger. 1844.

**) Nämlich beim Streusande.

ganze Sandmasse, die sich über der Dossirung befindet, plötzlich und mit grosser Erschütterung heraus. Dieses geschieht nur mit demjenigen Prisma, welches den stärksten Druck ausübt: ihm folgen minder schnell andere Sandmassen und zuletzt rieseln die Körnchen wieder leise herab, und lagern sich wieder sehr steil übereinander. Der untere Theil der Böschung, über den mehr Sand herüberfliesst, als über den oberen, nimmt jedesmal eine steilere Neigung an, als der letzte. Der obere Theil, der am meisten noch die natürliche Ablagerung der Körnchen beibehält, zeigt schon eine Neigung von 60 Graden, oder eine noch grössere, besonders, wenn die Aufschüttung ebenso sanft, und ohne allen Druck der Erschütterung gemacht war, wie dieses bei den Versuchen über den Seitendruck wirklich geschah. Es ist indessen auch in diesem Falle die Oberfläche schon verändert worden: ich schüttete daher den Sand noch sehr vorsichtig in ein Gefäss und bemühte mich, dasselbe möglichst gleichmässig bis zum Rande zu füllen, worauf ich es sehr leise abstrich und dadurch eine horizontale Oberfläche der Schüttung darstellte; nunmehr neigte ich das Gefäss, auf einem passenden Gestelle, nach einer Seite und beobachtete die Oberfläche. Die Körnchen hatten sich offenbar ursprünglich in der Art übereinander gelagert, dass sie sich in der Richtung nach unten gehörig stützten, bei der veränderten Stellung des Gefässes trat indessen die Tendenz zu einer seitwärts gerichteten Bewegung ein, gegen welche keine vollständige Unterstützung stattfand; und so geschah es gewöhnlich, dass bei einer Neigung von 65 Graden gegen das Loth sich schon eine kleine stossweise Bewegung zeigte, die aber jedesmal spätestens bei 63 Graden eintrat. Diese erste sehr kleine Bewegung war es aber, die bei den Versuchen über den Seitendruck des Sandes schon die Wand fortstiess, und sie muss daher auch bei der Bestimmung der Reibung berücksichtigt werden."

„Ich versuchte es demnächst, noch die Grösse der Reibung bei diesem Sande auf andere Art zu bestimmen, nämlich durch Messung des Zuges, der erforderlich ist, um eine gewisse Sandmasse über die andere fortzuschieben. Dieser Weg ist auch sonst

schon versucht worden, doch hat er, so viel bekannt, zu keinem Resultate geführt, indem fremdartige Umstände dabei einen zu bedeutenden Einfluss behalten."

„Man füllte nämlich einen Kasten mit Sand und legte auf selbigen einen eben so grossen, oder wenigstens eben so breiten Kasten, der jedoch weder oben noch unten einen Boden hatte. Nachdem der letztere gleichfalls mit Sand angefüllt war, so versuchte man ihn fortzuziehen, oder man liess ihn von selbst herabgleiten, indem der untere Kasten seitwärts geneigt wurde. Es drückte indessen die Füllung des oberen Kastens keineswegs mit ihrem ganzen Gewichte auf die des unteren, vielmehr wurde sie zum Theile auch von den Wänden des oberen getragen, und sonach mass man nicht die Reibung zwischen Sand und Sand, sondern grossentheils die zwischen Holz und Holz."

„Ich änderte den Apparat in der Art ab, dass ich dem beweglichen Kasten nur eine geringe Höhe gab und ihn alsdann mit einem losen Boden bedeckte, auf dem Gewichte aufgestellt waren. Die letzteren übten in Verbindung mit der dünnen Sandschicht den Druck gegen die untere Sandfläche aus, und nur ein sehr kleiner Theil dieses Druckes konnte bei der geringen Höhe der oberen Wände sich auf diese übertragen. Ferner berührte der obere Kasten den unteren gar nicht, sondern ruhte vorn und hinten auf Walzen, wodurch jede merkliche fremde Reibung entfernt wurde. An dem beweglichen Kasten war ein Seidenfaden befestigt, der über eine Rolle lief und die Wagschale trug: in die letztere floss feiner Sand hinein, der die Vermehrung des Zuges bewirkte."

„Der Wagen nahm jedesmal zuerst eine unmerkliche Bewegung an, deren Eintritt man nicht genau wahrnehmen konnte, und wodurch er etwa um $^1/_4$ Linie sich fortbewegte, alsdann aber zeigten sich einige plötzliche Stösse. Bei dem ersten derselben sperrte ich den Sandzufluss in die Schale ab und wog diese nebst ihrem Inhalte."

Auf diese Weise hatte H a g e n den Reibungscoefficienten und hieraus den natürlichen Böschungswinkel des, seinen Versuchen

unterzogenen Füllungsmateriales, und zwar durchschnittlich für Streusand mit $\alpha = 64^0\ 55'$ und für den feinen, staubartigen, weissen Sand mit $\alpha = 56^1/_2$ Graden gefunden.

Die von Hagen gemachte Ausstellung in Beziehung auf ein ähnliches älteres Verfahren, bei welchem die zwei Versuchskästen mit den verticalen Wänden sich berührten, und hiedurch die gleitende Reibung zwischen Holz und Holz in's Spiel kam, hat ihre volle Berechtigung, daher dieselbe auch rücksichtlich derjenigen Versuche, welche von Martony mit Hilfe eines solchen Kastenapparates vorgenommen wurden, ihre Geltung hat.

Martony hat indessen seinen Apparat vorzugsweise nur für stark cohärirende Erde benützt, um die Cohäsionsgrösse c hiefür zu finden. Auf diese letztere hat aber, wie man sehen wird, der dem Apparate anklebende Mangel jedenfalls einen bloss unwesentlichen Einfluss, daher — um auf die Bestimmung der fraglichen Erdcohäsion überzugehen — zunächst dasjenige angeführt zu werden verdient, was Martony in seinem Buche, pag. 87, hierüber sagt, nämlich:

„Der Vorgang bei der Erhebung der Cohäsion fest gestossener Erde war folgender:“

„Ein Cubikfuss, und wenn es nöthig war auch deren zwei, lockerer Erde, wurden zuerst gewogen, und nur diese Erde zu dem Versuche verwendet. Der auf dem Tischblatte befestigte Kasten wurde mit lockerer Erde gefüllt, und diese mit kleinen Stösseln gut gestossen, womit man so lange fortfuhr, bis der Kasten eben voll war. Hierauf setzte man den beweglichen Kasten dergestalt auf, dass die Seitenwände desselben genau auf die des unteren passten. Diejenige bereits festgestossene Erde, welche sich in dem Raum des oberen*) Kastens befand, wurde an der Oberfläche wieder aufgelockert, damit sich die folgende Anschüttung damit gut verbinden konnte; und nun wurde auch der obere Kasten lagenweise mit lockerer Erde gefüllt, und jede Lage gut gestossen.“

*) Offenbar ein Schreibfehler, indem es hier heissen muss „unteren“.

„Nachdem die Anschüttung auf diese Art bewerkstelligt worden war, beschwerte man die Wagschale so lange mit Gewichten, bis die obere Anschüttung von der unteren dadurch losgerissen wurde. Das verwendete Gewicht (Bleischrote gegen Ende des Versuches) sammt dem Gewichte der Wagschale hatte die Cohäsion der Erde und die Reibung auf der abgerissenen Fläche zu überwinden. Der Zapfen der Rolle war bei diesem Apparate in Bezug auf den Durchmesser derselben so klein, dass man die Reibung an demselben vernachlässigen konnte. Um die Cohäsion rein zu finden, musste die Reibung auf der abgerissenen Fläche erhoben werden. Zu diesem Ende wurde der obere Kasten in seine erste Lage zurückgeschoben und die geleerte Wagschale neuerdings mit Gewichten beschwert, bis der Kasten in eine fortgesetzte Bewegung gebracht wurde, und daher die Reibung überwunden war. Das zuletzt gefundene Gewicht von dem ersteren abgezogen, gab die Cohäsion der Erde auf der Grundlage des beweglichen Kastens, und konnte auf die Einheit der Fläche berechnet werden. Man erhob sodann das Gewicht der in dem beweglichen Kasten enthaltenen festgestossenen Erde, berechnete aus dem gefundenen Gewichte jenes für die Einheit des Körpers, und fand aus dem Vergleiche der Gewichte im lockeren und gestossenen Zustande die Verdichtung, welche die Erde durch das Stossen erhalten hatte, bei welcher ihr die erhobene Cohäsion zukam.“

Hieraus ist vor Allem zu entnehmen, dass nach dem Vorgange M a r t o n y's das Resultat für den Cohäsionswiderstand zwischen den Erdtheilchen stets aus der Differenz zweier erhobenen Gewichte abgeleitet wurde, von denen allerdings jedes einen unrichtigen Werth dadurch bekommen musste, weil dabei, wie bereits oben angedeutet, wegen der unmittelbaren Berührung der Versuchskästen auch die Reibung zwischen Holz und Holz in's Spiel kam. Insoferne aber in einem solchen Falle der jedem der beiden Gewichte anklebende Fehler, wenn auch nicht ganz genau, doch jedenfalls sehr nahe, ein und derselbe sein muss, und dieserwegen das Resulat für die Differenz der beobachteten Gewichte durch jene Fehler nur unwesentlich beeinflusst werden

kann, haben die bezüglichen Versuchsergebnisse Martony's immerhin einen besonderen Werth, weshalb hier Veranlassung genommen wird, die vorzüglichsten in der angedeuteten Beziehung in der nachfolgenden Tabelle aufzuführen.

I. Tabelle.

Post-Nr.	Versuchs-Erdreich	Erdgewicht pr. Cubikfuss in Pfunden*). Zustand		Cohäsion der gestampften Erde pr. □ Fuss in Pfunden	Natürliche Böschung der lockeren Erde	
		locker	gestampft	c*)	tg α	α
1	Dammerde	staubartig 79·6	89·9	96·8	—	—
2	„	natürlich feucht 70·7	94·4	100·0	1·10	47° 44′
3	Lehmerde	staubtrocken 85·0	89·6	93·7	1·21	50° 26′
4	„	etwas feucht 77·7	107	166·6	1·21	50° 26′

Hieraus geht hervor, dass durch Anstampfen verdichtete Damm- und Lehmerde eine sehr bedeutende Cohäsion anzunehmen fähig ist.

Ausser der besprochenen directen Bestimmung der Cohäsionsgrösse c aus Versuchen, gibt es noch, wie man später sehen wird, indirecte Methoden, welche selbst bei nur wenig cohärirendem Erdreiche angewendet werden können. Ja eine derselben gibt sogar Veranlassung, gleichzeitig auch den natürlichen Böschungswinkel zu bestimmen.

Indem man sich vorläufig auf diese Bemerkungen beschränkt, wird hier nur noch eine Tabelle beigefügt, aus welcher die bei-

*) Die Daten sind auf Wiener Mass und Gewicht bezogen, welche Bemerkung auch für die Folge gilt, insoferne nicht ausdrücklich andere Mass- und Gewichtseinheiten zu Grunde gelegt werden.

läufigen Werthe des natürlichen Böschungswinkels α für lockeres Erdmateriale, und des mit g bezeichneten absoluten Gewichtes pr. Cubikfuss nach Massgabe verschiedener Zustände, in denen das Erdreich sich befindet, entnommen werden können.

II. Tabelle.

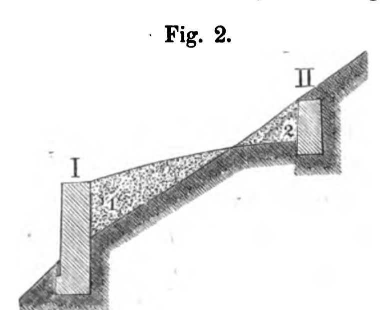
Erdreich		Natürliche Böschung α	Natürliche Böschung tg α	Gewicht eines Cubikfusses in Pfunden g	Anmerkung
Dammerde	locker, trocken oder etwas feucht	48°—52°	1·1—1·3	70— 80	In Ermanglung ausreichender Erfahrungsresultate sind manche Daten nur abschätzungsweise ermittelt worden.
	trocken und gestossen	48°—52°	1·1—1·3	90 –100	
	locker, mit Wasser gesättigt	55° - 60°	1·4—1·7	100—106	
Sand	trocken oder etwas feucht	53°—56°	1·3—1·5	93—100	
	mit Wasser gesättigt	60°—63°	1·7—2·0	110—115	
Lehm	geschlämmt, trocken oder etwas feucht	48°—52°	1·1—1·3	85— 88	
	gestossen	48°—52°	1·1—1·3	95—107	
	mit Wasser gesättigt	55°—60°	1·4—1·7	110—115	
Reiner Schotter		48°—55°	1·1—1·4	90 - 100	

§. 3.

Erddruck auf eine Stützwand. Wenn Erdreich hinter einer Wand aufgeschichtet ist, so kann diese in so lange keinen Druck erleiden, als ihre Neigung nicht steiler, als diejenige wird, nach welcher sich das Erdreich vermöge der Cohäsions- und Reibungswiderstände auch ohne Stützwand noch im Gleichgewichte erhalten kann. Im Gegenfalle wird auf die Wand ein Druck ausgeübt werden, welchem dieselbe den nöthigen Widerstand entgegensetzen muss, wenn ein Absturz des Erdreiches verhindert werden soll.

In der Regel werden gemauerte Stützwände zur Ausführung gebracht, und dieselben allgemein „Futtermauern“ genannt. Hiebei pflegt man bei Strassen und Eisenbahnen zwischen Stütz- und Wandmauern zu unterscheiden. Wird nämlich die Fahrbahn, wie in der Figur 2 dargestellt ist, zum Theile (in 1) aufgedämmt, und zum Theile (in 2) in die Berglehne eingeschnitten, so nennt man, falls beiderseits Futtermauern angeordnet werden, jene in I, welche der Wirkung des Erddruckes und der auf der Bahn entstehenden zufälligen Belastung ausgesetzt ist, eine Stützmauer, die andere in II aber, welche den Absturz der eingeschnittenen Berglehne zu verhindern hat, eine Wandmauer.

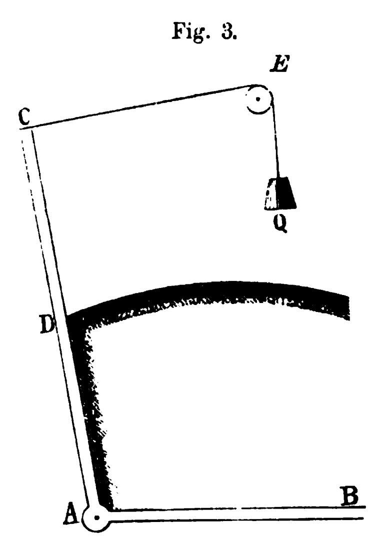
Fig. 2.



§. 4

Activer und passiver Erddruck, oder Druck und Widerstand der Erde. Wenn, wie in der Fig. 3, hinter einer Wand $\overline{AC}$, welche mit dem Boden $\overline{AB}$ in A eine charnierartige Verbindung haben soll, anliegende Erde sich befindet, und man stellt sich vor, dass diese Wand vermittelst eines Gewichtes Q, das an einer über eine feste Rolle E laufenden Schnur hängt, im

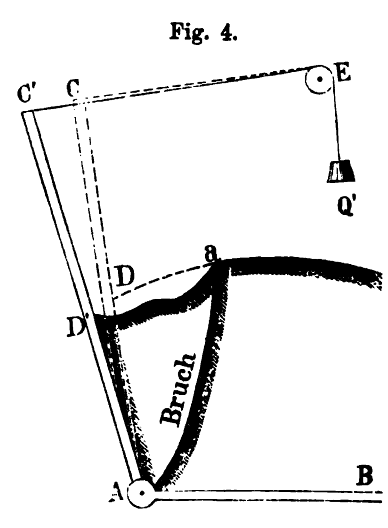
Fig. 3.



Gleichgewichte sich befindet, so leuchtet wohl auf den ersten Anblick ein, dass es innerhalb gewisser Grenzen unendlich viele Gewichte geben werde, welche der geforderten Bedingung entsprechen. Diese Grenzen sind durch Gewichte, etwa Q' und Q'' bestimmt, wovon das eine ein Minimum und das andere ein Maximum ist.

Es wird nämlich ein kleinstes Gewicht Q' (Fig. 4) geben, das den Einen Grenzzustand des Gleichgewichtes und zwar in dem Augenblicke bezeichnet, in welchem der Uebergang zur Bewegung in dem, in der Figur angedeuteten Sinne zu beginnen droht. Dieser Grenzzustand für das Gleichgewicht kann daher eben sowol als ein solcher für die Bewegung (als Bewegungsbeginn) angesehen werden; etwa so, wie die Nulle die Grenze zwischen den positiven und negativen Zahlen bildet, und eben so gut als Anfangsglied für das Positive, wie als solches für das Negative gilt. Jedenfalls wird bei der geringsten Verkleinerung des Gewichtes Q' eine Bruchfläche $\widehat{Aa}$ im Erdreiche entstehen, und der abstürzende Erdkörper ADa die Stützwand zum Ausweichen nach vorwärts bringen. Da in diesem Falle der Eindruck gleichsam activ wirkt, während sich die Stützwand passiv verhält, so kann man Ersteren den activen Erddruck nennen; welcher, wie man erkennt,

Fig. 4.



geradezu in demjenigen Grenzzustande des Gleichgewichtes auftritt, dem das Minimalgewicht Q' entspricht. Vermehrt man das Minimalgewicht Q' allmälig, so wird die Stützwand immer mehr und mehr an das Erdreich angepresst, und es muss auch jetzt noch insolange Gleichgewicht bestehen, bis man das Maximalgewicht Q'' erreicht hat, bei dem der andere Grenzzustand des Gleichgewichtes eintritt, so dass jetzt, wie in der Figur 5 angedeutet, die Bewegung im entgegengesetzten Sinne zu beginnen droht. Bei der geringsten Vermehrung des Gewichtes Q'' wird neuerdings eine Bruchfläche im Erdreiche (etwa $\widehat{Ab}$) sich bilden, und der Erdkörper ADb durch die nach rückwärts ausweichende Stützwand verschoben. Indem in diesem Falle die Stützwand gewissermassen activ, das Erdreich aber passiv sich verhält, so kann man den hier auftretenden Gegendruck der Erde auch den **passiven Erddruck** nennen, welcher offenbar aus dem Maximalgewichte Q'' zu beurtheilen ist. Augenscheinlich ist der active Erddruck derjenige, welcher auf eine feststehende Stützwand durch das dahinter liegende Erdmateriale ausgeübt wird; der passive Erddruck aber stellt eigentlich den grössten Widerstand der Erde vor, auf welchen man rechnen kann, wenn eine Stützwand von Aussen her mit Gewalt an das Erdreich angepresst wird. Daher kann man auch, anstatt den Erddruck „activ“ und „passiv“ zu nennen, gemeinhin die Bezeichnungen „**Druck**“ und „**Widerstand**“ der Erde wählen.

Fig. 5.

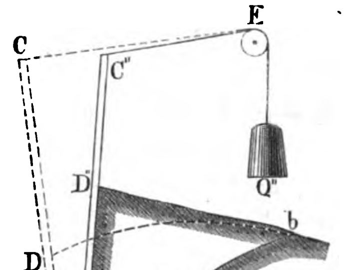
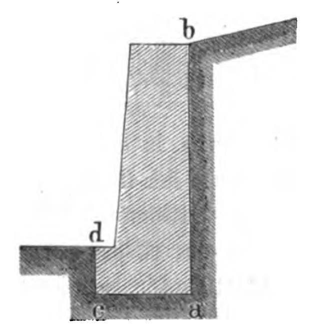


Fig. 6.

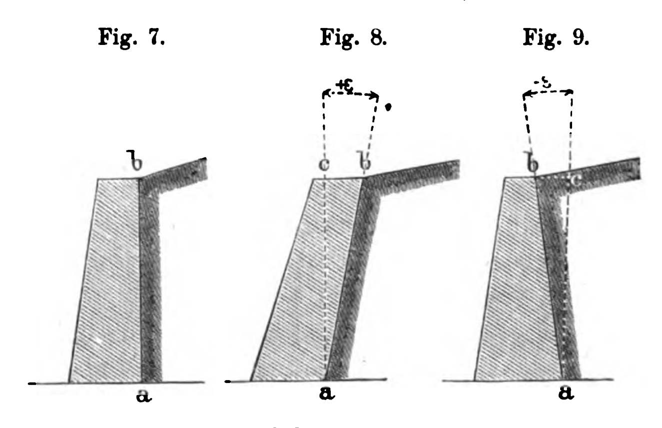


Diese beiden Wirkungen kommen in der That bei den Futtermauern in Betracht. Eine solche Mauer (Figur 6) erleidet nämlich an ihrer Rückwand ab offenbar den activen Erddruck, während ihr Fundament an den Vorgrund bei cd angepresst wird, so dass das Feststehen des Ganzen auch von dem passiven Erddrucke innerhalb der Fundamenthöhe $\overline{cd}$, d. h. von dem Widerstande abhängig ist, den dieser Vorgrund leisten kann.

§. 5.

Lage der Stützwand. Nennt man den Neigungswinkel der Stützwand gegen das Loth allgemein ε, so können insbesondere drei Fälle eintreten, je nachdem $\varepsilon = o$, positiv oder negativ ist. Für eine verticale Stützwand ($\overline{ab}$ Fig. 7) ist $\varepsilon = o$; im Uebrigen soll der Winkel ε für eine liegende Stützwand ($\overline{ab}$ Fig. 8) als positiv, für eine überhängende Stützwand ($\overline{ab}$, Fig. 9) aber als negativ gelten.

Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.



Die Böschung einer Wandfläche pflegt man in der Praxis durch das Verhältniss anzugeben, welches zwischen der Böschungsanlage $\overline{bc}$ (Fig. 8, 9) und der Wandhöhe $\overline{ac}$ stattfindet, daher, wie man sieht, die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels (tg ε) bewerthet. Die gangbarsten Werthe für tg ε sind: 0, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$. Die folgende Tabelle III enthält hiefür die entsprechenden Winkelmasse, so wie die correspondi-

renden Grössen von cos ε und $\frac{1}{\cos \varepsilon}$, weil auch diese letzteren später benöthigt werden.

III. Tabelle.

tg ε	ε	cos ε	$\frac{1}{\cos \varepsilon}$	tg ε	ε	cos ε	$\frac{1}{\cos \varepsilon}$
0	0	1	1	$^1/_8$	7° 7′ 30″	0 9923	1 0078
$^1/_{12}$	4° 45′ 49″	0·9965	1·0035	$^1/_6$	9° 27′ 44″	0·9864	1·0138
$^1/_{10}$	5° 42′ 38″	0·9950	1·0050	$^1/_5$	11° 18′ 36″	0·9806	1·0198
$^1/_9$	6° 20′ 25″	0·9938	1·0062	$^1/_4$	14° 2′ 11″	0·9701	1·0308

§. 6.

Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand. Da diese Reibung als Widerstand auftritt, so nimmt sie jedenfalls einen Einfluss auf die Wirkung des Erddruckes.

Der bezügliche Reibungscoefficent soll μ und der dazu gehörige Reibungswinkel ϱ genannt,

also $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ .... (3)

gesetzt werden. Ist eine solche Reibung nicht in Rechnung zu bringen, so hat man $\mu = \varrho = o$. Wird sie eben so gross angenommen, wie die Reibung zwischen den Erdtheilchen, so ist $\mu = f$, somit $\varrho = \beta = (90^0 - \alpha)$ und $\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha$. Diese zwei Fälle sind, wie sich ergeben wird, die zumeist beachtenswerthen.

§. 7.

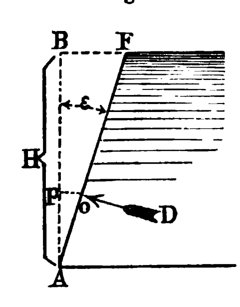
Tropfbare Flüssigkeiten. Eine tropfbare Flüssigkeit besteht aus einzelnen Theilchen, von denen man annimmt, dass sie einem gegenseitigen Verschieben weder einen Reibungs-, noch einen Cohäsions-Widerstand entgegensetzen. Auch die Reibung zwischen einer solchen Flüssigkeit und der Stützwand, an welche sie anliegt, wird als verschwindend betrachtet. Wenn daher ange-

nommen wird, dass hinter einer Stützwand anliegend Wasser oder eine andere tropfbare Flüssigkeit sich befindet, so kann vorhergesehen werden, dass die bekannten hydrostatischen Gesetze auch aus der Theorie des Erddruckes sich sogleich ergeben müssen, falls man hierin sämmtliche Reibungs- und Cohäsionswiderstände gleich Null setzt. Durch diese Bemerkung ist man im Stande, die Richtigkeit der Untersuchungen über den Erddruck, und zwar in jedem Stadium derselben, wenigstens einigermassen zu controliren; indem man überall nachsieht, ob nach Weglassung der sämmtlichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände in der That die hydrostatischen Gesetze zum Vorschein kommen. Selbstverständlich gibt dieses Merkmal keinen untrüglichen Beweis für die Richtigkeit der bezüglichen Theorie des Erddruckes; allein Eines ist demungeachtet über allen Zweifel erhaben, nämlich: dass jede solche Theorie, welche das vorangedeutete Merkmal nicht an sich trägt, zu verwerfen sein wird.

Weiter ist klar, dass, weil bei einer tropfbaren Flüssigkeit kein Unterschied zwischen der Grösse des activen und jener des passiven Druckes bestehen kann, auch in der Theorie des Erddruckes ein solcher Unterschied unter der Bedingung wird wegfallen müssen, sobald man — auf die tropfbaren Flüssigkeiten übergehend — wieder die Reibungs- und Cohäsionswiderstände verschwinden lässt.

Aus diesen Gründen, und weil, wie sich später zeigen wird, die Wirkung des Erddruckes mit jener einer tropfbaren Flüssigkeit in einfacher Weise verglichen werden kann, ist es zweckmässig, vorerst auf die hydrostatischen Gesetze Bezug zu nehmen.

Fig. 10.



Befindet sich hinter einer um den Winkel ε geneigten Stützwand von der Höhe H (Fig. 10) eine tropfbare Flüssigkeit, welche das Gewicht w per Cubikeinheit hat, so ist der Normaldruck D auf diese Wand für jede Einheit ihrer Länge (letztere normal auf die Ebene der Figur gedacht) bekanntlich:

$$D = \text{Wandfläche} \times \tfrac{1}{2}\ \text{Druckhöhe} \times w$$
$$= \overline{AF} \times \text{Länge } 1 \times \tfrac{1}{2} H \times w;$$

daher wegen $\overline{AF} = \frac{H}{\cos \varepsilon}$:

$$D = \tfrac{1}{2} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Der Mittelpunkt des Druckes, d. h. der Angriffspunkt für die Resultirende aus den sämmtlichen Pressungen, welche die einzelnen Wandelemente erleiden, liegt diesfalls in dem dritten Theile der Druckhöhe von der Basis an gerechnet; es ist daher:

$$\overline{Ao} = \tfrac{1}{3} \overline{AF} = \tfrac{1}{3} \frac{H}{\cos \varepsilon}, \text{ und } \overline{Ap} = \tfrac{1}{3} H \ldots (5),$$

wenn $\overline{op}$ horizontal gezogen ist.

Wie aus der Formel (4) zu ersehen, wird die Grösse des hydrostatischen Druckes unter sonst gleichen Umständen für $\varepsilon = o$, also für eine verticale Stützwand am kleinsten, mit der Zunahme von ε aber immer grösser, wobei es übrigens keinen Unterschied macht, ob ε positiv oder negativ, d. h. ob die Stützwand liegend oder überhängend angeordnet ist.

Grafisch kann man den hydrostatischen Druck durch das Gewicht des in der Figur 11 schraffirten Flüssigkeitsprismas AFM ausdrücken, dessen Rückseite $\overline{AM}$ so gelegen ist, dass hiedurch der Winkel $CAF = (90 - \varepsilon)$ halbirt, also $\measuredangle CAM = \measuredangle FAM = (45^0 - \tfrac{1}{2} \varepsilon)$ und $\overline{AF} = \overline{FM}$ wird. Denn dieses Gewicht ist:

Fig. 11.

$$\tfrac{1}{2} w \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{FM} = \tfrac{1}{2} w \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{AF} = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},$$

somit in der That gleich dem hydrostatischen Drucke D nach der Formel (4).

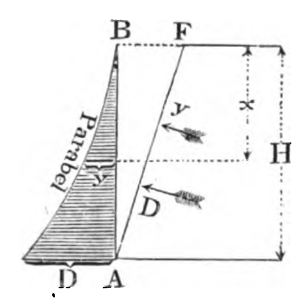
Grafische Darstellungen anderer Art ergeben sich aus der Betrachtung des Gesetzes, nach welchem der hydrostatische Druck mit der Druckhöhe sich verändert. Ist nämlich (Fig. 12) D der

Druck auf die Druckhöhe H, und y jener auf die Druckhöhe x, so hat man offenbar:

$$D = \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \text{ und } y = \frac{1}{2} w \frac{x^2}{\cos \varepsilon}, \text{ also:}$$

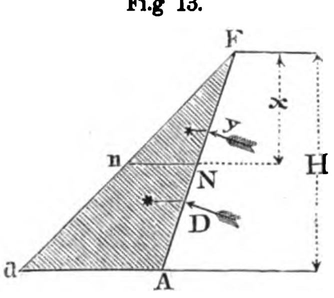
$$y : D = x^2 : H^2 \text{ und } y = D \frac{x^2}{H^2},$$

Fig. 12.



welche Relation als die Gleichung einer gemeinen Parabel angesehen werden kann, wobei die Druckhöhen die Abscissen und die Druckgrössen die Ordinaten, erstere vertical und letztere horizontal situirt, vorstellen, wie dieses thatsächlich in Fig. 12 angedeutet ist. In demselben Verhältnisse, wie die Ordinaten y mit den Abscissen x zunehmen, wächst daher der hydrostatische Druck mit der Druckhöhe, wodurch das Veränderungs-Gesetz anschaulich gemacht ist.

Fi.g 13.



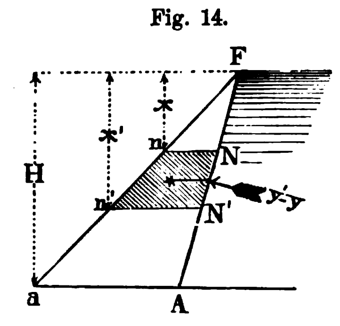
Zu dem gleichen Zwecke kann man auch die in der Figur 13 ersichtliche grafische Darstellung benützen, bei welcher man sich vorstellt, dass die Grösse des hydrostatischen Druckes D auf die Höhe H durch die Dreiecksfläche AFa, dagegen jene des Druckes y auf die Höhe x durch die Dreiecksfläche NFn repräsentirt wird, weil diese beiden Dreiecksflächen sich ebenfalls wie die Quadrate der Höhen verhalten, wobei die bezüglichen Grundlinien $\overline{Aa}$ und $\overline{Nn}$ horizontal gezogen sind.

Der Mittelpunkt für den Druck in der jeweiligen Druckhöhe liegt stets in dem dritten Theile derselben von ihrem unteren Ende an gerechnet, also geradezu in dem Niveau des Schwerpunktes derjenigen Dreiecksfläche, welche als Repräsentant des Druckes gilt. In der obigen Figur sind die Schwerpunkte der

dortigen zwei Dreiecksflächen von den Höhen H und x mit Sternchen (*) angezeigt.

Aus der letzterwähnten grafischen Darstellung ergibt sich zugleich, dass der hydrostatische Druck, welcher auf den Wandstreifen $\overline{NN'}$ (Fig. 14) zwischen den Druckhöhen x und x' stattfindet und aus der Differenz der zu diesen Höhen gehörigen Druckwerthe y und y besteht, stets proportional ist: der Differenz der dazu gehörigen Constructions-Dreiecke, also dem Flächenraume des vorliegenden Trapezes $NN'nn'$; ferner, dass der Mittelpunkt des Druckes $(y'—y)$ in demselben Niveau liegt, in welchem der Schwerpunkt dieses Trapezes (auch hier mit * bezeichnet) situirt ist.

Fig. 14.



§. 8.

Halbflüssige Körper. Darunter pflegt man solche Körper zu verstehen, deren Theilchen unter einander keine oder fast keine Cohäsion haben, daher einer gegenseitigen Verschiebung nur den jeweiligen Reibungswiderstand entgegensetzen. Von den Erdgattungen kann man daher namentlich den reinen Sand und Schotter dazu rechnen. Von anderen Körpern solcher Art sind beispielsweise Streusand, Schrotkügelchen, Hirsekörner u. s. w. zu nennen. Die Bezeichnung „halbflüssig“ kommt offenbar daher, weil derlei Körper, den Uebergang von den eigentlichen festen zu den tropfbar flüssigen bildend, in Bezug auf ihr Verhalten dazwischen einzureihen sind.

Erstes Hauptstück.

Eigentlicher oder activer Erddruck.

§. 9.

Theilung der Untersuchungen. Wie aus dem §. 4 hervorgeht, hat man zwischen dem eigentlichen oder activen Erddrucke, und dem Widerstande der Erde oder dem passiven Erddrucke zu unterscheiden. Indem die Untersuchungen über Letzteren dem zweiten Hauptstücke vorbehalten bleiben, wird in dem gegenwärtigen Hauptstücke insbesondere der active Erddruck behandelt.

Erster Abschnitt.

Allgemeiner Fall bezüglich des activen Erddruckes auf eine ebene Stützwand.

§. 10.

Umstände, welche als allgemeine angenommen werden. In Bezug auf die Lage der Stützwand, auf die Form der Oberfläche des dahinter anliegenden Erdreiches, auf die Gewichts-, Reibungs- und Cohäsionsverhältnisse desselben, so wie auf die Grösse der Reibung zwischen Erde und Stützwand, werden vorerst keinerlei einschränkende Voraussetzungen gemacht, so dass die diesfälligen Umstände als ganz allgemeine aufzufassen

sind. Hiebei soll die Stützwand selbst an der dem Erddrucke ausgesetzten Seite eben sein, und auf vollkommen fester, unnachgiebiger Basis stehend angenommen werden.

Erstes Capitel.

Vorgang bei der Bestimmung des activen Erddruckes. Neues und älteres Verfahren.

§. 11.

Bruchfläche im Erdkörper. Ist Erdreich hinter einer Stützwand gelagert, und lässt man diese letztere ausweichen, so stürzt dasselbe — insofern es sich vermöge der im Innern auftretenden Cohäsions- und Reibungswiderstände ohne Stützwand nicht zu erhalten vermag — zum Theile ab; es entsteht nämlich, wie schon in der Figur 4 angedeutet, eine Bruchfläche $\widehat{Aa}$.

Ungeachtet mancher Bemühungen ist es bisher nicht gelungen, über die genaue Form der Bruchfläche vollständig in's Klare zu kommen. Nur in dem Einen Falle, den Scheffler in der fraglichen Beziehung einer eingehenden Untersuchung unterzogen (siehe Crelle's Journal für Baukunst, Band XXX, Seite 198), war dieses möglich.

Die Voraussetzungen Scheffler's hiebei sind folgende:

Homogenität und Cohäsionslosigkeit der Erde, horizontale und unbegrenzte Oberfläche der Erdmasse hinter der Stützwand, und absolute Glattheit dieser Letzteren, so dass eine Reibung zwischen der Wand und der Erde nicht in Rechnung kommt.

Unter diesen besonderen Voraussetzungen ergibt sich als Resultat, dass die Bruchfläche wirklich eine Ebene, normal auf das Profil der Erdmasse stehend, sei.

Werden diese Voraussetzungen nicht gemacht, so wäre man natürlicher Weise, vom wissenschaftlichen Standpunkte aus, im Allgemeinen nicht mehr berechtigt, die Bruchfläche gleichfalls als vollkommen eben anzunehmen; indessen zeigt die Erfahrung, dass eine solche Annahme als Annäherung zur Wahrheit in den

meisten praktischen Fällen immerhin zugelassen werden darf, wie dieses auch alle Fachmänner, welche sich bisher mit dem Gegenstande beschäftigten, gelten liessen.

Aus diesem Grunde, und weil dermalen wohl nichts anderes übrig bleibt, wird in dem vorliegenden Buche die Annahme einer ebenen Bruchfläche beibehalten, in der Voraussetzung, dass die Erdmasse homogen sei, und diese nebst der Stützwand eine unbegrenzte Ausdehnung (normal auf das Profil gedacht) einnehme.

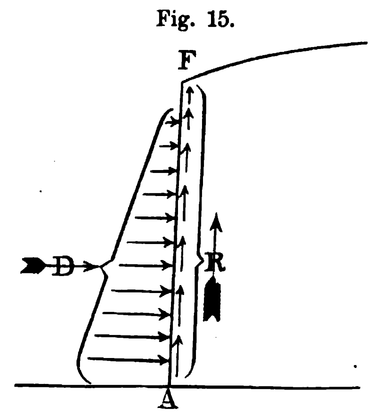
Die sämmtlichen auf die Wirkung des Erddruckes Bezug nehmenden Berechnungen werden stets für die Einheit der Erdkörper- und Stützwandlänge durchgeführt werden, wobei die Vorstellung zu verbinden ist, dass diese Länge überall auf der Ebene der dem Texte beigefügten Querprofil-Zeichnungen normal steht.

§. 12.

Ueber die Grösse und die Richtung des activen Erddruckes und des Widerstandes der Stützwand. Der active Erddruck ist nach den Erklärungen im §. 4 für den durch die dortige Figur 4 erläuterten Grenzzustand des Gleichgewichtes zu bestimmen.

In diesem Zustande erleidet jedes Wandelement einen gewissen unendlich kleinen Normaldruck, und alle diese Druckelemente setzen sich zu einer Resultirenden D (Figur 15) zusammen, deren Grösse zugleich den normalen Widerstand der Stützwand angibt. Ausserdem tritt aber nach der Wandrichtung $\overline{AF}$ die durch den Normaldruck D entstehende Reibung nach den in der Figur angedeuteten Richtungspfeilen als Widerstand gegen das Herabsinken der Erdmasse auf. Die Resultirende dieses Reibungswiderstandes sei R.

Fig. 15.



Wenn in dem, in Rede stehenden Grenzzustande des Gleichgewichtes die ganze mögliche Reibungsgrösse absorbirt wird, so hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (3) offenbar:

$$R = \mu D = D \operatorname{tg} \varrho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Denkt man sich die Wand weggenommen, anstatt derselben aber zur ungeänderten Erhaltung des Gleichgewichtes der Erdmasse die sämmtlichen Theilchen derselben, welche früher an die Wand angepresst wurden, künstlich durch Kräfte gehalten, welche überall den bezüglichen normalen und den Reibungswiderstand der Wandelemente ersetzen, und geht man bei dieser Betrachtung sogleich auf die beiderseitigen Resultirenden D und R über, so erhält man zur Versinnlichung des Gleichgewichtszustandes die Figur 16. Jetzt kann man die beiden Wandwiderstände D und R zu einer Hauptresultirenden $\mathfrak{P}$ (siehe linke Seite der Figur 16) zusammensetzen, und das Ganze so ansehen, wie wenn die Stützwand, einschliesslich der Reibungswirkung, ursprünglich einen Widerstand entgegengesetzt hätte, welcher der Grösse und der Richtung nach durch die vorgefundene Hauptresultirende $\mathfrak{P}$ dargestellt ist. Augenscheinlich ist wegen $\frac{R}{D} = \mu = \operatorname{tg} \varrho$, der Winkel, welchen $\mathfrak{P}$ mit D einschliesst, geradezu gleich dem Reibungswinkel ϱ; somit bestehen folgende Relationen:

Fig. 16.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \sqrt{D^2 + R^2} = \frac{D}{\cos \varrho} = \frac{R}{\sin \varrho}, \\ D &= \sqrt{\mathfrak{P}^2 - R^2} = \mathfrak{P} \cos \varrho = R \operatorname{cotg} \varrho, \\ R &= \sqrt{\mathfrak{P}^2 - D^2} = \mathfrak{P} \sin \varrho = D \operatorname{tg} \varrho \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

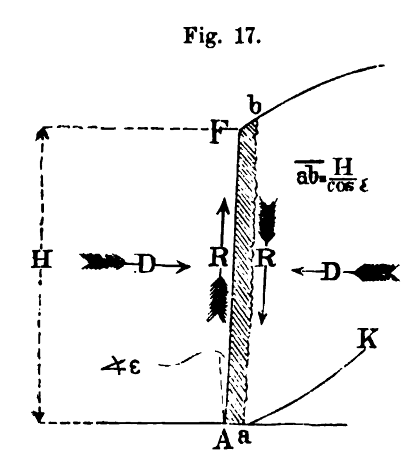
Gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet, wie der combinirte Wandwiderstand $\mathfrak{P}$, muss, vermöge des vorausgesetzten Gleichgewichtes, die Resultirende des Erddruckes sein, daher diese letztere so anzunehmen ist, wie sie auf der rechten Seite der Figur 16 mittelst des Pfeiles $\mathfrak{P}$ angedeutet erscheint. Selbstverständlich kann man diesen Erddruck $\mathfrak{P}$ ebenfalls in die zwei Seitenkräfte D und R zerlegen, von denen die erste normal gegen die Stützwand, die andere aber längs der Wandböschung nach abwärts wirkt.

Wird die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand ausser Acht gelassen, also $\mu = \varrho = o$ gesetzt, so verschwindet die Reibungsgrösse R, und es bleiben dann nur die auf die Wand normal wirkende Kraft und die Gegenkraft, nämlich rechtseitig D als Erddruck und linkseitig D als Wandwiderstand, übrig.

Rücksichtlich der Giltigkeit der in den Gleichungen (6) und (7) ausgedrückten Gesetze ist jedoch noch eine nähere Untersuchung anzuknüpfen.

Zu diesem Behufe betrachte man den Zustand derjenigen Erdschichte $AFab$ (Figur 17), welche unmittelbar an die Mauerböschung $\overline{AF}$ angepresst wird, und deren rechtseitige Begrenzungsfläche $\overline{ab}$ in unendlich kleiner Distanz zur Mauerböschung parallel laufend gedacht wird.

Fig. 17.



Da in dieser Fläche $\overline{ab}$ der Zusammenhalt der erwähnten Erdschichte mit der dahinter gelegenen Erdmasse vorhanden ist, so kann der an der Wand auftretende Reibungswiderstand niemals grösser werden, als der Maximalwiderstand ist, den jener Zusammenhalt zu leisten vermag.

Dieser Maximalwiderstand besteht aus der Summe zweier Einzelwiderstände, welche aus der Reibung und aus der Cohäsion zwischen den Erdtheilchen in der Fläche $\overline{ab}$, und zwar in dem Augenblicke einer daselbst entstehenden Trennung entspringen würden. Der Reibungswiderstand wäre dann fD, der Cohäsionswiderstand aber $c \,.\, \overline{ab} \,.\, 1 = c \,.\, \frac{H}{\cos \varepsilon}$, wenn (wie im §. 2) c das Mass der Cohäsion für die Quadrateinheit in der Trennungsfläche $\overline{ab}$ bedeutet, und die ganze Rechnung, im Sinne der Schlussbemerkung des §. 11, für die Einheit der Stützwand und Erdkörperlänge durchgeführt wird.

Der ausgesprochenen Bedingung gemäss erhält man jetzt die Relation:

$$R \overline{\gtrless} fD + \frac{cH}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

und hieraus, wenn die Gleichung (6) möglich sein soll, wegen $R = \mu D$, die weitere:

$$\mu \overline{\gtrless} f + \frac{cH}{D \cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Nur unter diesen Verhältnissen wird im Grenzzustande des Gleichgewichtes der g a n z e Reibungswiderstand an der Stützwand absorbirt.

Ist zwischen den Erdtheilchen eine Cohäsion nicht vorhanden, also $c = o$, so erhält man die Bedingung:

$$\mu \overline{\gtrless} f, \text{ oder } \varrho \overline{\gtrless} \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

d. h. es darf dann der Coefficient, beziehungsweise der Winkel, für die Reibung zwischen der Stützwand und der Erde nicht grösser sein, als jener für die Reibung zwischen den Erdtheilchen, widrigenfalls man nicht mehr berechtigt wäre, den an der Stützwand hervorgerufenen Reibungswiderstand mit seinem grössten Werthe (μD) in Rechnung zu bringen.

Bei dem Vorkommen einer Cohäsion zwischen den Erdtheilchen aber kann, wie man sieht, immerhin $\mu > f$, d. i. $\varrho > \beta$ werden, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, worüber die Relation (9) Aufschluss gibt.

Trifft jedoch in einem vorkommenden Falle die Relation (9) nicht zu, so wird der Grenzzustand des Gleichgewichtes nicht mehr unmittelbar an der Stützwandfläche, sondern in der benachbarten Fläche $\overline{ab}$ im Erdkörper selbst eintreten; d. h. es werden sich im Beginne des Ausweichens der Stützwand zwei Trennungsflächen in der Erdmasse bilden, nämlich die Eine: $\overline{AK}$, von welcher im §. 11 überhaupt die Rede war, und die Andere $\overline{ab}$, welche hart an der Wandböschung und zu dieser parallel situirt ist; während die Erdschichte $AFab$ von der Stützwand nicht abgeschoben wird, sondern daran haften bleibt. Wären die Erdtheilchen unendlich klein, so hätte die erwähnte Erdschichte auch nur eine unendlich kleine Dicke; insoferne aber jene Annahme eigentlich nicht statthaft ist, wird man sich thatsächlich vorstellen müssen, dass die fragliche Erdschichte eine endliche, indessen immerhin bloss sehr kleine Dicke besitzt.

Offenbar ist es dann gerade so, wie wenn diese Erdschichte noch zur Stützwand selbst gehören, also die Trennungsfläche $\overline{ab}$ die eigentliche Druckfläche bilden, und der an letzterer entstehende Reibungswiderstand R mit einem eingebildeten Reibungs-Coeffiicienten μ' in Rechnung gebracht würde, welcher aus der Relation:

$$\mu' = f + \frac{cH}{D \cos \varepsilon} < \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

zu bestimmen ist.

Nennt man ϱ' den zu μ' gehörigen Reibungswinkel, so ist $\mu' = \operatorname{tg} \varrho'$, und man hat:

$$\operatorname{tg} \varrho' = \operatorname{tg} \beta + \frac{cH}{D \cos \varepsilon} < \operatorname{tg} \varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

worin ϱ' den Winkel bedeutet, den der schiefe Erddruck $\mathfrak{D}$ mit dem normalen D einschliesst.

Für $c = o$ ist insbesondere:

$$\varrho' = \beta = (90^0 - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Ist daher eine Cohäsion zwischen den Erdtheilchen nicht in Rechnung zu bringen, so schliesst für $\mu > f$ und $\varrho > \beta$ die Richtung des Erddruckes und jene des Widerstandes der Stütz-

wand mit dieser letzteren nur einen Winkel ein, welcher um den Reibungswinkel β von der normalen Richtung abweicht.*)

Aus dem Gesagten schliesst man, dass der in der Figur 16 angedeutete Declinationswinkel zwischen $\mathfrak{P}$ und D nur dann den Werth von ϱ erreichen kann, wenn die Relation (9) stattfindet, sonst aber nicht, da im Gegenfalle anstatt ϱ ein kleinerer Werth ϱ' zu setzen ist, welcher aus der Gleichung (12) ermittelt werden muss, so dass dann die Relation:

$$R = D \operatorname{tg} \varrho' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

in Anwendung zu bringen sein wird.

Uebrigens folgt aus den Erörterungen in diesem Paragraph, dass man den Widerstand einer Stützwand gegen den activen Erddruck auf zweierlei Art untersuchen kann. Entweder lässt man beide Widerstandskräfte D und R separat, oder aber gleich von vorne herein in ihrer Combination, als Hauptresultirende $\mathfrak{P}$, wirken. Wird die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand ausser Acht gelassen, also $\mu = \varrho = o$ gesetzt, so verschwindet die Grösse R, und es bleibt dann nur der normale Erddruck und der normale Wandwiderstand in Betracht zu ziehen, so dass dann die angedeuteten zwei Untersuchungsarten identisch werden.

§. 13.

Allgemeine Formel zur Berechnung des activen Erddruckes. I. Methode (neu). Es sei (Fig. 18) hinter der Stützwand $\overline{AF}$, mit dem Neigungswinkel ε gegen das Loth, anliegendes Erdreich vorhanden, welches einen solchen Druck ausübt, dass der normale Widerstand der Wand D und der Reibungswiderstand an derselben, nach aufwärts gerichtet, R sein soll. Zunächst ist für den hier in Betracht kommenden Grenzzustand

*) Dass für $c = o$ der fragliche Declinationswinkel zwischen $\mathfrak{P}$ und D (Fig. 16) in dem Falle, wenn $\varrho > \beta$ ist, nicht mehr mit ϱ, sondern mit β zu bemessen kommt, darauf hat schon Scheffler in seinem Werke „Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857“ hingewiesen.

des Gleichgewichtes auf Grundlage der Relationen (7) allgemein: $R = D \operatorname{tg} \varrho$ zu setzen, und hiebei nur zu beachten, dass zu Folge der Gleichung (14) unter den dort besprochenen ausnamsweisen Umständen ϱ' anstatt ϱ zu substituiren sein wird.

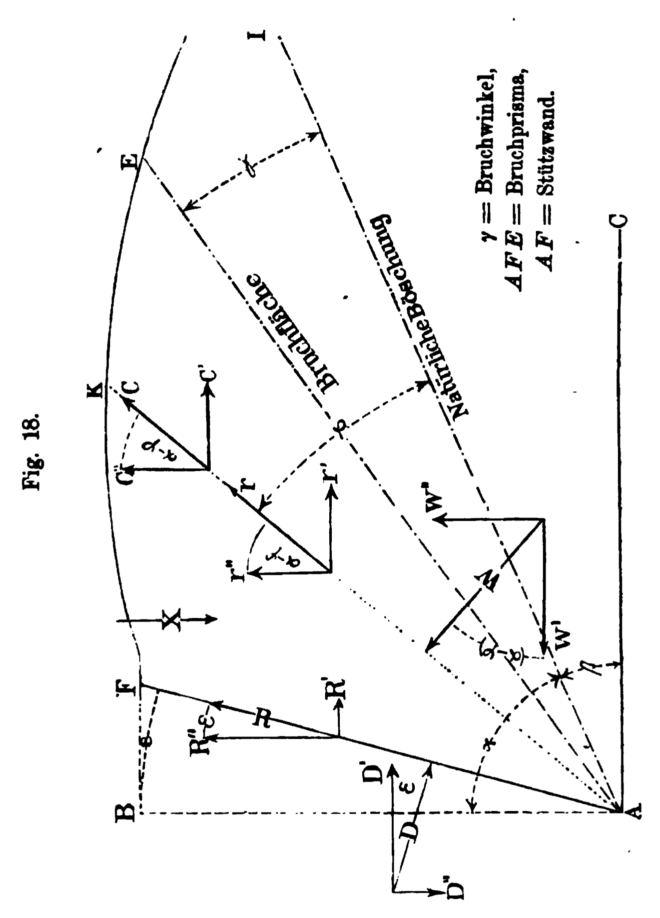


Fig. 18.

Die Bruchfläche im Erdreiche wird offenbar oberhalb der natürlichen Böschung, etwa in $\overline{AE}$ liegen, weil das Erdreich unter derselben nicht abstürzen kann. Um diese Bruchfläche, welche nach den Bemerkungen im §. 11 als eine durch den Fuss der Stützwand gehende Ebene angenommen wird, zu finden, unter-

suche man zunächst die Absturzwirkung eines beliebigen Erdprismas, welches zwischen der Stützwand und irgend einer durch den Fuss derselben gehenden Ebene $\overline{AK}$, die sich um den Winkel φ über die natürliche Böschung erhebt, gelegen ist.

Veranlasst wird die Absturzwirkung dieses Erdprismas lediglich durch das Gewicht desselben, welches mit X bezeichnet, und in dem Schwerpunkt wirkend gedacht werden soll, so dass für die Einheit der Längendimension des Erdkörpers das fragliche Gewicht mit:

$$X = g \,.\, \text{area } AFK$$

ausgedrückt ist, wenn g das Gewicht per Cubikeinheit der Erdmasse bezeichnet.

Dieses Gewicht ist die einzige auf den Erdabsturz abzielende Offensivkraft, der, ausser den an der Stützwand hervorgerufenen Defensivkräften D und R, noch die normale Reactionskraft W von Seite des unter der Fläche $\overline{AK}$ liegenden Erdreiches, dann diejenigen Widerstandskräfte entgegenwirken, welche in dieser Fläche aus den zwischen den Erdtheilchen vorhandenen Reibungs- und Cohäsionsverhältnissen entspringen, und beziehungsweise r und C heissen mögen. Die genannten sechs Kräfte X, D, W, R r und C müssen mit Rücksicht auf ihre Grösse und Richtung, welche letztere in der Figur durch Pfeile anschaulich gemacht ist, unter einander im Gleichgewichte stehen, und zwar sind voraussichtlich X, W, r und C, weil von dem Winkel φ abhängig, im Allgemeinen variable, dagegen D und R, wenn auch vorläufig noch unbekannte, doch jedenfalls constante Grössen, weil diese lediglich von dem factischen Widerstande herrühren, der sich im gegebenen Falle dem Absturze des Erdreiches überhaupt entgegensetzt.

Die Fläche $\overline{AK}$ wurde beliebig gerichtet angenommen, nur mit der einzigen Beschränkung, dass dieselbe nicht ausserhalb des Erdkörpers AFI fällt. Sie wird daher im Allgemeinen nicht die Bruchfläche $\overline{AE}$, welche für den Fall des Ausweichens der Stützwand sich im Erdreiche bildet, vorstellen, indem jene Bruch-

fläche nur unter einem bestimmten Werth für φ, etwa für $\varphi = \gamma$, entsteht, wobei $\gamma = \measuredangle EAI$ ist.

Hieraus folgt, dass im Allgemeinen die in der Fläche $\overline{AK}$ auftretenden Defensivkräfte r und C nicht die vollständige Reibung fW und die vollständige Cohäsion cS absorbiren, daher $r < fW$ und $C < cS$ sein wird, wenn man $\overline{AK} = S$ setzt, und zugleich auf die vorne (§. 2) angenommenen Bezeichnungen zurückblickt, wornach f den Coefficienten für die Reibung, c aber die per Quadrateinheit entfallende Cohäsionskraft zwischen den Erdtheilchen bedeutet.

Nur dann, wenn $\overline{AK}$ genau in die Bruchfläche $\overline{AE}$ fällt, ist geradezu $r = fW$ und $C = cS$ zu setzen, weil daselbst die betreffenden Reibungs- und Cohäsionswiderstände vollständig vernichtet werden.

Man wird daher, um alle Fälle in Bezug auf die Neigung der Fläche $\overline{AK}$ zu umfassen, schreiben müssen:

$$\left.\begin{array}{l} r \overline{\overline{<}} fW \\ C \overline{\overline{<}} cS \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} r = f' W \\ C = c' S \end{array}\right\} \ldots (15),$$

wenn man unter f' und c' zwei Werthe versteht, welche nicht grösser als f und beziehungsweise c werden können.

Indem nun, zu Folge der Relationen (1) und (2): $f = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha$ ist, so setze man analog damit auch:

$$f' = \operatorname{tg} \beta' = \operatorname{cotg} \alpha' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

wobei man zu beachten hat, dass

$$\left.\begin{array}{l} \beta' \overline{\overline{<}} \beta \\ \alpha' \overline{\overline{>}} \alpha \end{array}\right\} \text{ und } (\alpha' + \beta') = 90^0 \ldots . (17)$$

ist, und das Ungleichszeichen nur dann wegfällt, wenn die Fläche $\overline{AK}$ zur Bruchfläche $\overline{AE}$ wird.

Der Zahlenbruch $\frac{f'}{f} = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha'}{\operatorname{cotg} \alpha}$ zeigt an, mit welchem Antheile der in der Fläche $\overline{AK}$ schlummernde Maximal-Reibungswiderstand (fW) zur Erhaltung des Gleichgewichtes thatsächlich beansprucht wird. Die gleiche Bemerkung gilt für den Zahlenbruch $\frac{c'}{c}$ in Bezug auf den in derselben Fläche schlummernden

Maximal-Cohäsionswiderstand (cS). Geht die allgemein gewählte Fläche $\overline{AK}$ insbesondere in die Bruchfläche $\overline{AE}$ über, so sind ausnamsweise jene beiden Brüche der Einheit gleich.

Hiernach kann man allgemein setzen:

$$r = W \operatorname{tg} \beta' = W \operatorname{cotg} \alpha' \text{ und } C = c'S \; \ldots\ldots \; (18).$$

Es entsteht nun die Frage, unter welchen näheren Bedingungen das Gleichgewicht zwischen den oben angedeuteten sechs Kräften besteht.

Zu diesem Behufe beachte man, dass bei dem Umstande, als von der Stützwand und der Erdmasse stets ein Prisma mit der Einheit als Längendimension in Betracht steht, die genannten Kräfte in einer verticalen Profilebene liegen. Es herrscht dann Gleichgewicht, wenn in dieser Ebene weder eine fortschreitende, noch eine drehende Bewegung eintreten kann. Eine fortschreitende Bewegung wird nicht stattfinden, wenn die Resultirende sämmtlicher Kräfte gleich Null wird, also die Componenten davon sowohl in horizontaler als auch in verticaler Richtung verschwinden. Zur Verhinderung einer drehenden Bewegung ist nöthig, dass die algebraische Summe aus den statischen Momenten der Einzelkräfte, auf einen willkührlichen Drehungspunkt bezogen, gleich Null wird. Vorläufig soll blos von der ersten Bedingung Notiz genommen werden, weil dieselbe schon allein hinreicht, die Grösse des Erddruckes zu bestimmen. Auf die zweite Bedingung, in Bezug der statischen Kraftmomente, wird man später zurückkommen, wenn es sich darum handelt, den Mittelpunkt des Erddruckes zu bestimmen.

Um nun das Gesagte rechnungsmässig zur Anschauung zu bringen, zerlege man zunächst mit Ausnahme der Schwerkraft X, welche schon ursprünglich vertical wirkt, jede der übrigen fünf Kräfte in eine horizontale und verticale Componente. Die horizontalen Componenten sind in der Figur mit D', R', W', r' und C', die verticalen aber mit D'', R'', W'', r'' und C'' angedeutet, und zugleich findet man dort die Winkel eingeschrieben, welche zwischen den Kräften und ihren Componenten vorhanden sind.

Hiernach erhält man unter gleichzeitiger Rücksichtsname auf die Gleichungen (7) und (18) folgende Hilfswerthe:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D' = D\cos\varepsilon \\ D'' = D\sin\varepsilon \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} R' = R\sin\varepsilon = D\,\mathrm{tg}\,\varrho\,\sin\varepsilon \\ R'' = R\cos\varepsilon = D\,\mathrm{tg}\,\varrho\,\cos\varepsilon \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l} W' = W\cos(\alpha-\varphi) \\ W'' = W\sin(\alpha-\varphi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} r' = r\sin(\alpha-\varphi) = W\,\mathrm{cotg}\,\alpha'\sin(\alpha-\varphi) \\ r'' = r\cos(\alpha-\varphi) = W\,\mathrm{cotg}\,\alpha'\cos(\alpha-\varphi) \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} C' = C\sin(\alpha-\varphi) = c'\,S\sin(\alpha-\varphi) \\ C'' = C\cos(\alpha-\varphi) = c'\,S\cos(\alpha-\varphi) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (19).$$

Indem aber vermöge des erwähnten Gleichgewichtszustandes gegen Verschiebung nach horizontaler und verticaler Richtung die Hauptrelationen:

$$\left.\begin{array}{r} D' + R' - W' + r' + C' = 0 \\ X + D'' - R'' - W'' - r'' - C'' = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (20)$$

existiren, so findet man mit Hilfe der Werthe (19) weiter:

$$D\,[\cos\varepsilon + \mathrm{tg}\,\varrho\sin\varepsilon] - W\,[\cos(\alpha-\varphi) - \mathrm{cotg}\,\alpha'\sin(\alpha-\varphi)] + c'\,S\sin(\alpha-\varphi) = o,$$

$$X + D\,[\sin\varepsilon - \mathrm{tg}\,\varrho\cos\varepsilon] - W\,[\sin(\alpha-\varphi) + \mathrm{cotg}\,\alpha'\cos(\alpha-\varphi)] - c'\,S\cos(\alpha-\varphi) = o,$$

und nach erfolgter Summirung innerhalb der Eckklammern:

$$D\,\frac{\cos(\varrho-\varepsilon)}{\cos\varrho} - W\,\frac{\sin(\alpha'-\alpha+\varphi)}{\sin\alpha'} + c'\,S\sin(\alpha-\varphi) = o$$

$$X - D\,\frac{\sin(\varrho-\varepsilon)}{\cos\varrho} - W\,\frac{\cos(\alpha'-\alpha+\varphi)}{\sin\alpha'} - c'\,S\cos(\alpha-\varphi) = o.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse W, z. B. dadurch, dass man den aus der ersten folgenden Werth:

$$\frac{W}{\sin\alpha'} = \frac{D\cos(\varrho-\varepsilon)}{\cos\varphi\,\sin(\alpha'-\alpha+\varphi)} + \frac{c'\,S\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha'-\alpha+\varphi)}$$

in die zweite substituirt, so erhält man:

$$X - \frac{D}{\cos\varrho}\,[\sin(\varrho-\varepsilon) + \cos(\varrho-\varepsilon)\,\mathrm{cotg}\,(\alpha'-\alpha+\varphi)]$$
$$- c'\,S\,[\cos(\alpha-\varphi) + \sin(\alpha-\varphi)\,\mathrm{cotg}\,(\alpha'-\alpha+\varphi)] = o,$$

daher nach durchgeführter Reduction innerhalb der Eckklammern:

$$X - D\,\frac{\cos(\alpha'-\alpha-\varrho+\varepsilon+\varphi)}{\cos\varrho\,\sin(\alpha'-\alpha+\varphi)} - c'\,S\,\frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha+\varphi)} = o;$$

woraus endlich für den normalen Eindruck die Hauptgleichung sich ergibt:

$$D = \frac{\cos \varrho}{\cos(\alpha' - \alpha - \varrho + \varepsilon + \varphi)} [X \sin(\alpha' - \alpha + \varphi) - c' S \sin \alpha'] \quad (21).$$

Der mit Rücksicht auf den an der Stützwand entstehenden Reibungswiderstand resultirende schiefe Erddruck ist nach den Gleichungen (7):

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho} = \frac{X \sin(\alpha' - \alpha + \varphi) - c' S \sin \alpha'}{\cos(\alpha' - \alpha - \varrho + \varepsilon + \varphi)} \ldots\ldots (22);$$

jener Reibungsstand aber:

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin \varrho\, [X \sin(\alpha' - \alpha + \varphi) - c' S \sin \alpha']}{\cos(\alpha' - \alpha - \varrho + \varepsilon + \varphi)} \ldots (23).$$

Die in den drei letzten Gleichungen ausgedrückten Widerstände können, da jedem von ihnen nur ein bestimmter Werth zukommen wird, von φ nicht abhängen, es müssen daher die Grössen α' und c' in einer solchen Weise mit φ variiren, dass für D, $\mathfrak{D}$ und R bei jedem Winkel φ, welcher nicht über die Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = (\alpha - \varepsilon)$ hinausfällt, immer das gleiche Resultat zum Vorschein kommt.

Für die Bruchebene wird $\varphi = \gamma$, $\alpha' = \alpha$, $c' = c$, und wenn man hiebei überdies $X = G =$ Gewicht des Erdprismas AFE $= g\,.$ area AFE, ferner $S = A = \overline{AE}$ setzt, so erhält man:

$$D = \frac{\cos \varrho}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha] \ldots\ldots\ldots (24),$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho} = \frac{G \sin \gamma - c A \sin \alpha}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25),$$

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin \varrho}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha] \;.\; (26).$$

Diese drei Gleichungen sind geeignet, die Widerstandskräfte an der Stützwand zu bestimmen, wenn es gelingt, den Bruchwinkel γ ausfindig zu machen, indem die beiden Grössen G und A Functionen von γ sind, alles Uebrige aber für einen gegebenen Fall bekannt ist.

Um nun diesen Bruchwinkel zu finden. kann man folgende Erwägungen anstellen:

Würde man in der allgemeinen Gleichung (21) $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$ setzen, d. h. sich vorstellen, dass in der Fläche $\overline{AK}$

die Reibungs- und Cohäsions-Widerstände zwischen den Erdtheilchen in ihrer ganzen möglichen Grösse sich der Absturzwirkung entgegensetzen könnten, so müsste offenbar der hieraus resultirende normale Erddruck ein kleinerer als der thatsächlich eintretende sein, d. h. ein Resultat hiefür zum Vorschein kommen, welches, wenn es mit Δ bezeichnet wird, zu dem wirklichen Erddrucke in einer Beziehung steht, die durch die Ungleichung:

$$\Delta < D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

ausgedrückt erscheint, wobei, wegen $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$, der Werth für Δ mit:

$$\Delta = \frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)} [X \sin \varphi - c S \sin \alpha] \ldots\ldots \quad (28)$$

zu bemessen ist.

Es wird daher die Differenz $(D - \Delta)$, welche mit U bezeichnet werden mag, im Allgemeinen jedenfalls eine positive sein, und nur in dem Falle, wenn die Fläche $\overline{AK}$ mit der Bruchfläche AE zusammenfällt, vollends verschwinden, d. h. ausnamsweise $\Delta = D$ werden. Man kann daher, auch diesen Fall im Auge behaltend, schreiben:

$$U = (D - \Delta) = D - \frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)} [X \sin \varphi - c S \sin \alpha] \geqq o \ldots (29).$$

Ist auch nach der vorigen Erörterung Δ eigentlich eine blos eingebildete Grösse, so hat dennoch die Differenz U eine reelle Bedeutung. Indem nämlich D der wirkliche (normale) Erddruck ist, dagegen Δ denjenigen vorstellt, welcher sich ergäbe, falls in der betrachteten Fläche $\overline{AK}$ die ganzen möglichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände absorbirt werden könnten, letzteres aber nur für die Bruchfläche $\overline{AE}$ eintritt; so leuchtet ein, dass die Differenz $U = (D - \Delta)$ von dem Ueberschusse an diesen Widerständen herrührt, welcher durch die Absturzwirkung nicht aufgehoben wird, sondern gleichsam in der Fläche $\overline{AK}$ aufgespeichert bleibt, und zur Eolge hat, dass daselbst im Beginne des Ausweichens der Stützwand insolange keine Trennung zwischen den Erdtheilchen eintreten kann, als $\overline{AK}$ eine von $\overline{AE}$ verschiedene Neigung hat. Aus der Grösse der fraglichen Differenz ergibt sich somit gewissermassen der Anhaltspunkt zur Beurthei-

lung des Grades an Sicherheit, mit welchem das Erdreich in der Fläche $\overline{AK}$, ungeachtet der factischen Tendenz zum Erdabsturze, noch immer aneinander haften bleibt. Offenbar muss die Gefahr eines Bruches in dem Erdreiche zunächst unter demjenigen Neigungswinkel $\varphi = \gamma$ auftreten, wofür die fragliche Differenz $U = (D - \Delta)$ ein Minimum und insbesondere $= 0$ wird, weil dann in der dazu gehörigen Bruchfläche $\overline{AE}$ die dort schlummernden Reibungs- und Cohäsionswiderstände vollständig zur Thätigkeit erweckt werden, und kein unbeanspruchter Ueberschuss davon zurückbleibt.

Indem aber D constant ist, erreicht die Differenz $U = (D - \Delta)$ ihr Minimum, wenn die Grösse Δ ihren Maximalwerth annimmt, und da das gedachte Minimum schliesslich gleich Null sein muss, so erhält man: $D = \max \Delta$, daher, weil in diesem Falle in der Relation (28) $\varphi = \gamma$, $X = G$ und $S = A$ zu setzen ist, übereinstimmend mit der Gleichung (24):

$$D = \max \Delta = \frac{\cos \varrho}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha] \text{. . . . . (30).}$$

Der Vorgang zur Berechnung des activen Erddruckes ist hiernach folgender:

1) Man stelle zunächst die Gleichung (28):

$$\Delta = \frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)} [X \sin \varphi - c S \sin \alpha]$$

auf, worin X und S Functionen von φ sind, und untersuche, bei welchem Werthe von φ der Ausdruck für Δ seinen grössten Werth erhält.

In der Voraussetzung, dass dieser Ausdruck geeignet ist, ein analytisches Maximum anzunehmen, suche man

2) den ersten Differial-Quotienten von Δ nach φ, um denselben gleich Null zu setzen.

$$\text{Also } \frac{d\Delta}{d\varphi} = 0 \text{ . . . . (31).}$$

Der hieraus sich ergebende Werth für φ bedeutet, wenn hiefür $\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}$ negativ wird, den Bruchwinkel γ, wornach dann auch die dazu gehörigen Grössen X und S bestimmt werden können.

3) Wird endlich der so ermittelte Werth von $\varphi = \gamma$ in die unter Punkt 1 erwähnte Gleichung für $\varDelta$ substituirt, so erhält man das in der Gleichung (30) angedeutete Maximum von $\varDelta$, welches sofort die Grösse des normalen activen Erddruckes und des normalen Widerstandes der Stützwand (D) repräsentirt. Sodann können auch die beiden Grössen R und $\mathfrak{D}$ nach den Relationen (25) und (26) berechnet werden.

4) Insoferne es vorkommen sollte, dass der Ausdruck für $\varDelta$ eines analytischen Maximums nicht fähig ist, oder, wenn dies auch der Fall wäre, hiefür ein unbrauchbarer Werth von φ resultirt, muss man auf die Bestimmung des numerischen Maximums übergehen, wobei man im Auge zu behalten hat, dass der Werth für den Bruchwinkel γ jedenfalls innerhalb der Grenzen 0 und $(\alpha - \varepsilon)$ eingeschlossen sein muss, also einerseits γ nicht kleiner als 0 und andererseits nicht grösser als $(\alpha - \varepsilon)$ werden kann.

§. 14.

Allgemeine Formel zur Bestimmung des activen Erddruckes. II. Methode (neu). Im vorigen §. hat man diejenige von den zulässigen zwei Methoden angewendet, nach welcher die bezüglichen Reibungswiderstände R und r separat in Rechnung kommen. Man kann aber auch, im Sinne der Schlussbemerkung des §. 12, nach einer zweiten Methode vorgehen, nämlich derart, dass man gleich von vorne herein, anstatt den normalen Erddruck (D) und den Reibungswiderstand an der Stützwand (R), die Resultirende ($\mathfrak{D}$) setzt, und eben so die beiden Kräfte W und r zu einer Resultirenden, diese sei $\mathfrak{W}$, combinirt denkt, so dass dann $\mathfrak{W}$ denjenigen Widerstand bezeichnet, welchen das, unter dem in Betracht kommenden Erdprisma AFK gelegene Erdreich CAK mit Rücksicht auf die in der Fläche $\overline{AK}$ hervorgerufene Reibung leistet. Nach dieser Methode erhält man als Grundlage der weiteren Untersuchung die Fig. 19, worin, mit Ausnahme der jetzt erscheinenden zusammengesetzten Widerstände $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{W}$, welche an die Stelle der Kräfte D und R,

dann W und r treten, alles Uebrige, wie in der Fig. 18, gleichmässig dargestellt ist. Die Richtung des Widerstandes $\mathfrak{R}$ ergibt sich aus den Betrachtungen im §. 12; was aber die Richtung des

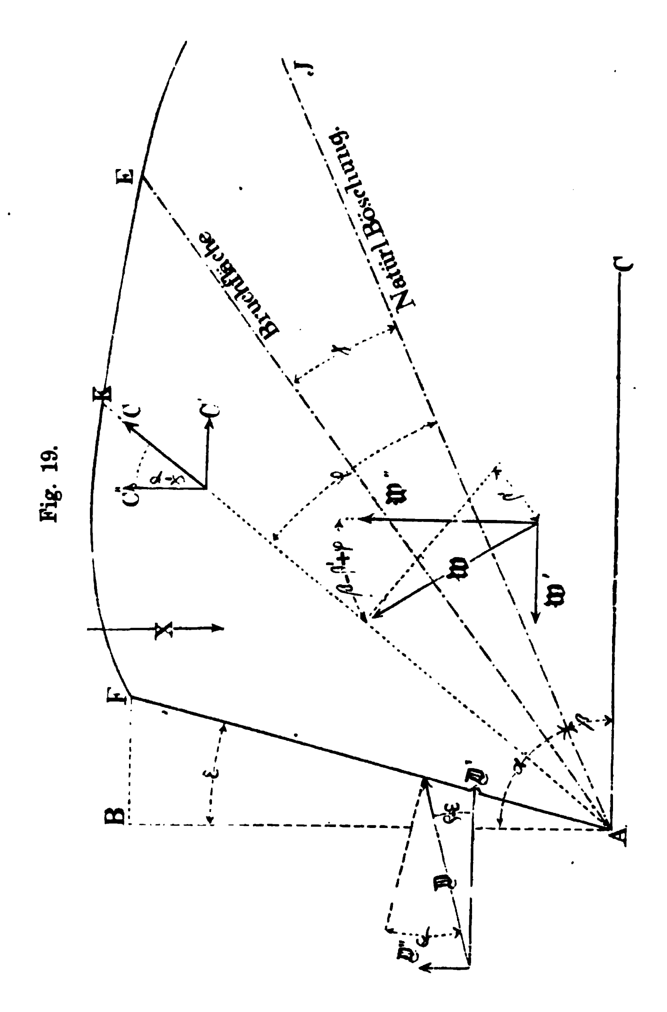


Fig. 19.

Widerstandes $\mathfrak{W}$ betrifft, so ist zu bemerken, dass dieselbe, wegen der aus (18) folgenden Relation $\frac{r}{W} = \operatorname{tg}\beta'$, mit der Normalen auf $\overline{AK}$ den Winkel β' derart einschliesst, wie es in der Figur

angedeutet ist, wodurch zugleich die Bedeutung dieses Winkels klar wird.

Indem man jetzt zur Ermittelung der Gleichgewichtsbedingungen in Bezug auf das beliebig gewählte Erdprisma AFK in derselben Weise wie im vorigen §. vorgeht, und die dortigen Bezeichnungen, insoweit diese auch dermalen in Betracht kommen, beibehält, so findet man zunächst, dass die vier Kräfte: X, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ und C im Gleichgewichte stehen, daher, auf die horizontalen und verticalen Componenten dieser Kräfte übergehend, folgende Gleichungen existiren müssen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}' - \mathfrak{W}' + C' &= 0 \\ X - \mathfrak{P}'' - \mathfrak{W}'' - C'' &= 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (32).$$

worin man, wegen $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = 90^0$, zu setzen hat:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}\cos(\varrho - \varepsilon) \quad \left|\begin{aligned} \mathfrak{W}' &= \mathfrak{W}\sin(\beta - \beta' + \varphi) \\ &= \mathfrak{W}\sin(\alpha' - \alpha + \varphi) \end{aligned}\right\} \dots\dots \\ &\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}\sin(\varrho - \varepsilon) \quad \left|\begin{aligned} \mathfrak{W}'' &= \mathfrak{W}\cos(\beta - \beta' + \varphi) \\ &= \mathfrak{W}\cos(\alpha' - \alpha + \varphi) \end{aligned}\right\} \dots\dots \\ &\left.\begin{aligned} C' &= C\sin(\alpha - \varphi) = c'S\sin(\alpha - \varphi) \\ C'' &= C\cos(\alpha - \varphi) = c'S\cos(\alpha - \varphi) \end{aligned}\right\} \dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (33),$$

Hiernach ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}\cos(\varrho - \varepsilon) - \mathfrak{W}\sin(\alpha' - \alpha + \varphi) + c'S\sin(\alpha - \varphi) &= 0 \\ X - \mathfrak{P}\sin(\varrho - \varepsilon) - \mathfrak{W}\cos(\alpha' - \alpha + \varphi) - c'S\cos(\alpha - \varphi) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (34),$$

woraus durch Elimination von $\mathfrak{W}$ folgt:

$$\mathfrak{P} = \frac{X\sin(\alpha' - \alpha + \varphi) - c'S\sin\alpha'}{\cos(\alpha' - \alpha - \varrho + \varepsilon + \varphi)} \dots\dots \quad (35),$$

welche Gleichung mit jener unter (22) übereinstimmt.

Indem nun hieran dieselben Raisonnements, wie im vorigen §. angeknüpft werden, erhält man augenscheinlich, hier wie dort, die gleichen Schlussergebnisse, weshalb über die weitere Ausführung der im gegenwärtigen §. besprochenen II. Untersuchungsmethode nichts mehr hinzuzufügen ist.

§. 15.

Allgemeine Formel zur Bestimmung des activen Erddrucks. Aeltere Methode mittelst Zugrundelegung

des sogenannten Principes des Erdprismas von grösstem Drucke. Indem die vorstehenden neuen Methoden in dem vorliegenden Werke zum ersten Male zur Veröffentlichung gelangen, soll auch der bisher üblichen älteren Untersuchungsmethode gedacht werden. Hiernach berechnet man zunächst den Druck, welchen ein beliebiges Erdprisma AFK (Fig. 18, 19) auf die Stützwand unter der idealen Voraussetzung ausüben müsste, wenn in der Lagerfläche des Erdprismas $(\overline{AK})$ der Bruch eintreten könnte, so dass dann in dieser Lagerfläche die sämmtlichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den Erdtheilchen absorbirt würden. Hiebei kann man natürlicher Weise gleichfalls auf zwei Arten vorgehen, je nachdem man die Reibungswiderstände an der Wand $\overline{AF}$ und in der Lagerfläche $\overline{AK}$ abgesondert, oder aber in gleichzeitiger Verbindung mit den normal auf jene Ebenen wirkenden Kräften einführt. Gesetzt, man geht nach der erstbezeichneten Art vor, so gelangt man zu folgender Betrachtung:

Der normal auf die Stützwand resultirende Erddruck in dem eben angedeuteten Sinne, bezüglich des Erdprismas AFK, wird offenbar durch eine Formel ausgedrückt sein, welche man eben so wie jene unter (21) erhält, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt zwischen α' und α, sowie zwischen c' und c keine Differenz anzunehmen, also gleich vom Anfange her $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$ zu setzen ist.

Nach diesem Vorgange würde man für

$$D = \frac{\cos \varrho}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)} \left[X \sin \varphi - c S \sin \alpha \right] \ldots\ldots \quad (36),$$

also genau dasselbe Resultat finden, welches im §. 13 mit $\varDelta$ bezeichnet und in der Gleichung (28) dargestellt wurde. Dieser Druckwerth ist jedoch mit φ variabel, würde daher bald grösser, bald kleiner werden, je nachdem man sich die unter dem Winkel φ gedachte Lagerfläche $\overline{AK}$ mehr oder weniger geneigt vorstellt.

Die Autoren, welche sich seither mit diesem Gegenstande beschäftigten, haben zwar die Formel für den Erddruck nicht in jener allgemeinen Weise, wie in der obigen Gleichung (36), dargestellt, sondern sich hiebei mehr oder weniger auf besondere Fälle beschränkt; doch ergab sich überall die Wahrnehmung, dass

das Resultat für den Erddruck mit der verschiedenen Grösse des Erdprisma's, welches als abstürzend gedacht wird, veränderlich ausfallen würde, so dass ohne die Auffindung eines geeigneten Auskunftsmittels das fragliche Resultat unbestimmt bleiben müsste.

Um nun dieser Unbestimmtheit zu entgehen, stellte man das sogenannte Princip des Erdprismas vom grössten Drucke auf, indem man sagte: „Von allen Erdprismen, welche als abstürzend gedacht werden können, müsse im Beginne einer Gleichgewichtsstörung offenbar dasjenige wirklich abstürzen, welches den grössten Druck auf die Wand ausübt, d. h., für welches der Werth von D ein Maximum wird. Dieser Maximalwerth sei sodann der wirkliche Erddruck, den die Stützwand erleidet.“ Das so bestimmte Erdprisma nannte man „Erdprisma von grösstem Drucke.“

Da nun, wie bereits bemerkt, die Formel (36) für D mit der früher unter (28) für $\varDelta$ gegebenen vollkommen übereinstimmt, und nach der in den §§. 13 und 14 erläuterten neuen Methoden ebenfalls die Nothwendigkeit sich ergibt, den Werth für $\varDelta$ zu einem Maximum zu machen, um den Bruchwinkel und das Bruchprisma zu finden, so leuchtet ein, dass man allerdings auch nach der älteren Methode, gestützt auf das Princip des Prismas vom grössten Drucke, zu den richtigen Schlussresultaten gelangt; gleichwohl involvirt dieses Princip ein Missverständniss, indem man nämlich hiedurch unwillkürlich zu der Ansicht geleitet wird, als würde das Bruchprisma einen grösseren Erddruck auf die Stützwand ausüben, als jedes der übrigen Erdprismen. Dies ist aber keineswegs der Fall. Thatsächlich muss jedes Erdprisma den gleichen Druck wie das Bruchprisma hervorbringen. Eine Ungleichheit in den Resultaten für den Druck der verschiedenen Erdprismen erscheint nur in soferne, als man sich eben vorstellt, es werden in der jeweilig gedachten Lagerfläche AK stets die gesammten Reibungs- und Cohäsionswiderstände in Folge der Absturzwirkung aufgezehrt; und wenn auch diese Vorstellung an und für sich auf die weiteren Untersuchungen nicht störend einwirkt, so bleibt solche gleichwol insoferne unrichtig, als die er-

wähnte vollständige Aufzehrung der Reibungs- und Cohäsionswiderstände nur in der dem Bruche zunächst ausgesetzten Erdfläche, sonst aber in keiner anderen, factisch eintritt.

Nachdem es sohin ein Erdprisma vom grössten Drucke eigentlich nicht gibt, so ist es auch nicht nothwendig, diese traditionelle Bezeichnung beizubehalten, sondern vielmehr zur Vermeidung des angedeuteten Missverständnisses angezeigt, hiefür eine andere passendere zu wählen. Als solche empfiehlt sich: Bruchprisma oder gefährliches Erdprisma; ebenso, wie man in den Lehren über den Widerstand fester, elastischer Körper von Bruch- oder gefährlichen Stellen spricht.

Analog damit soll die Fläche $A\overline{E}$, in welcher zunächst der Bruch auftritt oder aufzutreten droht, die Bruch- oder gefährliche Fläche oder Böschung, und der dazu gehörige Winkel γ der Bruch- oder gefährliche Winkel heissen. Wenn daher in dem vorliegenden Buche vom Bruch- oder gefährlichen Erdprisma die Rede ist, so erscheint diese Benennung jedenfalls als eine correctere, doch hat man sich darunter eigentlich nichts anderes vorzustellen, als was man bisher unter dem Erdprisma vom grössten Drucke verstand.

Die Aufstellung des Principes des Erdprismas von grösstem Drucke rührt von Coulomb, Hauptmann im franz. Ingénieur-Corps, her, welcher dadurch zuerst den Weg zur Auffindung richtiger Resultate für den Erddruck anbahnte. Im Jahre 1773 hatte er seine Untersuchung hierüber unter dem Titel „Mémoires des savans étrangers" der Academie des Sciences vorgelegt. Coulomb behandelte aber blos den Fall, wenn die Stützwand vertical steht, das Erdreich hinter derselben horizontal abgegrenzt ist, und keine Reibung zwischen Erde und Wand angenommen wird. Die Cohäsions- und Reibungsverhältnisse zwischen den Erdtheilchen sind jedoch hiebei gehörig berücksichtigt; nur ist anstatt des Winkels für die natürliche Erdböschung unmittelbar der, der Reibung zwischen den Erdtheilchen entsprechende Reibungs-Coefficient eingeführt. Hierin liegt auch der Grund, warum Coulomb schliesslich auf Berechnungsformeln gelangte, welche der wünschenswerthen Einfachheit und Uebersichtlichkeit entbehren.

In den „Recherches sur la poussée des terres, 1802" vereinfachte Prony die von Coulomb gegebene Theorie durch die Einführung des Winkels für

die natürliche Erdböschung, irrte sich aber, als er die Aufgabe auch für schief gestellte Stützwände aufzulösen versuchte.

Erst der Hauptmann im franz. Ingenieur-Corps Français hatte diese allgemeinere Auflösung (in dem „Mémorial de l'officier du génie", Nr. 4, 1820) richtig gegeben. Die von ihm gefundenen Resultate sind den Umständen gemäss möglichst einfach, elegant und übersichtlich dargestellt

In dem Buche „Versuche über den Seitendruck der Erde, von Carl Martony de Köszegh, Major im k. k. Ingenieur-Corps, Wien 1828", findet man die beiden Theorien von Coulomb und Français, so wie die kritischen Bemerkungen des letzteren über Prony's Auflösung aufgenommen.

Auch in Navier's „Mechanik der Baukunst" (in's Deutsche übersetzt von G. Westphal in Hannover, 1851) ist die Theorie des Erddruckes nach dem von Coulomb aufgestellten Principe und dem von Français eingeschlagenen Vorgange enthalten.

Eine weitere Vervollständigung hat der franz. Ingenieur-Bataillons-Chef Poncelet („Memoire sur la stabilité des revêtements de terre" in Nr. 13 des „Memorial de l'officier du génie", in's Deutsche übersetzt von Lahmeyer, 1844) dadurch gegeben, dass er den an eine verticale Stützwand entstehenden Erddruck für den Fall untersuchte, wenn das Erdreich nicht, wie die früheren Autoren stets angenommen, im gleichen Niveau mit der Wandkrone abgegrenzt, sondern darüber hinaus erhöht ist.

Der preussische Oberbaurath Hagen hat in seinem Handbuche der Wasserbaukunst gleichfalls die Theorie des Erddruckes behandelt, doch ist er, ungeachtet der Beibehaltung des Principes des Erdprismas vom grössten Drucke, in Folge einer unrichtigen Zerlegung der hiebei in Betracht kommenden Kräfte zu anderen Ergebnissen, wie die vorgenannten Autoren gelangt.

Eine wesentliche Erweiterung der Theorie des Erddruckes, durch Berücksichtigung des Reibungswiderstandes an der Stützwand, der früher ganz ausser Acht blieb, wurde von Moseley angebahnt und durch Baurath Scheffler weiter ausgeführt. Siehe Moseley's Werk: „Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und der Architectur", übersetzt von Scheffler, Braunschweig, 1844; dann Scheffler's eigenes Werk „Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig, 1857."

Den gedachten Reibungswiderstand gleichfalls berücksichtigend und gestützt auf das Coulomb'sche Princip des Prismas vom grössten Drucke, hat endlich Professor v. Ott in Prag einige interessante Untersuchungen über den Erddruck in den Mittheilungen des Architekten- und Ingenieur-Vereines für Böhmen (1868) veröffentlicht.

Indem im vorliegenden Buche die Untersuchungen stets auf Grundlage der in den §§. 13 und 14 gegebenen Regeln zur Durchführung gelangen, versteht es sich von selbst, dass mit den hiernach sich ergebenden Resultaten in allen solchen Fällen, welche auch von den früheren Autoren behandelt worden sind, die von diesen unter sonst gleichen Umständen gefundenen Ergebnisse in so lange in keinen Widerspruch kommen können, als nicht etwa, wie z. B. in den Arbeiten von Prony und Hagen, anderweitige Unrichtigkeiten sich eingeschlichen haben. Im Laufe des Textes wird sich die Gelegenheit ergeben, dort, wo ein solcher Widerspruch zum Vorschein kommt, die bezügliche Ursache anzumerken.

§. 16.

Uebergang von dem Drucke der Erde auf jenen tropfbarer Flüssigkeiten. Schon im §. 7 wurde bemerkt, dass in der Theorie des Erddruckes auch die Gesetze für den hydrostatischen Druck enthalten sind, und aus derselben folgen müssen, wenn man sämmtliche Reibungs- und Cohäsionswiderstände im Innern der Erde und an der Stützwand verschwinden lässt,

also $\beta' = \beta = 0$, d. i. $\alpha' = \alpha = 90^0$,
dann $c' = c = 0$ und $\varrho = 0$ setzt.

Wird diese Absicht ausgeführt, so erhält man aus den neu aufgestellten allgemeinen Gleichungen (21), (22) und (23):

$$D = \mathfrak{D} = \frac{X \sin \varphi}{\cos (\varepsilon + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

$$R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38),$$

welches letztere Resultat sogleich als sachgemäss erkannt wird.

Was die Gleichung (37) betrifft, so beachte man, dass bei einer tropfbaren Flüssigkeit die obere Begrenzungsfläche derselben horizontal ist, und sich sonach der Werth für das Gewicht X durch eine bestimmte Function von φ darstellen lässt.

Es ist nämlich nach Fig. 20:

$X =$ Gewicht $AFK = g \,.\, \triangle\, AFK = \frac{1}{2}\, g \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{FK}.$

daher wegen:

$$\overline{AB} = H, \quad \overline{FK} = H\,[\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varepsilon] = H\,\frac{\cos(\varepsilon+\varphi)}{\cos\varepsilon\sin\varphi},$$

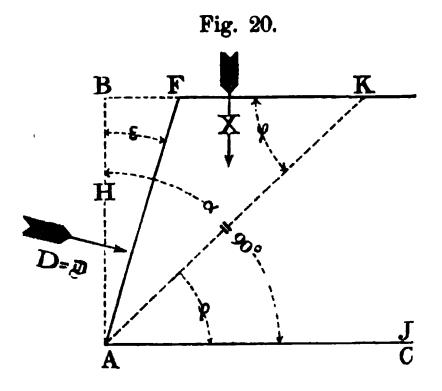
auch:

$$X = \tfrac{1}{2}\,g\,H^2\,\frac{\cos(\varepsilon+\varphi)}{\cos\varepsilon\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39).$$

Wird dieser Werth in die Relation (37) substituirt, so findet man:

$$D = \mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40),$$

Fig. 20.



also, wie aus der Vergleichung dieses Resultates mit der Relation (4) hervorgeht, in der That die hydrostatische Formel.

Zugleich wird nach der Relation (29) $U = 0$, somit ist U keine Function des Winkels φ, was anzeigt, dass der Bruchwinkel γ hier ganz unbestimmt bleibt und jede beliebig geneigte Fläche $\overline{AK}$ als Bruch- oder gefährliche Fläche gelten kann.

Stellt man sich auf den Standpunkt der Theorie des Prisma's vom grössten Drucke, so entsteht, indem man die Gleichung (36) zu Grunde legt, und hierin $c = \rho = 0$, für X aber den Werth (39) setzt, augenscheinlich dasselbe Resultat. Zugleich ergibt sich, dass, weil dieses Resultat mit φ nicht mehr variabel ist, ein bestimmtes Prisma vom grössten Drucke für tropfbare Flüssigkeiten nicht existirt, oder was dasselbe ist, dass jedes beliebige Prisma als solches angesehen werden kann. Dieses geht übrigens nicht nur aus der obigen allgemeinen Gleichung (36), sondern auch aus den besonderen Untersuchungen derjenigen Fachmänner, welche sich mit der Theorie des Erddruckes, gestützt auf das Princip des Erdprismas vom grössten Drucke, beschäftigen, hervor, und steht, wie bekannt, in vollkommenem Einklange mit

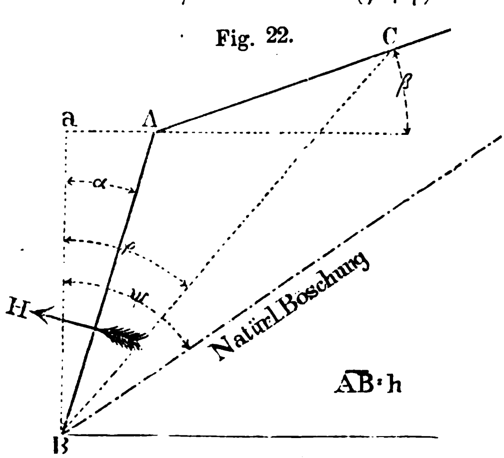
den in der Physik und Mechanik abgeleiteten Gesetzen, nach denen der hydrostatische Druck auf eine Wand $\overline{AF}$ von der Gestaltung der hinteren Flüssigkeitsabgrenzung AMN ganz unabhängig ist. (Fig. 21.) Nur Hagen's Theorie macht davon eine Ausnahme, indem nach derselben der Druck tropfbarer Flüssigkeiten je nach der Grösse des Prismas, welches man in Untersuchung zieht, verschieden ausfallen, und hiernach nicht nur ein ganz bestimmtes Prisma vom grössten Drucke zum Vorschein kommen, sondern überdies der so resultirende Maximaldruck mit den hydrostatischen Gesetzen nur für eine verticale Stützwand, sonst aber nicht im Einklange stehen würde.*)

Fig. 21.

*) In dem Handbuche der Wasserbaukunst von Hagen (2. Theil, Königsberg in Preussen 1844) findet man auf Seite 15 den normal auf eine Stützwand wirkenden, mit H bezeichneten Erddruck unter Beiseitelassung der Reibungswiderstandes an der Wand und des Cohäsionswiderstandes zwischen den Erdtheilchen mit Rücksicht auf den in der nebigen Figur 22 angedeuteten Fall durch folgende Gleichung dargestellt:

$$H = \frac{1}{2} h^2 \gamma \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \psi} \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)^2 \sin(\psi - \varphi)}{\cos(\varphi + \beta)}.$$

Fig. 22.



§. 17.

Formeln für den Erddruck unter besonderen Voraussetzungen.

A) Vernachlässiget man den Reibungswiderstand an der Stützwand, so ist $\varrho = o$, und man findet nach der Gleichung (30):

$$\left.\begin{aligned} D = \max \varDelta &= \max \left[\frac{X \sin \varphi - c S \sin \alpha}{\cos(\varphi + \varepsilon)}\right] \\ &= \frac{G \sin \gamma - c A \sin \alpha}{\cos(\gamma + \varepsilon)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (41),$$

Wird überdies die Cohäsion $c = o$ gesetzt, so vereinfacht sich die letzte Gleichung, wie folgt:

$$D = \max \varDelta = \max \left[\frac{X \sin \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)}\right] = \frac{G \sin \gamma}{\cos(\gamma + \varepsilon)} \ldots (42),$$

Das Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches ist mit γ bezeichnet, und die Bedeutung der übrigen Buchstaben aus der Figur ersichtlich. Für ein tropfbar flüssiges Hinterfüllungsmateriale ist $\beta = 0$ und $\psi = 90^\circ$ zu setzen, somit wäre:

$$H = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha)^2,$$

also eine mit φ veränderliche Grösse, was eben, wie vorbemerkt, für tropfbare Flüssigkeiten nicht sein kann. Allein auch abgesehen davon fände man, auf das Maximum von H übergehend, welches für den grössten zulässigen Werth von φ, nämlich für $\varphi = 90^\circ$ eintritt, den fraglichen Maximialwerth mittelst der Formel:

$$\max H = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \cos^3 \alpha$$

ausgedrückt, was gleichfalls nicht richtig ist, weil, wenn man statt der von Hagen eingeführten schiefen Wandhöhe $\overline{AB} = h$ die verticale $\overline{aB}$ berücksichtigt, d. h. $h = \frac{\overline{aB}}{\cos \alpha}$ setzt, sofort erhalten wird: $\max H = \frac{1}{2} \gamma \,.\, \overline{aB}^2 \cos \alpha$; während man doch, den hydrostatischen Gesetzen gemäss, mit Rücksicht auf die Gleichung (4) hätte finden sollen: $\max H = \frac{1}{2} \gamma \frac{\overline{aB}^2}{\cos \alpha}$, indem man nämlich beachtet, dass die hier gebrauchten Grössen $\max H$, γ, $\overline{aB}$ und α aufeinanderfolgend dieselbe Bedeutung haben, wie in der Gleichung (4) die Buchstaben D, ω, H und ε. Diese wenigen Bemerkungen genügen, um die Unrichtigkeit der Theorie des Erddruckes von Hagen auffällig zu machen; und wenn dieser Autor auch bemüht gewesen ist, vermittelst der Ergebnisse aus den von ihm eigens angestellten Versuchen den Beweis zu liefern, dass seine Theorie die richtigere sei, so ist hiebei eine Täuschung unterlaufen, von welcher noch später die Rede sein wird.

und wenn hiebei die Stützwand auch noch vertical steht:

$$D = \max \Delta = \max [X \operatorname{tg} \varphi] = G \operatorname{tg} \gamma \ldots\ldots\ (43).$$

B) Nimmt man den Reibungswiderstand an der Stützwand in Rechnung, hiebei aber die Cohäsion zwischen den Erdtheilchen $c = o$ an, so hat man:

$$D = \max \Delta = \max \left[\frac{X \cos \varrho \sin \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)}\right] = \frac{G \cos \varrho \sin \gamma}{\cos (\gamma + \varepsilon - \varrho)} \ldots\ (44),$$

welche Gleichung für den auf die Relation (13) bezüglichen Fall (in dem zunächst ϱ' statt ϱ, weiter aber $\varrho' = \beta = 90^0 - \alpha$ zu setzen ist) übergeht in:

$$D = \max \Delta = \max \left[\frac{X \sin \alpha \sin \varphi}{\sin (\alpha + \varepsilon + \varphi)}\right] = \frac{G \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\alpha + \varepsilon + \gamma)} \ldots\ (45).$$

Ueberall ist der Werth für den Bruchwinkel γ so verstanden, dass für $\varphi = \gamma$ in der dazu gehörigen Gleichung für Δ diese letztere Grösse ihr Maximum ($\max \Delta$) erreicht, welches dann zugleich die Intension des normalen Erddrucks D an die Stützwand repräsentirt.

Zweites Capitel.

Cohäsionshöhe des Erdreiches.

§. 18.

Erklärung. Diejenige grösste Höhe, auf welche sich das Erdreich unter einer steileren, als der natürlichen Böschung insolange, als nicht äussere Störungen eintreten, ohne Stützwand im Gleichgewichte zu erhalten vermag, soll, da dieselbe offenbar von der Cohäsion zwischen den Erdtheilchen abhängt, Cohäsionshöhe des Erdreiches heissen.

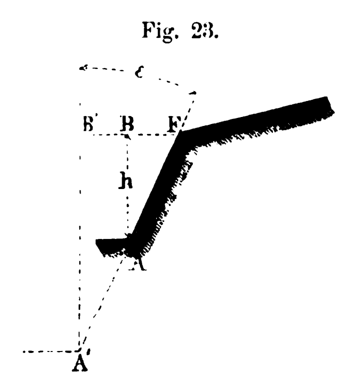
Für ein cohäsionsloses Erdreich ist $c = o$, und es kann sich ein solches, nach den Erörterungen im §. 2, im freien Zustande niemals nach einer steileren, als der natürlichen Böschung im Gleichgewichte erhalten, so dass dann die Cohäsionshöhe ebenfalls gleich Null zu setzen ist.

Innerhalb und bis zur Cohäsionshöhe kann offenbar ein Erddruck in der Richtung auf die äussere Böschung nicht vorhanden,

es müssen also für alle Höhen, welche gleich oder kleiner als die Cohäsionshöhe sind, die früher mit D, $\mathfrak{D}$ und R bezeichneten Kräfte gleich Null sein.

Nennt man die, den Umständen entsprechende Cohäsionshöhe $AB = h$ (Fig. 23), so wird das Erdreich in dieser, und selbstverständlich in jeder noch kleineren Höhe ganz frei, ohne Stützwand, im Gleichgewichte sich erhalten, und erst dann abstürzen, wenn die Höhe h um eine beliebige, wenn auch noch so kleine Grösse vermehrt wird, so dass z. B. unter sonst gleichen Umständen ein Gleichgewichtszustand des freien, ungestützten Erdreiches mit der Böschungshöhe $\overline{A'B'}$ nicht mehr möglich wäre.

Fig. 23.



Für den Gleichgewichtszustand in einem solchen Falle ist schon eine Stützwand (Fig. 24) nothwendig, welche den bezüglichen Erddruck aufzunehmen hat. Dieser Erddruck kann aber nur in dem unteren Wandtheile von der Höhe $(H—h)$ entstehen,

Fig. 24.

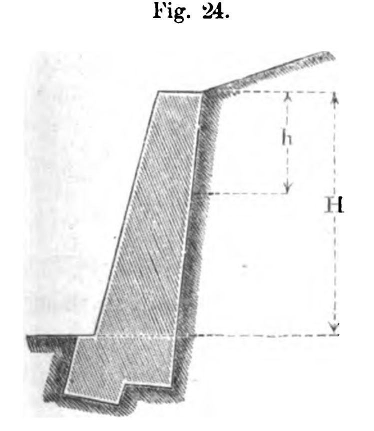
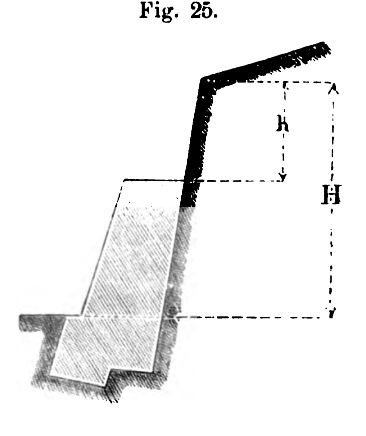


Fig. 25.



während der obere, in der Cohäsionshöhe h gelegene Wandtheil keinen Druck erleiden wird, daher auch ganz weggelassen werden

könnte (siehe Fig. 25), vorausgesetzt, dass die so erniedrigte Stützwand noch immer eine ausreichende Standfähigkeit besitzt.

§. 19.

Bestimmung der Cohäsionshöhe h. Schon von vorne herein ist einzusehen, dass die Grösse der Cohäsionshöhe von der Cohäsion des Erdreiches (c), von dem Gewichte desselben per Cubikeinheit (g), von dem natürlichen Böschungswinkel (α), von derjenigen steileren, zu dem Winkel ε gehörigen Böschung, nach welcher sich das Erdreich frei erhalten soll, endlich von der Gestaltung der Oberfläche der Erdmasse abhängt.

Man muss daher finden:

$$h = \text{Function}\,(c, g, \alpha, \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46),$$

wobei die Art der Function der jedesmaligen Gestaltung der erwähnten Oberfläche angepasst sein wird.

Um den Werth von h rechnungsmässig zu bestimmen, suche man zunächst den Erddruck D nach den Regeln des §. 13 und setze denselben gleich Null. Dadurch wird sich eine Relation ergeben, woraus h zu ermitteln ist. Demzufolge hat man zunächst nach §. 13 (Punkt 1) den Werth:

$$\Delta = \frac{\cos\varrho}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)}\left[X \sin\varphi - cS \sin\alpha\right]$$

ins Auge zu fassen, denselben (nach Punkt 2) zu einem Maximum zu machen, und (nach Punkt 3) dieses Maximum gleich Null zu setzen.

Es ist also jetzt für den gefährlichen Winkel $\varphi = \gamma$, nicht nur $\frac{d\Delta}{d\varphi} = 0$, sondern auch der dazu gehörige Maximalwerth von Δ ebenfalls $= 0$.

Indem Δ von einem Zahlenbruche abhängt, kann man schreiben:

$$\Delta = \cos\varrho \left(\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}\right) = \cos\varrho \frac{Z}{N},$$

daher auch:

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \frac{\cos\varrho}{N^2}\left[N\frac{dZ}{d\varphi} - Z\frac{dN}{d\varphi}\right],$$

wobei abkürzend:

$$Z = X \sin \varphi - c S \sin \alpha \text{ und}$$
$$N = \cos (\varphi + \varepsilon - \varrho) \text{ gesetzt ist.}$$

Für den Fall des Maximums von Δ, also für $\varphi = \gamma$, wird, wie oben bemerkt, nicht nur Δ, also auch Z, sondern überdies $\frac{d \Delta}{d \varphi} = 0$, was offenbar bedingt, dass auch $\frac{d Z}{d \varphi} = 0$ ist.

Somit findet man zur Bestimmung des gefährlichen Winkels $\varphi = \gamma$, die Relation:

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{d\,(X \sin \varphi - c S \sin \alpha)}{d \varphi} = 0 \text{*)} \ldots\ldots\ldots \quad (47),$$

wornach zu Folge der Gleichung (24) der Erddruck in der Grösse:

$$D = \frac{\cos o}{\cos (\gamma + \varepsilon - \varrho)} \left[G \sin \gamma - c A \sin \alpha \right]$$

entsteht, diese aber gleich Null zu setzen ist, so dass endlich die Bedingungsgleichung:

$$G \sin \gamma - c A \sin \alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

zum Vorschein kommt, aus welcher, weil G und A von der verticalen Böschungshöhe (hier Cohäsionshöhe) h abhängen, die letztere sofort ermittelt werden kann.

Geht man von dieser allgemeinen Betrachtung sogleich auf den besonderen Fall über, wenn die Oberfläche der Erdmasse nach einer Ebene, horizontal oder geneigt, begrenzt wird, so erhält man als Grundlage zur näheren Untersuchung die Figur 26.

---

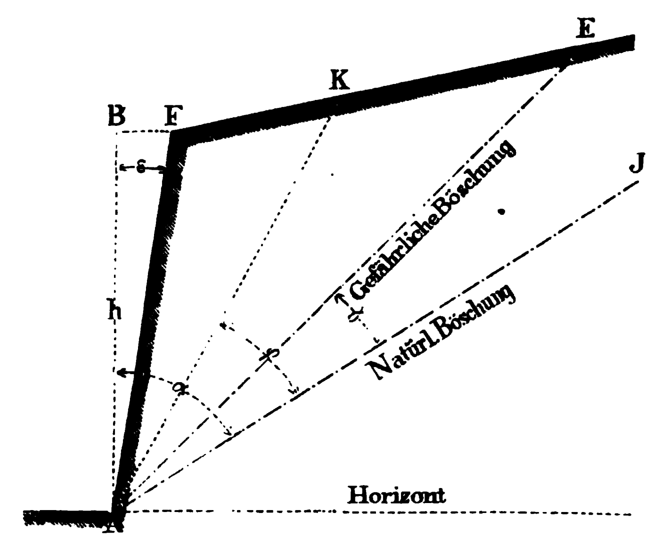
*) Nachdem der Bedingung gemäss Δ ein Maximum werden soll, so hätte man eigentlich noch dem zweiten Differential-Quotienten von Δ nach φ die Aufmerksamkeit zuzuwenden. Es ist aber allgemein:

$$\frac{d^2 \Delta}{d \varphi^2} = \frac{\cos \varrho}{N^4} \left\{ N^2 \left(N \frac{d^2 Z}{d \varphi^2} - Z \frac{d^2 N}{d \varphi^2} \right) - 2 N \left(N \frac{d Z}{d \varphi} - Z \frac{d N}{d \varphi} \right) \frac{d N}{d \varphi} \right\},$$

daher insbesondere, wegen $Z = 0$, $\frac{d Z}{d \varphi} = 0$ und für $\varphi = \gamma$: $\frac{d^2 \Delta}{d \varphi^2} = \frac{\cos o}{N} \frac{d^2 Z}{d \varphi^2}$, so dass $\frac{d^2 \Delta}{d \varphi^2}$ und $\frac{d^2 Z}{d \varphi^2}$ jederzeit das gleiche algebraische Zeichen erhalten, es somit genügt, anstatt $\frac{d^2 \Delta}{d \varphi^2}$ unmittelbar $\frac{d^2 Z}{d \varphi^2}$ aufzusuchen, und aus dem algebraischen Zeichen dieses Werthes zu schliessen, ob man es in der That mit einem Maximum zu thun hat.

Nach den hierin ersichtlichen Bezeichnungen, welche mit den früheren Annamen übereinstimmen, haben die übrigen in

Fig. 26.



den vorstehenden Formeln erscheinenden Buchstaben folgende Bedeutung:

$$\overline{AK} = S,\ \overline{AE} = A,\ X = g \triangle AFK \text{ und } G = g \triangle AFE,$$

Hiernach erhält man:

$$X = \tfrac{1}{2} g\, \overline{AF} . \overline{AK} \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) = \tfrac{1}{2} g \frac{h}{\cos \varepsilon} S \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) \;.\,.\; (49),$$

$$G = \tfrac{1}{2} g\, \overline{AF} . \overline{AE} \sin(\alpha - \varepsilon - \gamma) = \tfrac{1}{2} g \frac{h}{\cos \varepsilon} A \sin(\alpha - \varepsilon - \gamma) \;.\,.\; (50),$$

sofort aber:

$$Z = X \sin \varphi - c S \sin \alpha$$

$$= \tfrac{1}{2} g \frac{h}{\cos \varepsilon} S \left[\sin \varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) - \frac{2c}{gh} \sin \alpha \cos \varepsilon \right]$$

$$= m . S [\sin \varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) - n] \;.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\; (51),$$

worin die, der abgekürzten Darstellung wegen, eingeführten zwei neuen Buchstaben (m und n) von φ unabhängige Werthe haben.

Um hieraus den gefährlichen Winkel $\varphi = \gamma$ zu finden, hat man nach dem Obigen zu beachten, dass hiefür sowohl Z, als auch $\frac{dZ}{d\varphi}$ gleich Null sein muss. Es ist also einerseits:

$$\sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) - n = \sin\gamma \sin(\alpha - \varepsilon - \gamma) - n = 0 \;..\; (52)$$

und anderseits:

$$\frac{d\,[\sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi)]}{d\varphi} = \left\{ \begin{matrix} \sin(\alpha - \varepsilon - 2\varphi) \\ \sin(\alpha - \varepsilon - 2\gamma) \end{matrix} \right\} = 0 \;\ldots\ldots (53).$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\varphi = \gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54),$$

und mit Hilfe dieses Werthes aus der Relation (52):

$$\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) = n = \frac{2c}{gh} \sin\alpha \cos\varepsilon,$$

endlich aber in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Formel (46) die besondere Cohäsionshöhe:

$$h = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (55),$$

wenn man statt n den betreffenden Werth zurücksubsituirt*).

Nach dem, in der Gleichung (54) für γ gefundenen Werth, liegt die gefährliche Böschung $\overline{AE}$ (Fig. 26), in welcher der Bruch zunächst einzutreten droht, derart, dass dieselbe den Winkel FAI, der zwischen der natürlichen Böschung $\overline{AI}$ und der steileren Aussenfläche $\overline{AF}$ liegt, stets halbirt, und zwar ohne Rücksicht darauf, wie gross die Cohäsion des Erdreiches ist.

Auch ist merkwürdiger Weise weder die Lage dieser gefährlichen Böschung, noch die aus der Gleichung (55) resultirende Cohäsionshöhe selbst von der Richtung $\overline{FE}$, nach welcher die Erdmasse obenauf begrenzt ist, abhängig, so dass die für γ und h gefundenen Resultate eben sowohl für eine horizontale, als

*) Nachdem $\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} = -2\cos(\alpha - \varepsilon - 2\varphi)$, also für $\varphi = \gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)$, gleich -2 wird, so hat man es, wie es nöthig ist, in der That mit einem Maximum von Z, oder eigentlich von Δ zu thun.

für eine schiefe Richtung der Begrenzung $\overline{FE}$ (aufsteigend oder abfallend) gleichmässig gelten.

Diese Erscheinung lässt sich übrigens auf eine sehr einfache Art erklären, insolange man nämlich die gemachte Voraussetzung beibehält, dass die gefährliche Böschungsfläche eine Ebene sei.

Denn ist AF der Grösse und Richtung nach gegeben, so nimmt das Gewicht eines beliebigen Erdprismas AFK für einen und denselben Winkel φ im geraden und einfachen Verhältnisse mit der Grösse der Böschungslinie $\overline{AK}$ zu und ab. Die Kraft, mit welcher dieses Erdprisma auf seiner Lagerfläche $\overline{AK}$ herabzugleiten strebt, steht also ebenfalls im geraden und einfachen Verhältnisse zur Grösse der gedachten Böschungslinie $\overline{AK}$. Das Gleiche gilt offenbar für den Druck, welcher das Erdprisma auf seine Lagerfläche ausübt, daher auch der in dieser letzteren entstehende Reibungswiderstand, welcher sich dem Herabgleiten des Erdprismas entgegensetzt, mit der Grösse der Linie $\overline{AK}$ einfach und directe proportional ist. Da nun das Letztere in Bezug auf den Cohäsionswiderstand gleichfalls Anwendung findet, so sieht man, dass sowohl die offensive von der Schwere des Erdprismas herrührende Abgleitungskraft, als auch die aus der Reibung und Cohäsion zwischen den Erdtheilchen entspringenden Gegenkräfte in ganz gleicher Weise von dem Ausmasse der Böschungslinie $\overline{AK}$ abhängen, somit es schliesslich vollkommen gleichgiltig erscheint, ob dieses Ausmass ein grösseres oder kleineres ist, d. h. die Richtung der oberen Begrenzungsfläche der Erdmasse bleibt ohne Einfluss auf die Bedingungen des Gleichgewichtes.

Freilich wird sich die Sache anders herausstellen, wenn die gefährliche Böschungsfläche nicht in allen Fällen als eine Ebene betrachtet werden darf. Insoferne aber zur Beurtheilung hierüber verlässliche Anhaltspunkte derzeit noch fehlen, lässt sich nicht ermessen, ob und inwieweit die obigen Resultate (54) und (55) einen Anspruch auf hinlängliche Genauigkeit auch dann besitzen, wenn die obere Begrenzung der Erdmasse nicht horizontal ist.

Für eine horizontale Abgrenzung jedoch wird man sich immerhin erlauben können, jenen Resultaten eine praktische Richtigkeit zuzugestehen, weil aus den von Martony angestellten Versuchen, so unvollkommen diese auch in mancher Beziehung sein mögen, denn doch das Eine mit ziemlicher Deutlichkeit hervorgeht, dass für eine horizontale Oberfläche des Erdreiches die Bruchböschung sehr nahe als eine Ebene angesehen werden darf.

Um nun mit der nöthigen Vorsicht in den folgenden Untersuchungen des gegenwärtigen Capitels vorzugehen, soll hiebei die Beschränkung Platz greifen, dass die bis auf ihre Cohäsionshöhe aufgeschichtete Erdmasse obenauf nach einer horizontalen Fläche begrenzt sei. Unter dieser Beschränkung entfällt dann die sonst zu besorgende Gefahr des Einschleichens eines wesentlichen Irrthumes.

Noch ist zu erwähnen, dass die Resultate (54) und (55) auch von der Grösse ϱ unabhängig sind, was als ganz sachgemäss bezeichnet werden muss, weil in dem vorliegenden Falle — wo eine Stützwand nicht vorhanden ist, oder, wenn eine solche selbst aufgestellt würde, diese keinen Erddruck zu erleiden hätte — von einer zwischen Stützwand und Erde auftretenden Reibung (wofür eben ϱ den Reibungswinkel vorzustellen hätte) füglich keine Rede sein kann.

Anmerkung.

Mit Hilfe der im §. 15 angegebenen Gleichung (36), welche auf die Untersuchungsmethode nach dem Principe des Prismas vom grössten Drucke Bezug nimmt, kann man ebenfalls die Cohäsionshöhe des Erdreiches bestimmen, indem man folgende Betrachtung anstellt:

Da der Erddruck innerhalb der Cohäsionshöhe gleich Null zu setzen ist, so erhält man zunächst aus der bezogenen Gleichung:

$$X \sin \varphi - c S \sin \alpha = 0,$$

was mit oben Gesagtem übereinstimmt, weil dort $Z = 0$ gesetzt werden musste, Z aber eben den vorstehenden Ausdruck bezeichnete.

Aus der Gleichung $X \sin \varphi - c S \sin \alpha = 0$ bestimme man nun die Höhe des abgeböschten Erdreiches, deren Grösse allgemein H genannt wurde, jetzt aber mit h zu bezeichnen ist, wobei man zu beachten hat, dass die Werthe von X und S Functionen von H, beziehungsweise h sind.

Die so ermittelte Cohäsionshöhe h würde hieraus, weil von φ abhängig, variabel sein, daher insolange unbestimmt bleiben, als man nicht durch eine weitere Erwägung zur Einsicht gelangt, welcher von den verschiedenen Werthen für h als der wahre anzusehen ist. In dieser Beziehung leuchtet wohl ein, dass unter allen von φ abhängigen Werthen für h, welche bald grösser bald kleiner ausfallen werden, ohne Zweifel das Minimum massgebend zu sein hat. So lange man nämlich nur Ein gewisses Erdprisma im Auge behält, findet man auch nur Einen bestimmten Werth für h, welcher anzeigt, wie hoch die Erdmasse aufgeschichtet sein könnte, damit sich das gedachte Erdprisma gerade noch auf seiner Lagerfläche, ohne abzugleiten, zu erhalten im Stande wäre. Indem man aber nicht Eines, sondern alle möglichen Erdprismen, welche unter den verschiedenen Winkeln φ gedacht werden können, gleichzeitig zu berücksichtigen hat, so wird es sich offenbar darum handeln, darunter dasjenige Erdprisma ausfindig zu machen, welches schon bei dem kleinsten Werthe von h unmittelbar dem Absturze droht; daher in der That, wie zuvor angedeutet, es darauf ankommt, das Minimum von h in Beziehung auf den Winkel φ zu bestimmen.

Dieser Bemerkung gemäss hat man $\frac{dh}{d\varphi} = 0$ zu setzen, hieraus den besonderen Werth $\varphi = \gamma$ abzuleiten, und hiernach — falls das algebraische Zeichen von $\frac{d^2 h}{d\varphi^2}$ für $\varphi = \gamma$ wirklich auf ein Minimum hinweiset — dieses letztere aus der zu Grunde liegenden Gleichung für h zu bestimmen.

Da aus der Gleichung: $X \sin \varphi - c S \sin \alpha = 0$ die darin enthaltene Höhe h im Allgemeinen nicht durch eine Formel ausgedrückt werden kann, somit unmittelbar nicht zu ersehen ist, ob auch durch das jetzt angegebene Verfahren das frühere Resultat erhalten wird, so muss man, um hierüber vollständig klar zu werden, jene Gleichung in ihrer gegebenen Form, also mit Umgehung ihrer förmlichen Auflösung nach h, untersuchen. Diese Gleichung enthält nämlich nach der Auffassung, die sich auf dem betretenen Wege ergibt, die zwei Veränderlichen h und φ, wobei schliesslich φ so zu wählen ist, dass $\frac{dh}{d\varphi} = 0$ wird. Man wird daher die Gleichung $(X \sin \varphi - c S \sin \alpha) = 0$ nach h und φ differenziren, hierauf $\frac{dh}{d\varphi} = 0$ setzen, und hieraus den Werth von $\varphi = \gamma$ ableiten.

Beachtet man, dass nach der Gleichung (47) der Ausdruck $(X \sin \varphi - c S \sin \alpha)$ ebenfalls differenzirt und das Resultat hievon gleich Null gesetzt werden musste, so gelangt man zu der Ueberzeugung, dass hier, wie dort, der gleiche Werth von $\varphi = \gamma$, und die gleiche Cohäsionshöhe zum Vorschein kommen müssen.

Allerdings war dort blos nach φ, hier aber ist auch nach h zu differenziren, allein da schliesslich $\frac{dh}{d\varphi} = 0$ zu setzen kommt, so bleibt ohne Zweifel die angedeutete Verschiedenheit auf die Schlussergebnisse ohne Einfluss.

So z. B. findet man in dem durch die Figur 26 dargestellten Falle:

$$X \sin\varphi - c S \sin\alpha = m S [\sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) - n] = 0,$$

wenn, wie in der Gleichung (51):

$$n = \frac{2c}{gh} \sin\alpha \cos\varepsilon$$

bedeutet. Die förmliche Auflösung nach h ergibt, wegen:

$$n = \frac{2c}{gh} \sin\alpha \cos\varepsilon = \sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi),$$

zunächst die variable Grösse:

$$h = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi)},$$

welche nun für den grössten Werth von $\sin\varphi \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi)$, also für $\varphi = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)$, ein Minimum wird, und als solches mit dem Resultate:

$$h = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}$$

genau so, wie die Relation (55), die wahre Cohäsionshöhe vorstellt.

Ungeachtet dessen, als hier rechnungsmässig von einem Minimum der Cohäsionshöhe die Rede ist, bezeichnet dennoch der schliessliche Werth hiefür thatsächlich die grösste Höhe, auf welche sich das Erdreich vermöge seiner Cohäsion noch ohne Stützwand erhalten kann, weil natürlicher Weise bei einer kleineren Höhe das Gleichgewicht um so mehr bestehen muss, während jede Vergrösserung jener Höhe ein Abrutschen des Erdreiches zur Folge haben würde. Aus dieser Bemerkung geht neuerdings hervor, wie vorsichtig man sein müsse, um bei den Untersuchungen, welche auf das Princip des Erdprismas vom grössten Drucke basirt sind, nicht irre geleitet zu werden.

§. 20.

Besondere Bemerkungen über die Formel für die Cohäsionshöhe. Nimmt man, aus dem im vorigen §. angegebenen Grunde, für die weiteren Untersuchungen in Bezug auf die Cohäsionshöhe die obere Begrenzung der aufgeschichteten Erdmasse horizontal an, so erhält man, der Gleichung (55) gemäss, die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha\cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ c &= \tfrac{1}{2} g h \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\varepsilon} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} (56),$$

je nachdem die Cohäsionshöhe h aus der Cohäsion c, oder diese aus jener berechnet werden soll.

Den so ersichtlichen Zusammenhang zwischen den beiden Grössen c und h hat schon Français in seiner Theorie des Erddruckes aufgefunden, obwohl der Weg, auf dem er hiezu gelangt ist, von dem oben eingeschlagenen abweicht. Als nämlich Français die Grösse des Druckes, welchen eine oben horizontal abgeglichene Erdmasse hinter einer Stützwand auf diese ausübt, für eine beliebige Druckhöhe aufgesucht hatte, zeigte es sich hinterher, dass jener Erddruck für eine gewisse Höhe der Erdmasse verschwindet, wodurch er dann auf Relationen geleitet ward, mit welchen die vorhin unter (56) angegebenen genau übereinstimmen.

Der Umstand, dass Français die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand ausser Acht gelassen hat, konnte offenbar auf das von ihm gefundene Resultat für h nicht störend einwirken, weil schon im vorigen §. darauf aufmerksam gemacht wurde, dass der diesfällige Reibungs-Coefficient (ϱ) in dem besonderen Falle, wo der Erddruck gleich Null wird, gänzlich entfällt*).

Ist, wie in der Fig. 27, die vordere Erdböschung liegend, so hat der Neigungswinkel ε in den Gleichungen (56) einen positiven Werth.

Ist das Erdreich, wie in der Fig. 28, vorne vertical abgestochen, so ist $\varepsilon = 0$, und die allgemeinen Gleichungen (56) gehen in folgende über:

*) Die Methode, nach welcher Français die Cohäsionshöhe des Erdreiches gefunden, wird später noch besonders zur Sprache kommen.

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{4c}{g} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c &= \tfrac{1}{4} g h_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (57),$$

indem man nämlich die in diesem Falle entstehende Cohäsionshöhe mit h_1 bezeichnet.

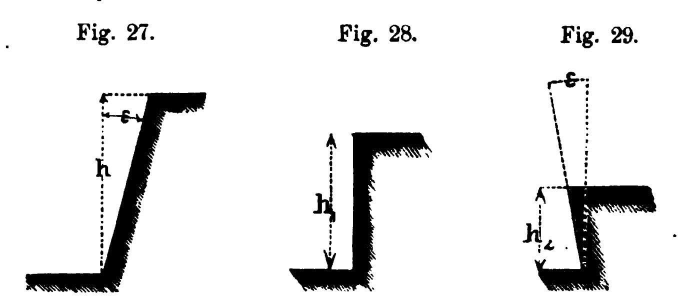


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

Ist endlich, wie in der Figur 29, die vordere Erdböschung um den Winkel ε gegen das Loth überhängend, und nennt man jetzt die Cohäsionshöhe h_2, so hat man in den Relationen (56) das Zeichen von ε in das entgegengesetzte umzuwandeln, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} h_2 &= \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c &= \tfrac{1}{2} g h_2 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (58).$$

Hiernach kann das Erdreich vorne sowohl nach einer liegenden, als auch nach der verticalen, oder nach einer überhängenden Böschung auf eine gewisse Höhe (h, h_1 oder h_2) abgestochen werden, ohne eine Stützwand nöthig zu haben.

Hiebei ist, übereinstimmend mit dem praktischen Gefühle:

$$h > h_1 > h_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59).$$

Setzt man in der Gleichung (56) $\varepsilon = \alpha$, so findet man $h = \infty$, was ebenfalls sachgemäss ist, weil dann die vordere Erdböschung zur natürlichen wird, unter welcher das Erdreich bei keiner Höhe, wenn diese auch noch so gross wäre, abrutscht, so dass die Maximalhöhe, auf welche sich das freie ungestützte Erd-

reich noch im Gleichgewichte erhalten könnte, in der That unendlich gross ausfällt.

Was übrigens den in der Fig. (29) angedeuteten Fall betrifft, so gilt das hierüber Gesagte nur unter der Beschränkung, dass der Ueberhängungswinkel ε nicht zu gross wird, weil sonst die lothrechte Projection des Schwerpunktes von demjenigen Erdprisma, welches auf Grundlage der allgemeinen Berechnungsart als das gefährliche anzusehen wäre, schon ausserhalb des Böschungsfusses fallen, und dann nicht mehr die Gefahr eines Abrutschens, sondern jene einer Drehung des gedachten Erdprismas um den Böschungsfuss drohen würde, somit die Darstellung des Grenzzustandes des Gleichgewichtes unter einem neuen Gesichtspunkte angestrebt werden müsste.

Aus dieser Ursache, und weil der Fall einer überhängenden Vorderböschung überhaupt keine besondere praktische Wichtigkeit hat, wird man von demselben, für den Zweck der Untersuchungen im laufenden Capitel, vollends absehen, und sich blos auf die nähere Betrachtung der in den Figuren 27 und 28 angedeuteten Fälle beschränken.

Diese Fälle können nun derart praktisch benützt werden, dass man die Cohäsionshöhe von verschiedenen Erdarten und für verschiedene Abböschungswinkel aus Versuchen ermittelt, und hieraus nicht nur die Cohäsionsgrösse c, sondern auch den Winkel der natürlichen Erdböschung durch Rechnung ableitet.

§. 21.

Indirecte Bestimmung der Erdcohäsion (c) aus der beobachteten Cohäsionshöhe, wenn (α) der natürliche Böschungswinkel und (g) das Gewicht des Erdreiches per Cubikeinheit bekannt sind. Wie die Grösse der Erdcohäsion in directer Weise bestimmt werden kann, wurde bereits im §. 2 erörtert. Eine indirecte Ableitung dieser Grösse ergibt sich aber jetzt durch die Benützung der für c gegebenen Gleichungen (56) und (57), je nachdem das Versuchs-

Erdreich vorne schief oder lothrecht abgestochen wird. Diese Methode, welche insbesondere **Martony** bei seinen Versuchen angewendet hat, soll nachfolgend näher besprochen werden. Nur hält man es für zweckmässig, vorher noch die bezogenen Gleichungen derart umzustalten, dass hierin die beiden Böschungswinkel α und ε blos vermittelst ihrer Tangentenwerthe vertreten erscheinen, weil dadurch die Berechnung von c insoferne bequemer wird, als man hiezu trigonometrische Tafeln nicht benöthiget, vorausgesetzt, dass — wie dies in der Regel zutrifft — die bezüglichen Werthe von $tg\alpha$ und $tg\varepsilon$ unmittelbar durch das Verhältniss der Böschungsanlage zur Böschungshöhe gegeben sind.

Zu diesem Behufe beachte man, dass einerseits:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha}-1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

und anderseits:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\varepsilon} = \frac{1-\cos(\alpha-\varepsilon)}{2\sin\alpha\cos\varepsilon} = \frac{1-\cos\alpha\cos\varepsilon-\sin\alpha\sin\varepsilon}{2\sin\alpha\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}\left[\frac{1}{\cos\alpha\cos\varepsilon}-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon\right]$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)}-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

ist, somit bei der verticalen Cohäsionshöhe h_1 (Fig. 28) sich ergibt:

$$c = \frac{1}{4}gh_1\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}gh_1\left[\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\operatorname{tg}\alpha}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (60),$$

dagegen bei einer liegenden Vorderböschung des Erdreiches unter dem Winkel ε gegen das Loth, wenn (Fig. 27) die dazu gehörige Cohäsionshöhe h ist:

$$c = \frac{1}{2}gh\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\varepsilon} = \frac{1}{4}gh\left[\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)}-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}\right] (61).$$

Sogleich auf die Anwendung dieser Formeln übergehend, sollen hiezu die geeigneten Resultate aus **Martony's** Versuchen benützt werden, um nämlich aus den gemachten Beobachtungen über die Grösse der Cohäsionshöhe der, den Versuchen unter-

worfenen Erdgattungen die per Quadrateinheit entfallende Erdcohäsion c nach den Relationen (60) und (61) zu berechnen.

Die folgende Tabelle IV enthält einerseits die von Martony angeführten Erhebungsdaten hiezu, und andererseits (und zwar in der Schlusscolonne) das jeweilig sich ergebende Rechnungs-Resultat für c.

IV. Tabelle.

Post-Nr.	Bezeichnung des dem Versuche unterworfenen Erdreiches	Erhebungsdaten: Gewicht per Cubikfuss in Pfunden	Erhebungsdaten: In Bezug der natürlichen Böschung	Die Abstichböschung war lothrecht, und hiebei die Cohäsionshöhe	gegen das Loth um den Winkel ε geneigt, und hiebei das Böschungsverhältniss	gegen das Loth um den Winkel ε geneigt, und hiebei die Cohäsionshöhe	Rechnungs-Resultat für die Erdcohäsion per □ Fuss in Pfunden
		g	tg α	h_1 Fuss	tg ε	h Fuss	c
	I. Dammerde.						
1	Locker, trocken.......	74·6	1·20	—	$\frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$	3	6·8
2	Locker, etwas feucht ..	66·2	1·20	0·9	—	—	7·0
3	Dieselbe Erde	66·2	1·20	—	$\frac{1 \cdot 4}{3} = \frac{7}{15}$	3	6·8
4	Natürlich feucht, locker	71·7	1·14	—	0·3	10	37·9
5	Mit Wasser gesättigt ..	108·0	1·46	0	tg $\varepsilon <$ tg α	0	0
6	Staubtrocken, festgestossen	94·4	1·12	12	—	—	126·7
	II. Sand (Wienfluss-).						
7	Staubtrocken, locker...	98·6	1·33	—	$\frac{5 \cdot 2}{6} = \frac{13}{15}$	6	5·4
8	Locker, natürlich feucht	94·2	1·21	0·45	—	—	5·0
9	Derselbe Sand	94·2	1·21	—	$\frac{2}{3}$	3	4·7

Post-Nr.	Bezeichnung des dem Versuche unterworfenen Erdreiches	Erhebungsdaten: Gewicht per Cubikfuss in Pfunden g	In Bezug der natürlichen Böschung $\mathrm{tg}\,\alpha$	Die Abstichböschung war lothrecht, und hiebei die Cohäsionshöhe h_1 Fuss	gegen das Loth um den Winkel ε geneigt, und hiebei das Böschungsverhältniss $\mathrm{tg}\,\varepsilon$	die Cohäsionshöhe h Fuss	Rechnungs-Resultat für die Erdcohäsion per □ Fuss in Pfunden c
10	Mit Wasser gesättigt..	110·2	1·12	0·9	—	—	11·1
11	Derselbe Sand......	110·2	1·12	—	$\frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$	3	8·8
	III. Lehm (geschlämmt.)						
12	Staubtrocken, locker ..	84·9	1·21	—	$\frac{3\cdot3}{6} = 0\cdot55$	6	13·2
13	Locker, etwas feucht ..	77·7	1·21	0·9	—	—	8·2
14	Dieselbe Lehmerde .	77·7	1·21	—	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	6	14·4
15	Mit Wasser gesättigt .	112·0	1·25	3	—	—	40·4
16	Feucht mit grobem Kies gestossen	94·0	1·24	—	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	12	75·5
	IV. Schotter.						
17	Etwas feuchte Erde beigemengt	95·2	1·16	—	$\frac{5\cdot4}{6} = 0\cdot9$	6	2·0}

Die Resultate ad 1, 2 und 3, dann jene ad 8 und 9 stimmen, wie zu erwarten war, unter sich ziemlich nahe zusammen; zwischen den Resultaten ad 10 und 11 einerseits, sowie zwischen jenen ad 13 und 14 andererseits, ist jedoch eine ähnliche Uebereinstimmung nicht vorhanden, obgleich diese ebenfalls zu erwarten gewesen wäre. Die Ursache der Differenzen liegt ohne Zweifel in der Schwierigkeit, Versuche der angedeuteten Art mit einer halbwegs

erträglichen Genauigkeit durchzuführen. Insbesondere bei den Martony'schen Versuchen, wo das Erdreich zwischen den Seitenwänden des Probekastens eingezwängt wurde, konnte die Richtigkeit der Erhebungsresultate, namentlich in dem Falle des Anstampfens der Erde in dem Kasten selbst, merklich leiden, weil hiedurch dasselbe mehr oder weniger an die Seitenwände angepresst, und dort ein Reibungswiderstand gegen das Abstürzen der Erde hervorgerufen wurde. Rücksichtlich des feuchten Lehmes kommt überdies in Betracht, dass derselbe an jenen Kastenwänden ankleben, und dieserwegen eine gewisse Cohäsion zwischen den Wänden und der Lehmerde entstehen musste, wodurch die Richtigkeit der bezüglichen Beobachtungen gleichfalls beeinträchtigt wurde. Endlich muss hier neuerdings bemerkt werden, dass die Methode, nach welcher Martony die natürliche Böschung erhob, nur bei nicht oder ganz schwach cohärirender Erde, nicht aber auch bei dem Vorhandensein einer stärkeren Cohäsion, anwendbar ist. Wohl glaubte Martony, dieser Unzukömmlichkeit bei sehr stark cohärirendem Erdreiche, wie solches durch das Anstampfen entsteht, dadurch aus dem Wege zu gehen, dass er für die verdichtete Erde dieselbe natürliche Böschung, wie für die ursprüngliche ganz lockere Masse, gelten liess; indessen ist zu einer solchen Anname eine unter allen Umständen ausreichende Berechtigung nicht vorhanden, obgleich nicht in Abrede gestellt werden soll, dass dieselbe mitunter zulässig sein kann.

§. 22.

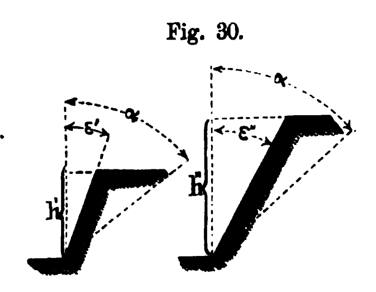
Gleichzeitige Berechnung der Erdcohäsion (c) und der natürlichen Erdböschung (tgα) aus der Beobachtung zweier oder mehrerer Cohäsionshöhen für verschiedene Abstichrichtungen, wenn das Gewicht des Erdreiches per Cubikeinheit (g) bekannt ist. Mit der im vorigen §. angedeuteten Methode, zur Berechnung der Cohäsionsgrösse c aus dem Resultate je Einer Beobachtung in Bezug auf die Cohäsionshöhe, ist der Uebelstand verbunden, dass

man hiezu stets die natürliche Böschung des, dem Versuche unterworfenen Erdreiches kennen muss.

Um diesem Uebelstande auszuweichen, wird in dem gegenwärtigen §. eine andere Methode vorgeschlagen, die ebenfalls eine indirecte ist und darin besteht, dass man mit einem und demselben Erdreich bezüglich der Cohäsionshöhe mindestens **zwei** Versuche anstellt, nämlich die fragliche Höhe einmal für **eine**, und das zweite Mal für eine **andere Abstichböschung** erhebt, so dass man schliesslich zwei Gleichungen erhält, aus denen die zwei Unbekannten α und c berechnet werden können.

Gesetzt, es werde bei solchen Versuchen die Vorderböschung des Erdreiches einmal um den Winkel ε' und das andere Mal um den Winkel ε'' gegen das Loth abgestochen (Fig. 30), und man überzeugt sich hiebei, dass die grösste Höhe, auf welche sich die oben horizontal abgeglichene Erdmasse ohne Stützwand noch im Gleichgewichte erhalten kann, h', beziehungsweise h'' sei; so hat man mit Rücksicht auf die Formeln (56) offenbar:

Fig. 30.



$$\left.\begin{aligned} h' &= \frac{2c}{g}\,\frac{\sin\alpha\cos\varepsilon'}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon')}\,\ldots\ldots\ldots \\ h'' &= \frac{2c}{g}\,\frac{\sin\alpha\cos\varepsilon''}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon'')}\,\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ldots(62),$$

und diese Gleichungen sind es nun, welche man nach den beiden Unbekannten α und c aufzulösen hat.

Hiebei kann man auf folgende Art vorgehen:

$$\frac{h'}{h''} = \frac{\cos\varepsilon'\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon'')}{\cos\varepsilon''\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon')},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon')} = \sqrt{\frac{h'\cos\varepsilon''}{h''\cos\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\frac{h'}{\cos\varepsilon'}}{\frac{h''}{\cos\varepsilon''}}}.$$

Es ist aber für irgend zwei Winkel x und y allgemein:

$$\sin \tfrac{1}{2}(x - y) = \cos \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} y \left(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} y\right),$$

daher insbesondere:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon'')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon')} = \frac{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'' \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon''\right)}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon' \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon'\right)},$$

somit:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon'} = \frac{\cos \frac{1}{2} \varepsilon'}{\cos \frac{1}{2} \varepsilon''} \frac{\sqrt{\frac{h'}{\cos \varepsilon'}}}{\sqrt{\frac{h''}{\cos \varepsilon''}}}.$$

Weiter hat man für jeden Winkel x allgemein:

$$\cos \tfrac{1}{2} x \sqrt{\frac{1}{\cos x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{1}{2} x}{\cos x}} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 \cos x}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sec x + 1)},$$

und hiernach insbesondere:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon''}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon'} = \frac{\sqrt{h'(\sec \varepsilon' + 1)}}{\sqrt{h''(\sec \varepsilon'' + 1)}}.$$

Diese Gleichung nach $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ aufgelöset, gibt:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon'' \sqrt{h''(\sec \varepsilon'' + 1)} - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon' \sqrt{h'(\sec \varepsilon' + 1)}}{\sqrt{h''(\sec \varepsilon'' + 1)} - \sqrt{h'(\sec \varepsilon' + 1)}}.$$

Es ist aber wieder für jeden Winkel x allgemein:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}},$$

folglich kann man die vorige Gleichung für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ auch so schreiben:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{\sqrt{h''(\sec \varepsilon'' - 1)} - \sqrt{h'(\sec \varepsilon' - 1)}}{\sqrt{h''(\sec \varepsilon'' + 1)} - \sqrt{h'(\sec \varepsilon' + 1)}} \quad \ldots (63),$$

wodurch die Eine Unbekannte α bestimmt ist.

Die zweite Unbekannte folgt aus jeder der beiden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{2} g h' \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon')}{\sin \alpha \cos \varepsilon'} \ldots\ldots\ldots \\ c &= \tfrac{1}{2} g h'' \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon'')}{\sin \alpha \cos \varepsilon''} \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (64).$$

Ist in dem Einen Versuchsfalle die Erdböschung vertical, also z. B. $\varepsilon' = 0$, so vereinfachen sich die vorigen Gleichungen, indem man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha &= \frac{\sqrt{h''(\sec\varepsilon''-1)}}{\sqrt{h''(\sec\varepsilon''+1)}-\sqrt{2h'}} \quad \ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{\sqrt{\sec\varepsilon''-1}}{\sqrt{\sec\varepsilon''+1}-\sqrt{2\frac{h'}{h''}}} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (65)$$

$$c = \tfrac{1}{2} g h' \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{4} g h' \operatorname{tg} \alpha/_2 \ \ldots\ldots\ldots\ (66).*)$$

Indem man sogleich auf die beispielsweise Anwendung der vorgeschlagenen Methode übergeht, sollen hiezu die in der Tabelle IV unter den Nummern 2 und 3, 8 und 9, 10 und 11, endlich 13 und 14 angedeuteten Doppelversuche benützt werden.

Nach dem ersten Versuchspaare hat sich nämlich für etwas feuchte, lockere Dammerde im Gewichte von 66·2 Pfd. per Cubikfuss die Cohäsionshöhe bei lothrechtem Absticbe mit $h' = 0 \cdot 9$, bei schiefem Absticbe dagegen, und zwar für $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{7}{15}$, mit $h'' = 3$ Fuss ergeben. Diese Daten führen auf die Resultate:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= 0 \cdot 476 \\ \operatorname{tg}\alpha &= 1 \cdot 231 \\ \alpha &= 50^0\, 55' \end{aligned}\right\} \text{ und } c = 7 \cdot 1 \text{ Pfund.}$$

Für das zweite Versuchspaar, welches auf einen und denselben Sand im lockeren und natürlich feuchten Zustande Bezug nimmt, hat man zu setzen:

$$g = 94 \cdot 2 \text{ Pfd.},\ h' = 0 \cdot 45,\ h'' = 3',\ \operatorname{tg}\varepsilon = \tfrac{2}{3},$$

und man erhält hiernach:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= 0 \cdot 480 \\ \operatorname{tg}\alpha &= 1 \cdot 247 \\ \alpha &= 51^0\, 16' \end{aligned}\right\} \text{ und } c = 5 \cdot 1 \text{ Pfund.}$$

Auf den mit Wasser gesättigten Sand im Gewichte von $g = 110 \cdot 2$ Pfd. bezieht sich das dritte Versuchspaar, und es

---

*) Um $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, c, sowie $\operatorname{tg}\alpha$ ohne Zuhilfename von trigonometrischen Tafeln zu berechnen, beachte man, dass (indem von den Böschungswinkeln ε' und ε'' die Tangente stets durch das Verhältniss zwischen der Anlage und Höhe der Erdböschung dargestellt ist) zunächst die Secante dieser Winkel

ist hiebei insbesondere: $h' = 0' \cdot 9$, $h'' = 3'$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2}$. Diesen Beobachtungsdaten entsprechen die Rechnungsresultate:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = 0 \cdot 505 \\ \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 355 \\ \alpha = 53^{0}\ 36' \end{array}\right\} \text{ und } c = 12 \cdot 5 \text{ Pfund.}$$

Zu dem vierten Versuchspaare endlich gehören die Beobachtungsdaten: $h' = 0' \cdot 9$, $h'' = 6'$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2}$, für lockere etwas feuchte Lehmerde im Gewichte von 77 Pfd. per Cubikfuss. Nach diesen Daten findet man:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = 0 \cdot 379 \\ \operatorname{tg} \alpha = 0 \cdot 885 \\ \alpha = 41^{0}\ 31' \end{array}\right\} \text{ und } c = 6 \cdot 6 \text{ Pfund.}$$

Die Rechnungsresultate für das letzte Versuchspaar sind augenscheinlich unbrauchbar, weil namentlich die natürliche Böschung hieraus steiler, als aus dem directen Versuche, folgen würde; während es doch in der Natur der Sache liegt, anzunehmen, dass schon dieser Versuch die fragliche Böschung, wegen des Einflusses der Erdcohäsion, zu steil ergeben haben dürfte. Die bemerkte Anomalie kann ihre Ursache wohl nur in den am Schlusse des vorigen §. angedeuteten Mängeln des zur Beobachtung von Cohäsionshöhen angewendeten Verfahrens haben, welche Mängel gerade bei dem in Rede stehenden Versuchspaare (der Klebrigkeit des Materiales halber) einen auffälligeren Einfluss genommen haben mochten.

Dagegen erscheinen die zu den übrigen drei Versuchspaaren gehörigen Rechnungsresultate, bei denen eine Anomalie ähnlicher Art nicht vorhanden ist, ganz annehmbar; ja der rechnungsmässig gefundene Winkel für die natürliche Erdböschung hat überall

---

aus dem Ausdruck $\sqrt{1 + (\operatorname{tg})^2}$ gefunden wird, und schliesslich zwischen den Tangentenwerthen des halben und des ganzen Winkels α die Gleichung: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$ besteht. Erst, wenn man den Winkel α selbst bestimmen will, hat man trigonometrische Tafeln nöthig.

mehr Wahrscheinlichkeit für sich, als der durch die directen Versuche von **Martony** ermittelte; weil man nämlich bei cohärirender Erde immer Gefahr läuft, durch solche directe Versuche verleitet zu werden, die fragliche Erdböschung steiler, als sie wirklich ist, anzunehmen.

Anmerkung.

Werden bei einem und demselben Erdreiche mehr als zwei Cohäsionshöhen (jedesmal bei einer anderen Abstichböschung) beobachtet, so erhält man zur Bestimmung der beiden Unbekannten α und c mehr als zwei Bedingungsgleichungen, und man kann sodann die wahrscheinlichsten Werthe hiefür nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln.

Im Interesse der Wissenschaft und der Praxis ist es zu empfehlen, noch weitere umfassende Versuche in der angedeuteten Hinsicht, und zwar in nicht zu kleinem Massstabe und mit Vermeidung der den älteren Versuchen anklebenden Mängel, anzustellen, um die theoretisch ermittelte Abhängigkeit der Cohäsionshöhe von der Cohäsionskraft einer noch eindringlicheren Prüfung unterwerfen zu können.

§. 23.

Abhängigkeit der Cohäsionsgrösse c von dem Grade der Feuchtigkeit und der Dichtigkeit der Erde. Diese Abhängigkeit zeigen die in den §§. 2, 21 und 22 ersichtlichen Resultate der Versuche und der darauf gestützten Berechnungen.

Obgleich gegen die Correctheit der gedachten Versuche mancherlei Bedenken geltend gemacht wurden, und daher, was die dazu gehörigen Ziffern betrifft, diese letzteren mitunter blos als ganz beiläufige gelten können, so ist man dennoch berechtiget, im Ganzen und Grossen genommen einige wahrgenommene Gesetze hervorzuheben, denen eine praktische Wichtigkeit beizumessen ist.

1. **Dammerde** hat im trockenen oder in etwas feuchtem Zustande nahezu die gleiche Cohäsion; diese ist zwar im lockeren Zustande nicht bedeutend (circa 7 Pfd. per Quadratfuss), kann aber durch Verdichtung des Erdreiches wesentlich (bis auf 100 Pfd. per Quadratfuss und darüber hinaus) gesteigert werden. Voll-

kommen mit Wasser gesättigte Dammerde ist als ganz cohäsionslos zu betrachten.

2. Sand hat im trockenen oder in etwas feuchtem Zustande ebenfalls nahezu die gleiche Cohäsion, die übrigens kleiner, als jene der Dammerde ist. (Für den in der Tabelle IV bezeichneten Sand ist ungefähr $c = 5$ Pfd. per Quadratfuss.) Die mögliche Verdichtung des Sandes durch Anstampfen ist nicht der Rede werth, daher auch hiedurch die Cohäsion fast gar nicht alterirt wird. Dagegen kann durch Wasserbeimengung die Cohäsion des Sandes nicht unwesentlich vermehrt werden. (Bei dem untersuchten Wienflusssande, als dieser mit Wasser gesättigt wurde, war die Cohäsion fast doppelt so gross, wie in seinem anfänglich trockenen Zustande.)

3. Lehm hat schon im lockeren Zustande eine Cohäsion, welche jene der Dammerde und des Sandes an Grösse übertrifft. Dieselbe scheint mit der Menge des Wassers, das man dem Lehme beigibt, zuzunehmen, denn nach der Tabelle IV ergab sich für den mit Wasser gesättigten Lehm eine Cohäsion von circa 40 Pfd. per Quadratfuss, während solche für den trockenen oder etwas feuchten Zustand zwischen 8 und 14 Pfd. berechnet wurde. Noch bedeutender aber nimmt die Cohäsion des Lehmes durch Verdichtung zu, besonders wenn derselbe zugleich angefeuchtet wird. Laut Tabelle I ergab sich z. B. in einem solchen Falle, wobei das Gewicht per Cubikfuss anfänglich 77·7 Pfd. betrug und durch Anstampfung auf 107 Pfd. gebracht wurde, die Cohäsion sogar mit $c = 166 \cdot 6$ Pfd. per Quadratfuss.

4. Schotter in reinem Zustande hat keine Cohäsion. Wird demselben aber Erde beigemengt, so kommt eine solche zur Wirksamkeit.

§. 24.

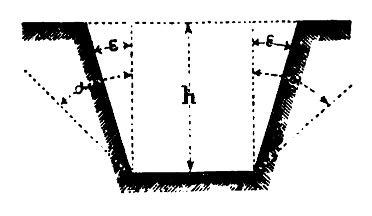
Anwendung der Formeln für die Cohäsionshöhen bei provisorischen Erdaushebungen. Sind für ein Erdreich der natürliche Böschungswinkel (α) und die Cohäsionshöhe (h_1) bei verticalem Abstiche bekannt, so kann man in Bezug auf provisorische Erdaushebungen, deren Böschungen nämlich nur eine

vorübergehende Haltbarkeit besitzen sollen, insbesondere zwei praktisch wichtige Fragen beantworten.

Erste Frage. Auf welche grösste Tiefe h kann ein Graben, ohne dass seine Böschungen gebölzt werden müssen, ausgehoben werden, wenn das Verhältniss der Böschungsanlage zur Böschungshöhe $\operatorname{tg} \varepsilon$ ausgeführt werden soll? (Fig. 31.)

Zweite Frage. Wenn ein solcher Graben auf die Tiefe h ausgehoben werden soll, wie gross muss man mindestens das Böschungsverhältniss $\operatorname{tg} \varepsilon$ annehmen?

Fig. 31.



Ad I. Um die erste Frage zu beantworten, beachte man, dass die Grabentiefe oder Cohäsionshöhe h aus den gegebenen Grössen $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \varepsilon$ und h_1 zu berechnen ist. Hiezu dienen die Gleichungen (56) und (57), denn man hat hiernach:

$$h_1 = \frac{2c}{g} \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \text{ und } h = \frac{2c}{g} \frac{\sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)},$$

daher auch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{h_1} &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)} \cdots\cdots \\ h &= h_1 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)} \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (67),$$

so dass hieraus h bestimmbar ist.

Um eine solche Rechnung ohne Zuhilfename von trigonometrischen Tafeln auszuführen, stalte man diese Formeln derart um, dass hierin blos die Werthe für $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \varepsilon$ vorkommen. In diesem Falle erhält man:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} - 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} \cdots (68^*).$$

*) Es ist nämlich:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)} = \frac{(1 - \cos \alpha) \cos \varepsilon}{1 - \cos (\alpha - \varepsilon)} = \frac{(1 - \cos \alpha) \cos \varepsilon}{1 - \cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos \alpha} - 1}{\frac{1}{\cos \alpha \cos \varepsilon} - 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} - 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Ex. Auf welche Tiefe (h) kann eine Erdaushebung ohne Bölzung vorgenommen werden, wenn für die Seitenböschung das Verhältniss $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{2}$ anzuordnen ist, und aus Versuchen sich ergeben hat, dass die Cohäsionshöhe bei verticalem Abstiche $h_1 = 3$ Fuss beträgt und der natürlichen Erdböschung das Verhältniss $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ zukommt. Nach diesen Daten findet man:

$$\frac{h}{h_1} = 3 \cdot 84, \text{ daher } h = 3 \cdot 84\, h_1 = 11 \cdot 5 \text{ Fuss.}$$

Ad II. Zur Beantwortung der zweiten Frage muss man $\operatorname{tg} \varepsilon$ aus den Grössen $\operatorname{tg} \alpha$, h und h_1 berechnen, in welcher Absicht sodann die Gleichung (68) nach $\operatorname{tg} \varepsilon$ aufzulösen ist. Hiedurch findet man:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = a \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(a^2 - 1)} \quad \ldots\ldots (69),$$

worin als Abkürzung:

$$1 + \frac{h_1}{h} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1\right) = a$$

gesetzt wurde.

Ex. Nach welcher steilsten Böschung kann man einen Graben auf $11\frac{1}{2}$ Fuss Tiefe, ohne bölzen zu müssen, ausheben, wenn bekannt ist, dass die Cohäsionshöhe bei verticalem Abstiche 3 Fuss beträgt, und der natürlichen Böschung des Erdreiches das Verhältniss $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ entspricht. Hier ist: $h_1 = 3$, $h = 11\frac{1}{2}$, $\frac{h_1}{h} = \frac{6}{23}$, $a = 1 \cdot 147$, somit nach Gleichung (69): $\operatorname{tg} \varepsilon = 0 \cdot 500 = \frac{1}{2}$.

Um in Fällen der angedeuteten Art schneller zum Resultate zu gelangen, hat schon Français eine Tabelle berechnet, in welcher für verschiedene Werthe von $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \varepsilon$ die dazu gehörigen Werthe von $\frac{h_1}{h}$ eingetragen sind*).

Nach diesen Berechnungen ist die folgende Tabelle zusammengestellt.

*) Diese Tabelle ist auch in den auf Seite 46 erwähnten Werken von Martony und von Navier-Westphal, dann in dem österr. Baualmanach vom Jahre 1859 zu finden.

V. Tabelle*).

Werthe für tg ε	Werthe für tg α							
	0·90	1·00	1·10	1·20	1·30	1·40	1·50	1·60
0·20	1·80	1·71	1·64	1·59	1·55	1·52	1·49	1·47
0·25	2·14	1·99	1·89	1·82	1·75	1·70	1·66	1·63
0·30	2·57	2·35	2·19	2·08	1·99	1·91	1·86	1·81
0·35	3·13	2·79	2·56	2·39	2.27	2·17	2·08	2·02
0·40	3·88	3·36	3·02	2·78	2 60	2·46	2·35	2·26
0·45	4·91	4·11	3·60	3·24	3·00	2·81	2·66	2·54
0·50	6·38	5·11	4·34	3·84	3·48	3·22	2·02	2·87
0·55	8·59	6·47	5·31	4·58	4·08	3·72	3·45	3·24
0·60	11·93	8·41	6·63	5·53	4·83	4·33	3·97	3·69
0·65	18·05	11·28	8·40	6·77	5·76	5·08	4·58	4·22
0·70	28·26	15·77	10·90	8·42	6·96	6·00	5·33	4·84
0·75	51·54	23·26	14·63	10·69	8·52	7·16	6·25	5·60
0·80	119·08	37·41	20·47	13·92	10·61	8·65	7·39	6·51
0·85	488·06	68·21	30·26	18·67	13·46	15·59	8·82	7·63
0·90	∞	157·39	48·55	26·65	17·51	13·18	10·65	9·01
0·95	..	645·69	86·59	38·61	23·50	16·73	13·03	10·79
1·00	..	∞	204·69	61·95	32·86	21·77	16·21	12·98
1·05	..	..	840·78	113·03**	48·60	29·21	20·57	15·88
1·10	..	..	∞	260·64	79·01	40·81	26·73	19·74
1·15	..	..	..	1072·65	142·23	60·35	35·87	25·04
1·20	..	..	..	∞	328·14	96·93	50·09	32·53

*) Français hat in seiner Tabelle für tg α auch die Werthe 0·5, 0·6, 0·7, 0·8 aufgenommen, welche hier weggelassen wurden, weil sie praktisch nicht vorkommen.

**) An dieser Stelle stehen in der ursprünglichen Tabelle die offenbar unrichtigen Ziffern 68·11, welche hier corrigirt erscheinen.

Die Einrichtung dieser Tabelle besteht darin, dass dort, wo die verticale Colonne für tg α sich mit der horizontalen für tg ε kreuzt, die daraus nach der bezüglichen Formel (67) oder (68) berechnete Verhältnisszahl für $\frac{h}{h_1}$ eingeschrieben wurde, wodurch entweder diese letztere, wenn die Werthe für tg α und tg ε gegeben sind, oder aber das Böschungsverhältniss tg ε, falls man die Werthe für tg α und $\frac{h}{h_1}$ kennt, leicht bestimmt werden kann.

Geht man, um sogleich die Anwendung dieser Tabelle zu zeigen, auf das erste der beiden vorbesprochenen Beispiele zurück, in welcher die Grössen $\operatorname{tg}\alpha = 1{\cdot}2$, $\operatorname{tg}\varepsilon = 0{\cdot}5$ und $h_1 = 3$ Fuss gegeben waren, so erhält man, wenn die, an der jetzt in Betracht kommenden Kreuzungsstelle eingeschriebene Tabellenzahl 3.84 berücksichtigt wird, eben so, wie früher:

$$\frac{h}{h_1} = 3{\cdot}84, \text{ und } h = 3{\cdot}84\ h_1 = 11{\cdot}5 \text{ Fuss.}$$

Es versteht sich von selbst, dass, wenn die gegebenen Zahlenwerthe, mit denen man in die Tabelle einzugehen hat, in dieser nicht genau enthalten sind, das Resultat mittelst des in ähnlichen Fällen üblichen Interpolationsverfahrens aufzusuchen ist.

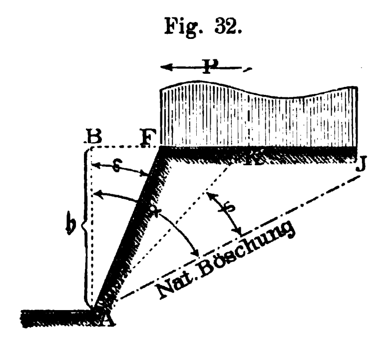
Insoferne man übrigens für die Haltbarkeit der Böschungen einen gewissen Sicherheitsgrad einführen muss, kann man diesen dadurch erreichen, dass man nicht die ganze Cohäsionshöhe h_1, welche sich bei verticalem Abstiche aus der Beobachtung ergibt, sondern nur einen Theil davon ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$) in Rechnung nimmt; was natürlicher Weise zur Folge haben muss, dass verhältnissmässig entweder die Aushebungstiefe h, falls diese gesucht wird, kleiner, oder das Böschungsverhältniss tg ε, insoferne letzteres in Frage steht, grösser entfällt.

§. 25.

Cohäsionshöhe des Erdreiches, wenn dieses an seiner Oberfläche eine besondere Belastung zu tragen hat. (Fig. 32.) Es ist klar, dass die fragliche Cohäsionshöhe, diese sei $\overline{AB} = \mathfrak{h}$, kleiner sein muss, als wenn die Oberfläche des Erdreiches unbelastet ist. Zur Bestimmung von $\mathfrak{h}$ hat man in

derselben Weise vorzugehen, wie im §. 19, nur mit dem Unterschiede, dass der dortige Werth für X, welcher lediglich das Gewicht des Erdprisma's AFK bezeichnet, in dem gegenwärtigen Falle auch noch denjenigen Theil der Belastung in sich begreift, welcher auf der Oberfläche des Erdreiches innerhalb der Strecke $\overline{FK}$ vorkommt. Heisst dieser Belastungstheil P, so hat man daher:

Fig. 32.



$$X = g \triangle AFK + P \ldots\ldots (70),$$

wobei P eine Function von φ, so wie von dem Gesetze der Belastungsvertheilung ist, übrigens hiebei vorausgesetzt wird, dass die lothrechte Abtrennung der gedachten Belastung in jedem beliebigen Punkt K ohne Widerstand erfolgen kann.

Um sogleich auf einen bestimmten Fall überzugehen, werde angenommen, dass die Belastung sich über die Oberfläche des Erdreiches gleichmässig vertheilt und insbesondere das Gewicht p per Quadrat-Einheit entfällt.

In diesem Falle ist:

$$P = p \,.\, \overline{FK},$$

daher:

$$\begin{aligned} X &= g \,.\, \triangle AKF + p \,.\, \overline{FK} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{FK} + p \,.\, \overline{FK} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g \left(1 + \frac{2p}{g \,.\, \overline{AB}}\right) \overline{AB} \,.\, \overline{FK} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g \left(1 + \frac{2p}{g\,\mathfrak{h}}\right) \mathfrak{h} \,.\, \overline{FK} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g'\, \mathfrak{h} \,.\, \overline{FK} \ldots\ldots (71), \end{aligned}$$

wenn man abkürzend:

$$g' = g \left(1 + \frac{2p}{g\,\mathfrak{h}}\right) \ldots\ldots (72)$$

setzt.

Dieser Ausdruck beweiset, dass das Gewicht X dasselbe bleibt, wie in dem eingebildeten Falle, in dem man sich die Oberfläche des Erdreiches nicht belastet, dagegen aber vorstellt, das Erdreich selbst habe per Cubikeinheit das grössere Gewicht $g' = g\left(1 + \frac{2p}{g\mathfrak{h}}\right)$.

Dieser Wahrnehmung zu Folge wird sich offenbar in der Untersuchung des §. 19, um diese gegenwärtig anzuwenden, nichts ändern, als der Werth für g, anstatt welchem nämlich überall g' zu schreiben ist.

Unter dieser Bedingung kann man für die fragliche Cohäsionshöhe $\mathfrak{h}$ sogleich die Gleichung (55) benützen und setzen:

$$\mathfrak{h} = \frac{2c}{g'} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots. (73),$$

wobei der gefährliche Winkel γ, weil dieser von g unabhängig ist, also auch nicht von g' abhängen kann, denselben Werth wie nach der Gleichung (54), nämlich:

$$\gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

beibehält.

Verfolgt man die Gleichung (73) weiter, so findet man:

$$\mathfrak{h} = \frac{2c}{g\left(1 + \frac{2p}{g\mathfrak{h}}\right)} \cdot \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)},$$

welche endlich nach $\mathfrak{h}$ aufgelöset, zu dem Resultate führt:

$$\mathfrak{h} = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} - \frac{2p}{g} \ldots. (75).$$

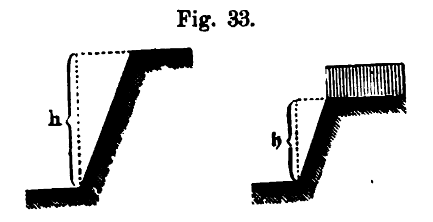
Ist die Belastung auf der Oberfläche des Erdreiches $p = 0$, so geht die Cohäsionshöhe $\mathfrak{h}$ in jene über, welche nach der Gleichung (55) mit h bezeichnet ward, so dass man auch findet:

$$\mathfrak{h} = h - \frac{2p}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (76).$$

Die Cohäsionshöhe ($\mathfrak{h}$) des belasteten Erdreiches ist somit um $\frac{2p}{g}$ kleiner, als jene (h) des unbelasteten

und es ist bemerkenswerth, dass diese Verkleinerung weder von α noch von ε abhängig ist. (Fig. 33.)

Fig. 33.



Ist z. B. $h = 6$ Fuss, $g = 80$ Pfd., und $p = 160$ Pfd. so erhält man: $\mathfrak{h} = 6 - 4 = 2$ Fuss.

Selbstverständlich ist die Gleichung (76) nur brauchbar bis zu dem kleinsten Werthe: $\mathfrak{h} = 0$; ein negativer Werth für $\mathfrak{h}$ dagegen würde die Unmöglichkeit des Vorhandenseins einer Cohäsionshöhe anzeigen, d. h. in einem solchen Falle könnte sich das belastete Erdreich auf gar keine Höhe, so klein diese auch angenommen werden wollte, ohne gestützt zu sein, im Gleichgewichte erhalten.

Zweiter Abschnitt.

Activer Erddruck an eine Stützwand ohne Rücksicht auf die Reibung zwischen derselben und der Erde.

§. 26.

Einfluss der Weglassung dieser Reibung. Es leuchtet schon von vorne herein ein, dass durch die Weglassung der gedachten Reibung der normale Erddruck auf eine Stützwand rechnungsmässig grösser, als in der Wirklichkeit entfällt, weil diese Reibung jedenfalls als eine der Widerstandskräfte gegen das Abstürzen der Frde mitwirkt. Analytisch ergibt sich diese Thatsache aus der Betrachtung der Formel (28) für die Grösse Δ:

$$\Delta = \frac{\cos \varrho}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)} [X \sin \varphi - c S \sin \alpha],$$

welche nämlich, um den normalen Erddruck D zu erhalten, in Bezug auf φ zu einem Maximum zu machen ist.

Sieht man vorerst von diesem Maximalwerthe ab und betrachtet den vorstehenden Ausdruck in seiner ganz allgemeinen Form, so hat man, um den Einfluss der Reibung, welche zwischen der Erde und Stützwand stattfindet, d. h. um den Einfluss des Reibungswinkels ϱ zu untersuchen, blos dem Factor $\frac{\cos \varrho}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)}$ die Aufmerksamkeit zuzuwenden, weil eben dieser Factor mit jenem Reibungswinkel variabel ist, während der andere Factor innerhalb der Eckklammern hievon nicht abhängt.

Setzt man den erstgenannten Factor:

$\frac{\cos \varrho}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)} = F(\varrho)$, so ist der erste Differential-Quotient in Bezug auf ϱ:

$$\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} = - \frac{\sin (\varphi + \varepsilon)}{\cos^2 (\varphi + \varepsilon - \varrho)} \dots\dots\dots\dots\dots \text{(77)},$$

also negativ, was anzeigt, dass $F(\varrho)$ mit der Zuname des Reibungswinkel ϱ unter allen Umständen abnimmt, wie auch der Winkel φ gewählt werden mag.

Hiernach wird der Werth für $\varDelta$ jedenfalls grösser, wenn man den Reibungswinkel $\varrho = 0$ setzt, d. h. die Reibung zwischen der Stützwand und der Erde ausser Acht lässt, welche Bemerkung sofort auch für das Maximum von $\varDelta$, d. i. für die Grösse des normalen Erddrucks D gilt und mit dem Eingangs Gesagten übereinstimmt.

Wenn man also $\varrho = 0$ setzt und hiedurch von der Formel (28) auf die bereits im §. 17 lit. A angedeutete Relation:

$$\left.\begin{aligned} D = \max \varDelta &= \max \left[\frac{X \sin \varphi - c S \sin \alpha}{\cos (\varphi + \varepsilon)}\right] \\ &= \frac{G \sin \gamma - c A \sin \alpha}{\cos (\gamma + \varepsilon)} \end{aligned}\right\} \dots \text{(78)}$$

übergeht, worin $\varphi = \gamma$, $X = G$ und $S = A$ die dem Maximum von $\varDelta$ entsprechenden Werthe bedeuten; so erhält man im Vergleiche zur Wirklichkeit jedenfalls einen etwas zu grossen Werth für den normalen Erddruck D.

Da man aber in der Praxis die Stabilität der Stützwände der gehörigen Sicherheit wegen ohnehin für einen grösseren Erddruck, als der wirklich eintretende ist, berechnen, ja erfahrungsgemäss selbst das bei der Anname $\varrho = 0$ sich ergebende Resultat für D immer noch vergrössern muss, um auf Grundlage desselben die erwähnte Stabilität in praktisch brauchbarer Weise zu berechnen, so ist es demungeachtet zulässig, vorkommenden Falles den fraglichen Erddruck unter Beiseitelassung des Reibungswiderstandes zwischen Erde und Stützwand zu bestimmen, und das Resultat hiefür zu der gedachten Stabilitätsberechnung zu benützen.

Nur wird es darauf ankommen, für eine solche Berechnung stets den Sicherheitscoefficienten (dieser heisse s), womit die Grösse D noch zu multipliciren ist, entsprechend zu wählen; d. h. bei der Aufsuchung der bezüglichen Stabilitätsbedingungen von der Vorstellung auszugehen, als hätte die fragliche Stützwand dem $s$fachen des berechneten Erddruckes D, also einem solchen in der Grösse sD, zu widerstehen.

Dem fraglichen Sicherheitscoefficienten werden voraussichtlich je nach den Umständen, unter denen eine dem Erddrucke ausgesetzte Stützwand ihre Stabilität bewähren soll, verschiedene Werthe zukommen, welche, wie überhaupt in Fällen ähnlicher Art, nach Massgabe der hiezu geeigneten praktischen Erfahrungen festgestellt werden müssen.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen erkennt man, dass auch bei der Anname $\varrho = 0$ brauchbare Resultate für die Praxis sich herausstellen werden. Die einschlägige Berechnungsweise in Betreff des activen Erddruckes an eine Stützwand, wobei nämlich die Reibung zwischen dieser und der Erde bei Seite gelassen wird, hat daher auch heute noch ihre Berechtigung. Von vielen Ingenieuren wird sie um so lieber angewendet, als im Gegenfalle die Berechnungsformeln complicirter und dennoch mitunter nicht viel genauer werden, insoferne man nämlich bei Stützwänden, welche im Freien stehen, auch darauf gefasst sein muss, dass das Regen- und Schneewasser zwischen dieselben und das

Hinterfüllungsmateriale eindringt, und hiedurch den Reibungswiderstand daselbst mehr oder weniger unverlässlich macht.

In dem laufenden Abschnitte werden daher die Untersuchungen über den activen Erddruck unter der Anname durchgeführt, dass die Reibung an der Stützwand ausser Betracht bleibt.

Wie sich übrigens die Resultate gestalten, wenn jene Anname nicht gemacht wird, dieses bleibt den Untersuchungen in einem späteren Abschnitte vorbehalten. Nur mag gegenwärtig schon bemerkt werden, dass man dann bei der darauf zu gründenden Berechnung der Stabilität einer Stützwand offenbar einen verhältnissmässig grösseren Sicherheitscoefficienten wird einführen müssen, als bei Ausserachtlassung der gedachten Reibung, um hier wie dort den praktischen Verhältnissen gleichmässig zu genügen*).

Erstes Capitel.

Erddruck an eine um den Winkel ε gegen das Loth geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich eine horizontale Oberfläche im gleichen Niveau mit der Wandkrone hat.

§. 27.

Gefährliche Böschung AE, gefährliches Erdprisma AFE und Grösse des Erddruckes D in diesem Falle. (Fig. 34.)

Nach den im §. 13 aufgestellten Regeln hat man zunächst die Gleichung (28):

$$\varDelta = \frac{\cos \varrho}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)} [X \sin \varphi - cS \sin \alpha]$$

*) Insoferne es sich um die Durchführung von praktischen Versuchen in der Absicht handelt, die Resultate derselben mit jener der Theorie zu vergleichen und die Richtigkeit der letzteren zu prüfen, so muss man selbstverständlich bei den theoretischen Bestimmungen alle Umstände möglichst genau berücksichtigen, daher auch den Einfluss der Reibung zwischen Erde und Stützwand in Rechnung bringen. sonst läuft man Gefahr, zu irrigen Schlussfolgerungen zu gelangen.

in's Auge zu fassen, welche für die in dem laufenden Abschnitte geltende Voraussetzung $\rho = 0$ die einfachere Gestalt:

$$\varDelta = \frac{X \sin \varphi - c S \sin \alpha}{\cos (\varphi + \varepsilon)} \dots\dots\dots\dots\dots (79)$$

annimmt.

Hierin bedeutet X das Gewicht des Erdprismas AFK, S aber die Länge der Geraden $\overline{AK}$.

Fig. 34.

Der Maximalwerth von $\varDelta$ in Bezug auf die Variable φ gibt sofort die Grösse des Erddruckes D, und der Winkel φ, für welchen dieses geschieht, ist der Bruchwinkel γ, so dass man erhält:

$$D = \max \varDelta = \max \left[\frac{X \sin \varphi - c\, S \sin \alpha}{\cos (\varphi + \varepsilon)}\right]$$

$$= \frac{G \sin \gamma - c\, A \sin \alpha}{\cos (\gamma + \varepsilon)} \dots\dots\dots\dots\dots (80),$$

wobei G und A die bezüglichen Werthe von X und S für $\varphi = \gamma$ vorstellen.

In dem vorausgesetzten Falle hat man insbesondere:

$$X = g \cdot \triangle AFK = \tfrac{1}{2}\, g\, \overline{AF} \,.\, \overline{AK} \,.\, \sin \measuredangle FAK$$

$$= \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \frac{\sin (\alpha - \varepsilon - \varphi)}{\cos (\alpha - \varphi)}$$

$$G = g \,.\, \triangle AFE = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \frac{\sin (\alpha - \varepsilon - \gamma)}{\cos (\alpha - \gamma)}$$

$$S = \overline{AK} = \frac{H}{\cos (\alpha - \varphi)}, \quad A = \overline{AE} = \frac{H}{\cos (\alpha - \gamma)},$$

daher:

$$\varDelta = \frac{1}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}\left[\tfrac{1}{2}\,g\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi) - c\,H\sin\alpha\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi] - \frac{2c}{gH}\sin\alpha\cos\varepsilon}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)-a}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81),$$

wobei als vorläufige Abkürzung:

$$a = \frac{2c}{gH}\sin\alpha\cos\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82),$$

gesetzt wurde.

Das Maximum von $\varDelta$ nach φ findet statt, wenn das Gleiche in Bezug auf den Factor:

$$U = \frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)-a}{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}$$

eintritt, daher man — anstatt $\frac{d\varDelta}{d\varphi}=0$ — unmittelbar $\frac{dU}{d\varphi}=0$ setzen kann.

Vorher aber erscheint es zweckmässig, den Ausdruck für U in einer zum Differenziren bequemeren Form darzustellen, was dadurch geschieht, dass man die goniometrischen Relationen:

$$\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)-\cos(\alpha-\varepsilon)\right]$$

$$\cos(\alpha-\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)+\cos(\alpha+\varepsilon)\right]$$

berücksichtiget, und hiernach schreibt:

$$U = \frac{\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)-\cos(\alpha-\varepsilon)-2a}{\cos(\alpha-\varepsilon-2\varphi)+\cos(\alpha+\varepsilon)}.$$

Zum Behufe einer weiteren Abkürzung setze man:

$$b = \cos(\alpha-\varepsilon)+2a = \cos(\alpha-\varepsilon)+\frac{4c}{gH}\sin\alpha\cos\varepsilon \quad \ldots\ldots (83),$$

$$b' = \cos(\alpha+\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84),$$

$$(\alpha-\varepsilon-2\varphi) = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85),$$

so dass jetzt u an die Stelle der Variablen φ tritt, und somit nach u, anstatt nach φ, zu differenziren ist.

Hiernach findet man:

$$U = \frac{\cos u - b}{\cos u + b'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

$$\frac{dU}{du} = -(b+b')\frac{\sin u}{(\cos u + b')^2} = 0,$$

hieraus aber:

$$u = (\alpha - \varepsilon - 2\varphi) = 0, \text{ d. i.}$$

$$\varphi = \gamma = \measuredangle FAE = \frac{\alpha - \varepsilon}{2} = \tfrac{1}{2} \measuredangle FAI \ldots (87),$$

d. h. **die gefährliche Böschung halbirt den Winkel zwischen der Stützwand und der natürlichen Böschung, ohne von der Erdcohäsion abzuhängen.**

Ferner ist:

$$\measuredangle BAE = \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

$$A = \overline{AE} = \frac{H}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

$$G = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

und nach den Gleichungen (81) und (82):

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) - a}{\cos^2\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) - \frac{2c}{gH} \sin \alpha \cos \varepsilon}{\cos^2\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}\right] \quad (91).$$

Verändert man die Druckhöhe H nach und nach, so wird endlich eine solche Höhe $H = h$ zum Vorschein kommen, bei welcher kein Erddruck mehr stattfindet, so dass sich auf diese Höhe h das Erdreich auch ohne Stützwand erhalten kann. Diese besondere Höhe ist offenbar die **Cohäsionshöhe**, und sie wird gefunden, wenn man in der Gleichung (91) $H = h$ und $D = 0$ setzt.

Geschieht dieses, so erhält man als Ausdruck für die Cohäsionshöhe:

$$h = \frac{2c}{g} \frac{\sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (92),$$

welcher, wie dies auch zu erwarten war, mit der bereits auf einem anderen Wege hiefür gefundenen Gleichung (55) übereinstimmt. *)

Mit Benützung der letzten Relation erhält man für die Grösse des Erddruckes:

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left(1 - \frac{h}{H}\right) \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$$
$$= \frac{1}{2} g \frac{H(H-h)}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (93),$$

welche Gleichung indessen für Druckhöhen, die kleiner als die Cohäsionshöhe sind, nicht mehr gilt, indem dann überhaupt $D = 0$ zu setzen ist. Die Ursache davon liegt einfach darin, weil für $H < h$ in der, im Allgemeinen als gefährlich bezeichneten Böschung die Reibungs- und Cohäsionswiderstände des Erdreiches nicht mehr, wie für die Bestimmung dieser Böschung vorausgesetzt wurde, vollständig absorbirt werden, daher die Gleichung (93) nur für die Druckhöhen $H \gtreqless h$ gelten kann, rücksichtlich welcher nämlich die gedachte Voraussetzung thatsächlich zutrifft.

Dass man es in dem behandelten Falle wirklich mit einem Maximum von U in Bezug auf u zu thun hat, zeigt der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 U}{d u^2}$ an. Denn dieser ist allgemein:

$$\frac{d^2 U}{d u^2} = -(b + b^1) \frac{1 + b^1 \cos u + \sin^2 u}{(\cos u + b')^3},$$

also insbesondere für $u = o$:

$$\frac{d^2 U}{d u^2} = -\frac{b + b^1}{(1 + b^1)^2} < 0.$$

Nur der Fall, wenn $(b + b^1) = 0$ wird, bildet eine Ausname, weil sodann schon der erste Differentialquotient $\frac{d U}{d u}$ für jeden beliebigen Werth von φ verschwindet, was offenbar anzeigt, dass der ursprüngliche Ausdruck für U, beziehungsweise Δ, nicht mehr nach φ veränderlich, sondern constant ist, daher unter diesen Umständen von einer bestimmten gefährlichen Böschung und einem bestimmten gefährlichen Erdprisma keine Rede sein kann.

---

*) Auf diese Weise hat Français die Cohäsionshöhe des Erdreiches bestimmt, worauf die Anmerkung im §. 20 sich bezieht.

Augenscheinlich deutet diese Eigenschaft auf die Natur der tropfbaren Flüssigkeiten hin, was sich auch analytisch dadurch ergibt, dass man untersucht, unter welchen Bedingungen die oberwähnte Summe $(b + b^1)$ verschwindet.

Es ist nämlich auf Grundlage der Gleichungen (83) und (84):

$$(b + b^1) = \cos(\alpha + \varepsilon) + \cos(\alpha - \varepsilon) + \frac{4c}{gH} \sin\alpha \cos\varepsilon$$

$$= 2\cos\varepsilon \left[\cos\alpha + \frac{2c}{gH}\sin\alpha\right],$$

und dieser Werth kann nur verschwinden, wenn in Bezug auf das Hinterfüllungsmateriale einerseits $\alpha = 90^\circ$ und andererseits $c = 0$ ist, was in der That bei den tropfbaren Flüssigkeiten eintritt. Das Resultat für D wird sodann nach der Gleichung (81):

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \frac{\sin\varphi \sin(90^\circ - \varepsilon - \varphi)}{\cos(90^\circ - \varphi)\cos(\varphi + \varepsilon)} = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon},$$

also, wie vorhergesehen ward, wirklich von φ unabhängig, und steht in Uebereinstimmung mit den hydrostatischen Gesetzen. Selbstverständlich folgt der gleiche Werth für D auch aus der speciellen Formel (91), wenn man dort ebenfalls $\alpha = 90^\circ$ und $c = 0$ setzt.

Steht ein cohäsionsloses Hinterfüllungsmateriale in Betracht, oder vernachlässigt man den Einfluss der vorhandenen Cohäsion, so hat man $c = h = o$, und nach der Formel (93):

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \ldots\ldots (94),$$

woraus unter Rücksichtsname auf die Formel (4) die Regel sich ergibt, dass in dem angedeuteten Falle der Erddruck eben so gross ist, wie der Druck einer tropfbaren Flüssigkeit mit dem Gewichte:

$$w = g \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (95)$$

per Cubikeinheit.

Für eine verticale Stützwand ist $\varepsilon = 0$, und hiernach insbesondere:

$$w = g \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (96).$$

Um daher in denjenigen Fällen, in welchen eine Erdcohäsion nicht in Betracht kommt, den an eine Stützwand sich ergebenden Druck des dahinter gelegenen Erdreiches mit horizontaler Oberfläche zu be-

stimmen, berechne man zunächst das Gewicht per Cubikfuss derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit, welche unter sonst gleichen Umständen denselben Druck ausüben müsste; hiernach aber den hydrostatischen Gesetzen gemäss die Grösse dieses Druckes selbst.

Hiebei kommt es, wie man sieht, vor Allem darauf an, den Werth des Factors $\left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$ zu bestimmen, mit dem nämlich das per Cubikeinheit gegebene Gewicht der Erde (g) zu multipliciren ist, um jenes der eingebildeten Flüssigkeit (w) zu erhalten.

Indem man diesen Factor derart umstaltet, dass derselbe nur von den Böschungsverhältnissen $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\varepsilon$, welche in der Regel gegeben sind, abhängt, kann man seinen Werth ohne Zuhilfename von trigonometrischen Tafeln berechnen.

Es ist nämlich:

$$\frac{w}{g} = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)} = \frac{1-\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+\cos(\alpha+\varepsilon)} = \frac{1-\cos\alpha\cos\varepsilon-\sin\alpha\sin\varepsilon}{1+\cos\alpha\cos\varepsilon-\sin\alpha\sin\varepsilon}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\alpha\cos\varepsilon}-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{\frac{1}{\cos\alpha\cos\varepsilon}+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)}-1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)}+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon} \quad (97).$$

Für eine verticale Stützwand ist $\varepsilon = 0$, somit:

$$\frac{w}{g} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+1} \ldots\ldots\ldots\ldots (98).$$

Weiter benöthigt man auch den Factor $\frac{1}{\cos\varepsilon} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon}$, dessen Werthe für die zumeist vorkommenden Wandböschungen aus der Tabelle III zu entnehmen sind.

Um die in der Formel (97) angedeutete Rechnung zu umgehen, kann man die folgende Tabelle benützen, in welcher das Resultat von $\frac{w}{g}$ für verschiedene Werthe von $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\varepsilon$ zusammengestellt sind.

VI. Tabelle*).

$\frac{e}{b} = \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 =$	tg ε, für die innere Wandböschung							
	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
tg α, für die natürliche Erdböschung 1·0	0·172	0·144	0·138	0·135	0·131	0·118	0·108	0·094
1·1	0·196	0·167	0·161	0·157	0·153	0·139	0·129	0·114
1·2	0·219	0·189	0·184	0·180	0·175	0·161	0·150	0·134
1·3	0·242	0·212	0·206	0·202	0·197	0·182	0·171	0·155
1·4	0·265	0·234	0·228	0·223	0·218	0·203	0·192	0·175
1·5	0·286	0·255	0·249	0·244	0·239	0·224	0·212	0·195
1·6	0·307	0·275	0·269	0·265	0·260	0·244	0·232	0·214
1·7	0·327	0·295	0·289	0·284	0·279	0·264	0·251	0·233
1·8	0·346	0·314	0·308	0·304	0·298	0·283	0·270	0·252
1·9	0·364	0·332	0·326	0·322	0·317	0·301	0·288	0·270
2·0	0·382	0·350	0·344	0·339	0·334	0·308	0·306	0·287
2·1	0·399	0·367	0·361	0·356	0·351	0·335	0·322	0·304

Der Gebrauch dieser Tabelle wird sogleich durch die Bemerkung klar, dass man an der Kreuzungsstelle der zu tg ε und tg α gehörigen zwei Spalten, wovon diese horizontal und jene vertical ist, das nach der Formel (97) berechnete Resultat ein-

*) Diese Tabelle hat der Verfasser zuerst in dem österreichischen Baualmanach für das Jahr 1861 veröffentlicht.

geschrieben findet. Falls man den einen oder den anderen der gegebenen zwei Werthe $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \varepsilon$, oder vielleicht beide in der Tabelle nicht genau enthalten findet, so kommt das bei derartigen Tabellen übliche Interpolationsverfahren zur Anwendung.

Ex. Es sei der Erddruck an eine liegende Stützmauer zu berechnen, wenn die Oberfläche des Erdreichs horizontal ist, die Cohäsion desselben und die Reibung an der Mauer ausser Betracht bleibt und hiezu folgende Daten bekannt sind:

Höhe der Mauer und der horizontal abgegrenzten Hinterfüllung .... $H = 30$ Fuss.
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der inneren Mauerböschung .... $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$
Erdgewicht per Cubikfuss .... $g = 85$ Pfd.
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der natürlichen Erdböschung .... $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$.

Rechnet man zunächst nach der Formel (95), wozu man jedoch trigonometrische Tafeln benöthigt, so hat man, wegen $\alpha = 51^\circ 47'$, $\varepsilon = 9^\circ 28'$, $\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) = 21^\circ 9^1/_2{}'$ und $\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right) = 30^\circ 37^1/_2{}'$:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}\right]^2 = 0 \cdot 176.$$

Um übrigens die trigonometrischen Tafeln entbehrlich zu machen, kann man auch sogleich zur Formel (97) greifen, und hierin $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$, $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$. $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 \cdot 6129$ und $\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{1}{36} = 0 \cdot 0278$ setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{w}{g} = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} - 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} + 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} = 0 \cdot 176,$$

wie zuvor.

Endlich kann man zur möglichsten Vereinfachung der durchzuführenden Rechnungsoperationen sowohl die eine als auch die andere Formel bei Seite lassen und unmittelbar die Tabelle VI benützen.

In dieser findet man unter Festhaltung des Werthes von $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$:

Für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ .... $\frac{w}{g} = 0 \cdot 161$,

„ $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 3$ .... $\frac{w}{g} = 0 \cdot 182$,

Differenz: $0 \cdot 1$ .... $0 \cdot 021$,

daher, wenn man — da $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$ ist — interpolirt:

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 021 = (1 \cdot 27 - 1 \cdot 20) : x,$$

woraus folgt:

$$x = 0{\cdot}015 \text{ und } \frac{w}{g} = 0{\cdot}161 + x = 0{\cdot}176,$$

ebenfalls wie zuvor.

Indem nun $\frac{w}{g}$ gefunden ist, erhält man, wegen $g = 85$ Pfd., weiter:

$$w = 0{\cdot}176\, g = 14{\cdot}96 \text{ Pfd.},$$

nämlich das Einheitsgewicht der eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit, welche denselben Druck ausüben würde.

Dieser Druck selbst, per Einheit der Mauerlänge verstanden, ist endlich nach der, das hydrostatische Gesetz enthaltenden Formel (94):

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 68{\cdot}25 \text{ Ctr.},$$

wenn man hiebei $H = 30'$, $w = 14{\cdot}96$ Pfd., und (nach der Tabelle III) für $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$) $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1{\cdot}0138$ setzt.

Verlangt man in einem solchen Falle auch die Berücksichtigung des Einflusses der Erdcohäsion, so muss man auf die Formel (93) zurückgehen, und hierin nebst den sonstigen Daten noch die Cohäsionshöhe des Erdreiches einführen.

Ex. Es seien wieder die Daten des vorigen Beispieles vorhanden und überdies soll etwa aus besonderen Versuchen bekannt sein, dass die Cohäsionshöhe des Erdreiches, wenn dieses in der um den Winkel ε geneigten Richtung abgestochen wird, mit $h = 3$ Fuss sich herausstellt. Um nun den unter Mitwirkung der bezüglichen Erdcohäsion entstehenden Erddruck an die Mauer nach der Formel (93) zu berechnen, hat man hierin einerseits wie in dem vorigen Beispiele, $g = 85$ Pfd., $H = 30$ Fuss, $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1{\cdot}0138$ und $\left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 = 0{\cdot}176$, und andererseits $h = 3$ zu setzen.

Hiernach findet man:

$$D = 61{\cdot}42 \text{ Ctr.},$$

also weniger wie früher, was auch einleuchtend ist, weil durch die Mitwirkung der Erdcohäsion der Erddruck an die Stützwand jedenfalls geringer ausfällt.

Nennt man im Allgemeinen den Erddruck mit Einbeziehung der Erdcohäsionswirkung . . . . D_c,
dagegen jenen ohne Rücksicht darauf . . . . D_0,

wobei die Zeiger die Cohäsionsgrösse c beziehungsweise $c = 0$ andeuten, so erhält man unter Beibehaltung der sonstigen Bezeichnungen nach den Formeln (93) und (94) das einfache Verhältniss:

$$D_c : D_0 = (H - h) : H = \left(1 - \frac{h}{H}\right) : H,$$

und hieraus:

$$D_c = \left(1 - \frac{h}{H}\right) D_0 \ldots\ldots\ldots (99),$$

wodurch die Grösse des einen Druckes aus jener des anderen leicht ermittelt werden kann.

Ex. In dem ersten der obigen zwei Beispiele wurde gefunden: $D_0 = 68 \cdot 25$ Ctr.; es ist daher für das zweite Beispiel, wegen $H = 30$ und $h = 3$ Fuss, übereinstimmend mit dem dortigen Resultate:

$$D_c = 0 \cdot 9\, D_0 = 64 \cdot 12 \text{ Ctr.}$$

Auf eine andere interessante Eigenschaft mag hier noch hingewiesen werden. Setzt man nämlich in der allgemeinen Formel (93) das Product $H(H - h)$ dem Quadrate einer neuen Höhe (H') gleich, also:

$$H(H - h) = H'^2,$$

so erhält man für den unter Mitwirkung der Erdcohäsion entstehenden Erddruck die neue Formel:

$$D = \frac{1}{2} \frac{H'^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots (100),$$

welche eben so gestaltet ist, wie die Formel (94), worin der Einfluss der Erdcohäsion ausser Acht gelassen ist, nur mit dem Unterschiede, dass hier H' statt, wie dort, H steht.

Diese Wahrnehmung gibt zur Aufstellung folgender Regel Veranlassung:

Der mit Rücksicht auf die Erdcohäsion entstehende Erddruck auf eine Stützwand von der Höhe H ist eben so gross, wie der Druck des ohne Cohäsion gedachten Erdmateriales auf die Wandhöhe H' unter übrigens

gleichen Umständen, wenn diese neue Höhe nach der Formel:

$$H' = \sqrt{H(H-h)}$$

berechnet wird.

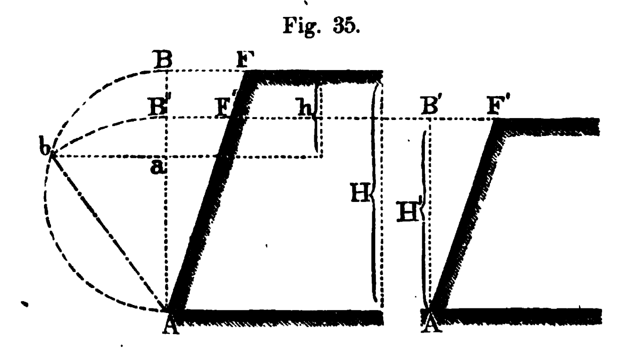
Nach den obigen beispielsweisen Daten für $H = 30$ und $h = 3\frac{1}{3}$ Fuss würde man hiernach erhalten:

$$H' = 9\sqrt{10} = 28{\cdot}46 \text{ Fuss.}$$

Die fragliche Grösse H' lässt sich aus den gegebenen Höhendimensionen H und h auch mittelst Zeichnung finden, wie folgt:

Ist (Fig. 35) $\overline{AB} = H$ und $\overline{aB} = h$, so beschreibe man über $\overline{AB}$ einen Halbkreis, stelle $\overline{ab} \perp \overline{AB}$ und ziehe die Sehne

Fig. 35.



$\overline{Ab}$. Diese letztere stellt die neue Höhe H' vor, weshalb man $\overline{AB'} = \overline{Ab} = H'$ zu machen, und durch B' eine horizontale Ebene zu legen hat, um die Oberfläche des Erdreiches auf die neue Höhe H' zu begrenzen. Denn es ist:

$$\overline{Ab} = \sqrt{\overline{AB}\,.\,\overline{Aa}} = \sqrt{\overline{AB}\,(\overline{AB} - \overline{aB})} = \sqrt{H\,(H-h)},$$

also in der That so gross, wie H' nach der obigen Formel sein soll.

§. 28.

Graphische Darstellung des Erddruckes. Zunächst auf den besonderen Fall

A) übergehend, wenn die Erdcohäsion gleich Null ist oder nicht in Betracht kommt, ist die Grösse des Erddruckes nach der Formel (94):

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2.$$

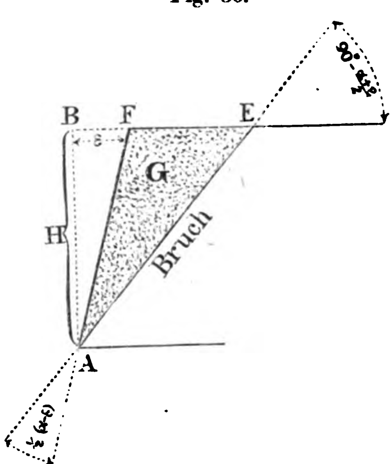
Nach der Formel (90) aber war:

$$G = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}.$$

Somit ergibt sich:

$$D : G = \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \varepsilon) : \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)$$

Fig. 36.



G bezeichnet, wie bekannt, das Gewicht des gefährlichen oder Bruchprismas AFE (Fig. 36). In dem Profile dieses Prismas ist, wie in der Figur bereits eingeschrieben, der Dreieckswinkel bei $A = \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)$, dagegen jener bei $E = 90^0 - \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)$, was man aus den Gleichungen (87) und (88) leicht erkennt. Dieserwegen besteht die Proportion:

$$\overline{FE} : \overline{AF} = \sin \measuredangle FAE : \sin \measuredangle AEF = \sin \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) : \cos \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2} \right)$$

also auch:

$$D : G = \overline{FE} : \overline{AF} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101).$$

Hiernach verhält sich der Erddruck zum Gewichte des Bruchprismas, wie in dem dreieckigen Profile dieses letzteren die horizontale Seite $\overline{FE}$ zur Stützwandseite $\overline{AF}$.

Auf Grundlage dieser Eigenschaft kann man jetzt ein Erdprisma construiren, dessen Gewicht der Intension des Erddruckes gleich ist.

Zu diesem Behufe zeichne man zuerst die Bruchebene $\overline{AE}$ (Fig. 37), nämlich durch Halbirung des Winkels FAI, mache sodann $\overline{FL} = \overline{FE}$, und berechne das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile FLE. Dieses, in der Figur schraffirte,

Erdprisma ist nämlich dasjenige, dessen Gewicht eben so gross wie die Intension des Erddruckes ausfällt. Denn man hat:

$$\triangle LFE : \triangle AFE = \overline{FL} : \overline{AF} = \overline{FE} : \overline{AF},$$

also auch:

$$g \triangle LFE : g \triangle AFE = \overline{FE} : \overline{AF},$$

und wegen $G = g \triangle AFE$:

$$g \triangle LFE : G = \overline{FE} : \overline{AF},$$

woraus durch Vergleichung mit der obigen Relation (101) unmittelbar folgt:

$D = g \triangle LFE =$ [Gewicht des Erdprismas LFE] ..... (102)

was zu beweisen war*).

Fig. 37.

Was das Gesetz für die Zuname des Druckes mit der Druckhöhe betrifft, so gilt dasselbe, was hierüber im §. 7 in Betreff der tropfbaren Flüssigkeiten gesagt wurde, und zwar aus dem Grunde, weil hier, wie dort, die Grösse des Druckes von dem Quadrate der Höhe abhängt.

Hiernach können die dortigen Figuren 12 und 13 zur Versinnlichung des fraglichen Gesetzes auch hier benützt werden.

Indem man nunmehr

B) auf den allgemeineren Fall übergeht, in welchem die Erdcohäsion bei der Bestimmung des Erddruckes berücksichtigt werden soll, wird man, zum Behufe der grafischen Darstellung des Erddruckes, am besten der Formel (99) die Aufmerksamkeit in der Absicht zuwenden, um zunächst nach den unter *A)* gegebenen Andeutungen den Erddruck, ohne Rücksicht auf

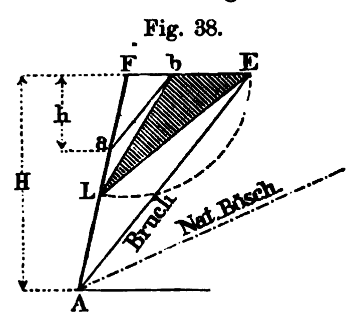
---

*) Auf die hier erläuterte Construction hat der Verfasser zuerst in seinem Aufsatze „Grafische Bestimmung des Erddruckes an Futtermauern und deren Widerstandsfähigkeit“ in Försters allgemeiner Bauzeitung vom Jahre 1850 aufmerksam gemacht.

die Cohäsion, mittelst Zeichnung darzustellen, und sodann das Resultat hiefür in dem Verhältnisse $1 : \left(1 - \frac{h}{H}\right)$ oder $H : (H - h)$, und zwar ebenfalls im Wege der Zeichnung zu verkleinern.

In Ausführung dieser Absicht mache man vor Allem die Construction genau so, wie in der vorigen Figur 37, so dass man dadurch die Figur 38 erhält, in welcher das Gewicht des Erdprismas *FLE* wieder den Erddruck vorstellen würde, wenn die Wirkung der Erdcohäsion ausser Betracht bliebe. Nennt man diesen Erddruck, analog mit der Bezeichnung in der Formel (99)..... D_0, so hat man:

Fig. 38.



$$D_0 = [\text{Gewicht des Erdprismas } FLE] = g \cdot \triangle FLE.$$

Nun trage man von oben herab die Cohäsionshöhe h, welche der bezüglichen Abstichböschung tg ε entspricht, auf, so dass das Niveau des Punktes a um h tiefer liegt, als jenes der Wandkrone F, ziehe hierauf $\overline{ab}$ parallel zur Bruchfläche $\overline{AE}$, und verbinde b mit L. Jetzt ist das, in der Figur schraffirte Erdprisma bLE dasjenige, dessen Gewicht eben so gross ausfällt, wie der Erddruck (D_c) mit Rücksicht auf die Erdcohäsion.

Beweis.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke aFb und AFE hat man:

$$\overline{bE} : \overline{FE} = \overline{Aa} : \overline{AF}$$
$$= (H - h) : H.$$

Ferner ist:

$$\triangle LbE : \triangle LFE = \overline{bE} : \overline{FE},$$

daher mit Berücksichtigung der ersten Proportion auch:

$$\triangle LbE : \triangle LFE = (H - h) : H,$$

und hieraus:

$$\triangle LbE = \left(1 - \frac{h}{H}\right) . \triangle LFE;$$

oder mit g multiplicirt und $g . \triangle LFE = D_0$ gesetzt:

$$g . \triangle LbE = \left(1 - \frac{h}{H}\right) D_0.$$

Nach der Gleichung (99) war aber:

$$D_c = \left(1 - \frac{h}{H}\right) D_0,$$

also folgt schliesslich:

$D_c = g . \triangle LbE =$ [Gewicht des Erdprismas LbE], w. z. b. w.

Zugleich ersieht man, dass das Gewicht des Erdprismas bFL die Differenz der beiden Druckwerthe D_c und D_0 (nämlich mit und ohne Cohäsionsberücksichtigung) vorstellt.

Auch die Zuname des Druckes der cohärirenden Erde mit der Druckhöhe kann leicht in grafischer Weise versinnlicht werden. Dieses kann, ähnlich wie in den Figuren 12 und 13, auf zweierlei Art geschehen.

Erste Art.

Nach der Gleichung (93) ist der bezügliche Erddruck:

$$D = kH(H - h) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (102),$$

wenn man der Kürze wegen

$$k = \frac{1}{2} \frac{g}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}\right]^2$$

setzt.

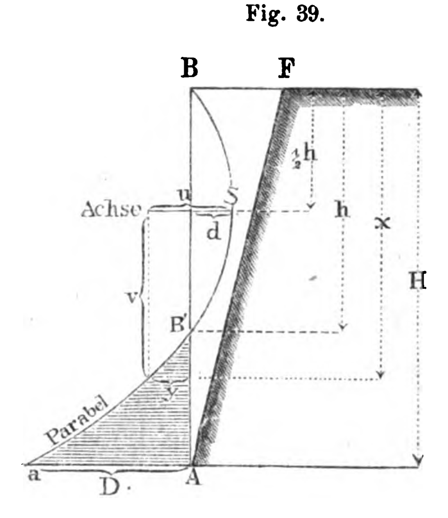
Für eine andere Druckhöhe x, unter sonst gleichen Umständen, kann daher der Erddruck, welcher y heissen soll, durch die Formel:

$$y = kx(x - h) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (103)$$

ausgedrückt worden, worin y eben so von x, wie früher D von H, abhängt.

Sieht man die Gleichung (103) als die einer Curve an, wofür die verticalen Druckhöhen x die Abscissen, die Werthe für y aber die horizontalen Ordinaten vorstellen, so erhält man

Fig. 39.



eine gemeine Parabel mit horizontaler Achse und mit dem Scheitel in S, wie dieses insbesondere in der Figur 39 anschaulich gemacht ist. Der Scheitel liegt in der Tiefe $\frac{1}{2}h$ unter der Wandkrone und nach der negativen Ordinatenrichtung in der Distanz $d = \frac{1}{4}kh^2$ von der Abscissenachse $\overline{AB}$ entfernt.

Die horizontalen Ordinaten in dem schraffirten Raume stellen nunmehr die Grösse des Erddruckes y für die jeweilige Druckhöhe vor, und zwar in demselben Masstabverhältnisse, in welchem die grösste Ordinate $\overline{Aa} = D$ gezeichnet ist.

Beweis.

Dieser soll umgekehrt, nämlich so geführt werden, dass man aus der Grösse und Lage der angegebenen Parabel die zwischen x und y sich ergebende Gleichung aufsucht und dann nachsieht, ob dieselbe mit jener unter (103) übereinstimmt.

Der parabolischen Gleichung zu Folge ist zunächst:

$$d : (\tfrac{1}{2}h)^2 = u : v^2,$$

daher wegen:

$$d = \tfrac{1}{4}kh^2,\ u = y + \tfrac{1}{4}kh^2,\ v = (x - \tfrac{1}{2}h),$$

nach erfolgter Abkürzung:

$$k : 1 = y + \tfrac{1}{4}kh^2 : (x - \tfrac{1}{2}h)^2,$$

woraus sich die Relation:

$$y = kx\,(x - h),$$

also in der That jene unter (103) ergibt.

Die erwähnte Parabel ist jedoch nur brauchbar in der Strecke von $x = h$ bis $x = H$, nämlich zwischen B' und a, in

welcher der Erddruck von Null beginnt und bis zur Grösse $\overline{Aa} = D$ zunimmt. Für Werthe von $x < h$ würde man nach der Zeichnung negative y, also auch negative Druckwerthe erhalten, welche jedoch nicht weiter zu benützen sind, weil für so kleine Höhen die der Construction zu Grunde gelegte Gleichung (93) des vorigen §. aus der dort angegebenen Ursache nicht mehr giltig, sondern der Erddruck hiefür stets gleich Null ist.

Der Parameter dieser Parabel ist:

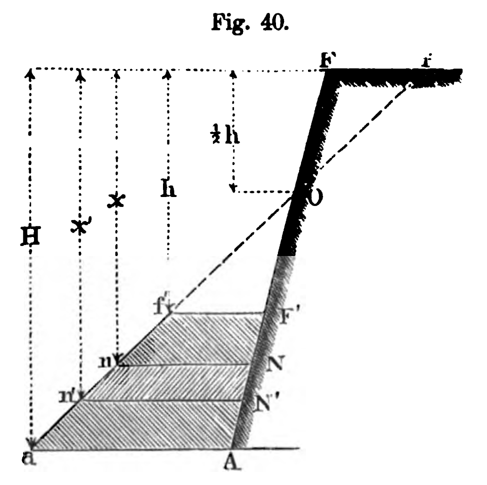
$$P = \frac{v^2}{u} = \frac{\frac{1}{4}h^2}{d^2} = \frac{1}{k} \quad \text{.................. (104),}$$

also unabhängig von der Cohäsion des Erdreiches, weshalb man bei der grafischen Darstellung dieselbe Parabel, wie für das cohäsionslos gedachte Erdreich (also wie nach der Fig. 12) erhält, nur mit dem Unterschiede, dass hier der Parabelscheitel nicht, wie dort, in B, sondern in S gelegen ist.

Zweite Art.

In der Figur 40 erscheint die Grösse des Erddruckes auf die Druckhöhe x dem Inhalte einer Fläche, nämlich des Trapezes $F'f'Nn$, proportionirt dargestellt, welches sich insbesondere dadurch ergibt, dass man in der halben Cohäsionshöhe O eine beliebig geneigte Gerade $\overline{af}$ zieht und beobachtet, welche Area zwischen dieser Geraden und der Wandböschung $\overline{AF}$ einerseits, und zwischen den beiden Horizontalen $F'f'$ und Nn andererseits enthalten ist, wobei das Niveau von F' in der Tiefe h und jenes von N in der Tiefe x unter der Wandkrone liegt.

Fig. 40.



Die Werthe für den Druck des cohärirenden Erdreiches in den Druckhöhen: h, x und H sind hiernach aufeinanderfolgend proportional den Werthen für die Trapezflächen: Null, $F'f'Nn$ und $F'f'Aa$.

Beweis.

Vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke OAa, ONn, $OF'f'$ hat man, da ihre Höhen $(H - \frac{1}{2}h)$, $(x - \frac{1}{2}h)$ und $\frac{1}{2}h$ sind:

$$\frac{\overline{Aa}}{(H - \frac{1}{2}h)} = \frac{\overline{Nn}}{(x - \frac{1}{2}h)} = \frac{\overline{F'f'}}{\frac{1}{2}h},$$

welcher Quotient, wie man sieht, von der Variablen x unabhängig ist und mit m bezeichnet werden soll, so dass man schreiben kann:

$$\overline{F'f'} = \frac{1}{2}mh,$$

$$\overline{Nn} = m(x - \frac{1}{2}h),$$

$$\overline{Aa} = m(H - \frac{1}{2}h).$$

Hiernach findet man:

$$\left(\frac{\overline{F'f'} + \overline{Nn}}{2}\right) = \frac{1}{2}mx,$$

$$\left(\frac{\overline{F'f'} + \overline{Aa}}{2}\right) = \frac{1}{2}mH,$$

$$\text{area } F'f'Nn = \left(\frac{\overline{F'f'} + \overline{Nn}}{2}\right)(x - h) = \frac{1}{2}mx(x - h),$$

$$\text{area } F'f'Aa = \left(\frac{\overline{F'f'} + \overline{Aa}}{2}\right)(H - h) = \frac{1}{2}mH(H - h),$$

somit:

$$\text{area } F'f'Nn : \text{area } F'f'Aa = x(x - h) : H(H - h).$$

Nach der Gleichung (103) ist aber der Erddruck y auf die Höhe x:

$$y = kx(x - h),$$

und der Erddruck D auf die Höhe H laut Gleichung (102):

$$D = kH(H - h),$$

woraus:

$$y : D = x(x - h) : H(H - h),$$

und in Verbindung mit der vorhergehenden Proportion folgt:

$$y : D = \text{area } F'f'Nn : \text{area } F'f'Aa \ldots\ldots\ldots\ldots (105),$$

durch welche Relation in der That das oben Gesagte bestätiget wird.

Selbstverständlich darf hier eben so wenig wie in der vorigen Figur $x < h$ werden; auch leuchtet ein, dass die Intension des Erddruckes auf einem Wandstreifen (etwa $\overline{NN'}$), welcher zwischen den Druckhöhen x und x' liegt, mit der Grösse des zur Höhendifferenz $(x' - x)$ gehörigen Trapezes $Nn\,N'n'$ proportional ist.

Für ein cohäsionsloses Erdreich fallen, wegen $h = o$, die Punkte F' und O in die Wandkrone F, und die von $\overline{F'f'}$ aus gezählten Trapeze gehen (so wie in der Fig. 13) insbesondere in Dreiecke über.

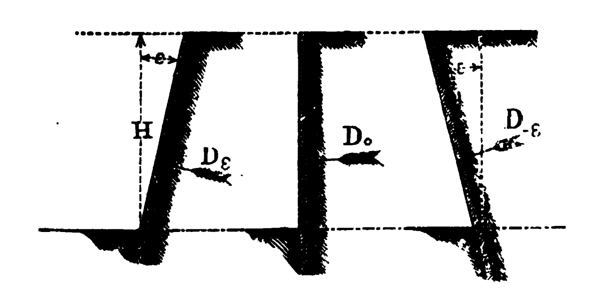
§. 29.

Einfluss der Richtung der Stützwand auf die Grösse des Erddruckes.

A. Wenn keine Erdcohäsion in Rechnung zu bringen ist.

Für eine liegende Stützwand mit dem Neigungswinkel ε

Fig. 41. Fig. 42. Fig. 43.



gegen das Loth (Fig. 41) ist der Erddruck, er werde mit D_ε bezeichnet, nach der Formel (94):

$$D_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2;$$

dagegen für eine überhängende mit demselben Neigungswinkel, also in entgegengesetzter Richtung (Fig. 43):

$$D_{-\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2,$$

indem man nämlich in der vorigen Gleichung das Zeichen von ε ändert.

Hieraus folgt zunächst:

$$D_\varepsilon : D_{-\varepsilon} = [\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)]^2 : [\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)]^2$$
$$= \sin^2(\alpha-\varepsilon) : \sin^2(\alpha+\varepsilon)$$
$$= (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon)^2 : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon)^2,$$

somit:

$$D_{-\varepsilon} = \left[\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 D_\varepsilon = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon}\right)^2 D_\varepsilon \;\ldots\ldots\; (106),$$

wornach $D_{-\varepsilon}$ aus D_ε, und zwar durch den letzten Ausdruck ohne Zuhilfename von trigonometrischen Tafeln, berechnet werden kann.

Ex. In dem ersten Beispiele auf Seite 92 wurde für $H = 30$ Fuss, $g = 85$ Pfd., $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$ und $\operatorname{tg}\alpha = 1\cdot27$ gefunden: $D_\varepsilon = 68\cdot25$ Ctr., welches Resultat sich auf eine liegende Stützwand bezieht. Für eine überhängende Stützwand mit derselben Neigung gegen das Loth erhält man daher unter sonst gleichen Umständen:

$$D_{-\varepsilon} = \left(\frac{\sin 61^\circ\, 15'}{\sin 42^\circ\, 19'}\right)^2 D_\varepsilon = \left(\frac{431}{331}\right)^2 D_\varepsilon = 1\cdot696\, D_\varepsilon = 115\cdot75 \text{ Ctr.}$$

Zu Folge der Gleichung (106) wird ferner:

$$D_{-\varepsilon} > D_\varepsilon \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (107),$$

weil für Erdmateriale $\alpha < 90^\circ$ ist; nur für tropfbare Flüssigkeiten wäre, wegen $\alpha = 90^\circ$, zwischen D_ε und $D_{-\varepsilon}$ kein Unterschied vorhanden, worauf schon im §. 7 hingewiesen wurde.

Ist die Stützwand vertical, d. i. $\varepsilon = o$, wie in der Fig. 42, so erhält man:

$$D_0 = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

und durch Vergleichung mit D_ε und $D_{-\varepsilon}$ die Proportion:

$$D_\varepsilon : D_0 : D_{-\varepsilon} = \frac{\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2}{\cos\varepsilon} : \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} : \frac{\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2}{\cos\varepsilon},$$

woraus man unter den gewöhnlichen praktischen Verhältnissen findet:

$$D_\varepsilon < D_0 < D_{-\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots (108^*).$$

Die Grösse des Erddruckes an eine liegende Stützwand ist daher kleiner, und an eine überhängende grösser, als an die vertical gerichtete unter sonst gleichen Umständen. Ueberhaupt nimmt der Erddruck zu mit dem Winkel, den die Wand mit der natürlichen Böschung einschliesst.

Hiernach sind die Gesetze des Erddruckes in der angedeuteten Beziehung wesentlich verschieden von den hydrostatischen Gesetzen, weil — wie aus dem §. 7 so wie aus dem Schlussabsatze der unten stehenden Anmerkung hervorgeht — der hydrostatische Druck an eine Stützwand bei der lothrechten Stellung am kleinsten ist, mit der Abweichung von dieser Stellung aber allmälig zunimmt, und zwar in ganz gleicher Weise, ob die ge-

---

*) Um dieses zu erkennen, untersuche man das vierte Glied der obigen Proportion, aus welchem für $\varepsilon = 0$ das fünfte, und indem man $-\varepsilon$ anstatt ε setzt, das sechste Glied derselben entsteht. Dieses vierte Glied, es werde mit $f(\varepsilon)$ bezeichnet, heisst:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 = \frac{1}{\cos\varepsilon}\left[\frac{1-\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+\cos(\alpha+\varepsilon)}\right];$$

daher ist:

$$\frac{d f(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \left\{\frac{1-\cos(\alpha-\varepsilon)}{1+\cos(\alpha+\varepsilon)}\right\}\frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} +$$

$$\frac{1}{\cos\varepsilon}\left\{\frac{-\sin(\alpha-\varepsilon)\,[1+\cos(\alpha+\varepsilon)] + \sin(\alpha+\varepsilon)\,[1-\cos(\alpha-\varepsilon)]}{[1+\cos(\alpha+\varepsilon)]^2}\right\}$$

$$= \frac{\sin\varepsilon\,[1-\cos(\alpha-\varepsilon)]\,[1+\cos(\alpha+\varepsilon)] - 2\cos\alpha\cos\varepsilon\,(\sin\alpha - \sin\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon\,[1+\cos(\alpha+\varepsilon)]^2}$$

$$= \frac{4\sin\varepsilon\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) - 4\cos\alpha\cos\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{4\cos^2\varepsilon\cos^4\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon\cos^3\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\left\{\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) - \cos\alpha\cos\varepsilon\right\}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos^2\varepsilon\cos^3\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\left\{\frac{1}{2}\sin\varepsilon\,(\sin\alpha - \sin\varepsilon) - \cos\alpha\cos\varepsilon\right\}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{2\cos^2\varepsilon\cos^3\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\left\{-\cos(\alpha+\varepsilon) - \cos\alpha\cos\varepsilon - \sin^2\varepsilon\right\},$$

dachte Abweichung positiv oder negativ, d. h. ob die Wand liegend oder überhängend angenommen wird.

B. Mit Rücksicht auf die Erdcohäsion.

Nennt man jetzt in den neuerdings zu vergleichenden Fällen (Fig. 41, 42, 43) die Cohäsionshöhen des Erdreiches aufeinanderfolgend h_ε, h_0 und $h_{-\varepsilon}$, je nachdem ε positiv, Null oder negativ ist, so erhält man unter Beibehaltung der sonstigen Bezeichnungen zunächst mit Bezug auf die Formeln (56), (57) und (58):

$$h_\varepsilon = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}$$

$$h_0 = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{4c}{g} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$h_{-\varepsilon} = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)},$$

und für die Grösse des bezüglichen Erddruckes auf Grundlage der Formel (93):

$$D_\varepsilon = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(1 - \frac{h_\varepsilon}{H}\right)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$$

$$D_0 = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(1 - \frac{h_0}{H}\right) \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$D_{-\varepsilon} = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(1 - \frac{h_{-\varepsilon}}{H}\right)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2,$$

---

d. h. dieser Differentialquotient wird unter den gewöhnlichen praktischen Verhältnissen, wornach α zwischen 45° und 60° gelegen ist, und ε numerisch genommen nicht grösser als 15° wird, negativ: was anzeigt, dass der Werth von $f(\varepsilon)$, also auch von D_ε, abnimmt, wenn ε zunimmt und umgekehrt, wodurch die Relation (108) ihre Bestätigung findet.

Für $\alpha = 90°$ (also für tropfbare Flüssigkeiten) ist jedoch diese Relation nicht giltig, weil dann

$$\frac{d f(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\sin\varepsilon(1 - \sin\varepsilon)}{2\cos^2\varepsilon \cos^2\left(45° + \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} = \operatorname{tg}\varepsilon \,.\, \sec\varepsilon,$$

also nicht mehr ein und dasselbe Zeichen beibehält, sondern, je nachdem ε positiv oder negativ ist, ebenfalls positiv oder negativ wird, und so den Minimalwerth für $\varepsilon = 0$ erreicht. Die Richtigkeit des letztgedachten Differentialquotienten ergibt sich übrigens auch aus der Bemerkung, dass für $\alpha = 90°$ der oben mit $f(\varepsilon)$ bezeichnete Werth in $f(\varepsilon) = \frac{1}{\cos\varepsilon}$ übergeht.

wozu bemerkt wird, dass bei dem Umstande, als für die in der Praxis (übrigens nur selten) vorkommenden überhängenden Stützwände der Böschungswinkel ε jedenfalls kleiner als 15 Grade sein wird, es keinem Anstande unterliegt, hier auch von der Formel (58) Gebrauch zu machen.

Hiernach ergibt sich folgende Proportion:

$$D_\varepsilon : D_0 : D_{-\varepsilon} = \frac{1}{\cos\varepsilon}\left(1 - \frac{h_\varepsilon}{H}\right)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 : \left(1 - \frac{h_0}{H}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} : \frac{1}{\cos\varepsilon}\left(1 - \frac{h_{-\varepsilon}}{H}\right)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2.$$

Nun wurde aber in dem vorigen Absatze unter lit. A, wo keine Cohäsion in Rechnung genommen ward, gefunden:

$$\frac{1}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 < \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2,$$

und überdies hat man wegen der Relation (59):

$$h_\varepsilon > h_0 > h_{-\varepsilon}$$

also auch:

$$\left(1 - \frac{h_\varepsilon}{H}\right) < \left(1 - \frac{h_0}{H}\right) < \left(1 - \frac{h_{-\varepsilon}}{H}\right);$$

weshalb durch Multiplication der analogen Glieder dieser und der ersten Ungleichung die neue entsteht:

$$D_\varepsilon < D_0 < D_{-\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots (109),$$

so dass der Hauptsache nach das unter lit. A auf Basis der dortigen Relation (108) Gesagte auch gegenwärtig noch seine Giltigkeit beibehält.

§. 30.

Mittelpunkt des Erddruckes. Ist eine Cohäsion des Erdreiches nicht in Rechnung zu nehmen, so steht die Grösse des Erddruckes im quadratischen Verhältnisse mit der Druckhöhe, also eben so, wie solches in Bezug auf den hydrostatischen Druck der Fall ist, weshalb dann der Mittelpunct des Druckes, hier wie dort, in dem dritten Theile der Druckhöhe, von der Wandbasis an gerechnet, sich befindet.

Eine andere Lage nimmt jedoch der Mittelpunkt des Erddruckes ein, wenn hiebei eine Cohäsion des Erdreiches in Rech-

nung zu kommen hat. Zur diesfälligen Untersuchung stehe die Fig. 44 in Betracht; man bestimme hiebei die Lage des Druckmittelpunktes M, dessen Abstand von der Wandbasis mit e bezeichnet werden soll.

Man nenne:

H.. die ganze Wandhöhe $\overline{AB}$;
D.. die Grösse des in dieser Höhe stattfindenden Erddruckes;
h.. die Cohäsionshöhe, innerhalb welcher daher kein Erddruck vorhanden ist;
x.. eine beliebig gewählte Druckhöhe;
y.. den innerhalb derselben entstehenden Erddruck;
dx.. die unendlich kleine Vergrösserung der Druckhöhe x;
dy.. die unendlich kleine Zunahme des Erddruckes y, welche zugleich den Erddruck auf das Wandelement $\overline{NN'}$ vorstellt; und

behalte die sonstigen Bezeichnungen: α, ε und g bei.

Fig. 44.

Nunmehr kommt der Satz der statischen Momente in Betracht, wornach in Bezug auf irgend eine beliebige Drehungsachse das statische Moment des resultirenden Erddruckes D gleich sein muss der Summe der statischen Momente aller unendlich kleinen Drücke auf die einzelnen Wandelemente.

Da die Wahl der Drehungsachse hiezu, wie gesagt, ganz beliebig ist, so nehme man sie derart an, dass die Untersuchung am bequemsten wird.

Dieses geschieht, wenn man sich die Drehungsachse am Fusse der Stützwand A vorstellt; man findet hiernach die Bedingungsgleichung:

$$D \,.\, \overline{AM} = \int_{x=h}^{x=H} \overline{AN} \,.\, dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (110)'$$

wobei die angedeuteten Integrationsgrenzen sich aus der Betrachtung ergeben, dass nur die Wandelemente zwischen F' und A gedrückt werden, während jene zwischen F und F', innerhalb der Cohäsionshöhe h, keinen Erddruck erleiden.

Nun ist aber:

$$\overline{AM} = \frac{e}{\cos \varepsilon} \text{ und } \overline{AN} = \left(\frac{H-x}{\cos \varepsilon}\right),$$

also auch:

$$De = \int_{x=h}^{x=H} (H-x)\, dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (111),$$

worin laut der Gleichungen (102) und (103) die Werthe für D und y folgende sind:

$$D = k\,H\,(H-h),\; y = k\,x\,(x-h).$$

Allgemein ist:

$$\int (H-x)\, dy = (H-x)\, y + \int y\, dx,$$

daher insbesondere:

$$\int_{x=h}^{x=H} (H-x)\, dy = \int_{h}^{H} y\, dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (112),$$

weil das Glied $(H-x)\,y$ sowol für $x=h$ (wegen $y=0$), als auch für $x=H$ (wegen $H-x=0$), also in dem hiernach begrenzten Integrale jedenfalls verschwindet. Man hat somit:

$$De = \int_{h}^{H} y\, dx = k \int_{h}^{H} x\,(x-h)\, dx$$

$$= k\left[\tfrac{1}{3}(H^3-h^3) - \tfrac{1}{2}h\,(H^2-h^2)\right]$$

$$= \tfrac{1}{6}k\,(2H^3 - 3hH^2 + h^3)$$

$$= \tfrac{1}{6}k\,(H-h)^2\,(2H+h),$$

und, statt D den dazu gehörigen Werth gesetzt:

$$e = \frac{1}{6H}(H-h)(2H+h) = \tfrac{1}{3}H\left(1-\frac{h}{H}\right)\left(1+\frac{h}{2H}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}H\left(1-\frac{h}{2H}-\frac{h^2}{2H^2}\right) = \tfrac{1}{3}H\left[1-\tfrac{1}{2}\frac{h}{H}\left(1+\frac{h}{H}\right)\right] (113).$$

Für $h = 0$ wird, wie es sein soll, $e = \frac{1}{3} H$; für $h > 0$ aber findet man $e < \frac{1}{3} H$.

Bei cohärirendem Erdmateriale liegt daher der Mittelpunkt des Erddruckes verhältnissmässig tiefer, als bei nicht cohärirendem, und zwar desto tiefer, je grösser die Erdcohäsion ist.

Nachstehende Tabelle enthält einige zusammengehörige Werthe von $\frac{e}{H}$ und $\frac{h}{H}$.

VII. Tabelle.

$\frac{h}{H}$	$\frac{e}{H}$	$\frac{h}{H}$	$\frac{e}{H}$	$\frac{h}{H}$	$\frac{e}{H}$
0·1	0·315	0·4	0·240	0·7	0·135
0·2	0·293	0·5	0·208	0·8	0·093
0·3	0·268	0·6	0·173	0·9	0·084

Coulomb und Navier haben in ihren auf diesen Gegenstand Bezug nehmenden Untersuchungen das dabei vorkommende Integrale zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x =$ der ganzen Druckhöhe entwickelt. Zur Rechtfertigung bemerkte Navier hierüber, dass, wenn auch der Erddruck innerhalb der Cohäsionshöhe gleich Null sei, daraus doch nicht folge, es müsse auch die Summe der statischen Druckmomente innerhalb dieser Höhe verschwinden; deshalb seien die Grenzen für das fragliche Integrale nach dem Vorgange von Coulomb zu wählen, die Resultate von Prony und Français aber, welche einerseits die Cohäsionshöhe und andererseits die ganze Druckhöhe als Integralgrenzen angenommen hatten, als unrichtig zu verwerfen. Darauf ist jedoch zu entgegnen, dass innerhalb der Cohäsionshöhe die Summe der statischen Druckmomente allerdings gleich Null sein muss, weil keines der dortigen Wandelemente einen Druck erleidet, also auch daselbst keinerlei Momente entstehen können, weshalb das diesfällige Integrale nicht nur zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = H$ genommen werden kann, sondern um so mehr genommen werden muss, als für alle zwischen 0 und h gelegenen Höhenwerthe von x die für den Erddruck gefundenen Formeln gar nicht mehr giltig sind.

Hiernach leuchtet die Unhaltbarkeit der von Navier versuchten Rechtfertigung ein, welche somit nicht weiter in Betracht zu kommen hat.

Um den fraglichen Druckmittelpunkt mittels Zeichnung zu finden, kehre man zu der, in der Fig. 40 erläuterten grafischen Darstellung zurück, wornach der Erddruck innerhalb der Cohäsionshöhe gleich Null ist, jener auf die Wandflächen $\overline{AF'}$, $\overline{NF'}$ und $\overline{NN'}$ aber aufeinanderfolgend durch die Trapeze $AaF'f'$, $NnF'f'$ und $NnN'n'$ repräsentirt wird.

Denkt man sich die Punkte N und N' unendlich nahe, so ist $(x' - x) = dx$, und der Erddruck dy auf das Wandelement $\overline{NN'}$ durch das unendlich kleine Trapez $NnN'n'$ dargestellt.

In der obigen Gleichung (111) kann man daher setzen:

$$D = \text{area } AaF'f', \quad dy = \text{area } NnN'n',$$

wodurch man findet:

$$e = \frac{\int\limits_{x=h}^{x=H} \text{area } NnN'n' . (H - x)}{\text{area } AaF'f'}.$$

Diese Gleichung in Worten ausgedrückt heisst: **Der Werth von e ist gleich der Summe der statischen Momente aller Trapezelemente zwischen F' und A in Bezug auf die Drehungsachse $\overline{Aa}$, dividirt durch die ganze Trapezfläche innerhalb derselben Grenzen.** Indem man aber dieselbe Rechnung durchzuführen hat, wenn man den Schwerpunkt des ganzen Trapezes aufsucht, so bedeutet e offenbar den Abstand dieses Schwerpunktes von der Basis $\overline{Aa}$, wodurch die Construction von e leicht ausführbar ist.

Man mache nämlich (Fig. 45) zuerst $\overline{OF} = \overline{OF'}$, wobei der Wandtheil $\overline{FF'}$ in der Cohäsionshöhe h liegt, ziehe durch O die sonst beliebige Gerade $\overline{af}$, und begrenze durch die Horizontalen $\overline{Aa}$ und $\overline{Ff}$ das Trapez $AaF'f$. Nun suche man den Schwerpunkt S dieses Trapezes, indem man die Seite $\overline{Aa}$ in m halbirt, die Gerade $\overline{mO}$ zieht und den Durchschnitt S sucht, den dieselbe mit der zweiten Geraden $\overline{ik}$ (wobei $\overline{Ak} = \overline{F'f}$ und $\overline{if} = \overline{Aa}$ ist) bildet.

Dieser Schwerpunkt S liegt mit dem Druckmittelpunkt M in dem gleichen Niveau, weshalb schliesslich, um M zu finden, $\overline{MS}$ horizontal zu ziehen ist.

Will man den Mittelpunkt des Druckes für einen beliebigen Wandstreifen $\overline{NN'}$ (Fig. 40) finden, so leuchtet ein, dass man auch in einem solchen Falle ebenfalls nur den Schwerpunkt desjenigen Trapezes aufzusuchen hat, dessen Inhalt die Grösse des bezüglichen Druckes vorstellt. Dieses Trapez ist das in der Fig. 40 mit $NnNn'$ bezeichnete, und sein Schwerpunkt liegt in demselben Niveau, wie der fragliche Mittelpunkt des in Betracht kommenden Druckes, welcher nämlich auf den Wandstreifen $\overline{NN'}$ stattfindet.

Fig. 45.

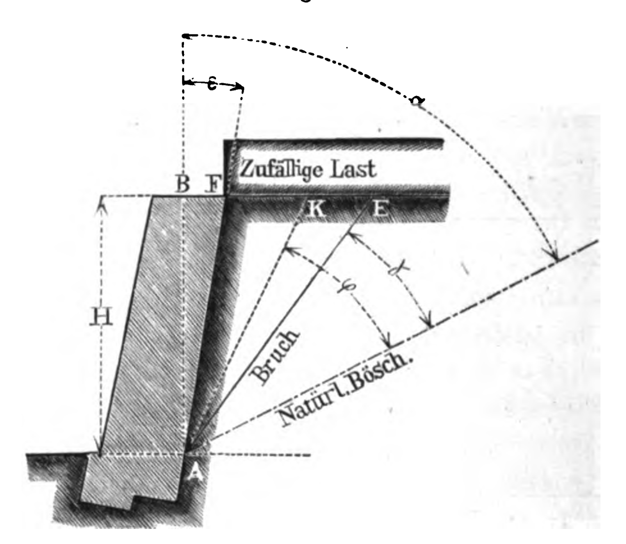
§. 31.

Einfluss einer zufälligen Belastung des hinter einer Stützwand aufgeschichteten Erdreiches auf den Erddruck. Es leuchtet ein, dass bei dem Vorhandensein einer zufälligen Belastung der Erddruck grösser entfallen muss, als ohne eine solche. Um sogleich einen bestimmten Fall zu untersuchen, werde eben so, wie im §. 25, angenommen, dass die zufällige Belastung auf der horizontalen Oberfläche des Erdreiches gleichmässig vertheilt, und das auf die Quadrateinheit entfallende Gewicht p sei.

Zur Behandlung dieses, in der Fig. 46 dargestellten Falles beachte man, in Uebereinstimmung mit der Bemerkung im §. 25,

dass der Vorgang bei der Berechnung der Grösse des Erddruckes im Allgemeinen der nach §. 13 einzuhaltende ist, nur mit dem Unterschiede, dass man hier nicht, wie dort, für X das alleinige

Fig. 46.



Gewicht des Erdprismas AFK zu setzen, sondern hierin auch die auf der Strecke $\overline{FK}$ vorkommende zufällige Belastung, nämlich $p \,.\, \overline{FK}$, einzubeziehen hat. Es ist daher:

$$X = g \,.\, \triangle AFK + p \,.\, \overline{FK}$$
$$= \tfrac{1}{2} g \,.\, H \,.\, \overline{FK} + p \,.\, \overline{FK}$$
$$= \tfrac{1}{2} g \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) H \,.\, \overline{FK}$$
$$= \tfrac{1}{2} g' \,.\, H \,.\, \overline{FK} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (114),$$

wenn man abkürzend:

$$g' = g \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) = g + \frac{2p}{H} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (115)$$

setzt.

Diese Relationen zeigen an, dass der Erddruck mit Rücksicht auf die Wirkung der zufälligen Belastung eben so gross ausfällt, wie wenn keine zu-

fällige Belastung vorhanden wäre, dafür aber das Erdreich das grössere Gewicht g' per Cubikeinheit hätte.

Man kann daher die Resultate im §. 27 beibehalten, wenn man hierin überall, wo g vorkommt, den erhöhten Werth g' nach der Gleichung (115) substituirt.

Da der Bruchwinkel γ nach der Relation (87), nämlich

$$\gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)$$

von dem Erdgewichte unabhängig ist, so ergibt sich zunächst, dass dieser Bruchwinkel auch gegenwärtig, wo die zufällige Belastung mitwirkt, ungeändert bleibt.

Was die Grösse des Erddruckes betrifft, welcher mit Rücksicht auf die zufällige Belastung entsteht, und mit D' bezeichnet werden soll, so findet man dieselbe auf Grundlage der vorbemerkten Eigenschaft, wenn man in der Formel (91), welche den Erddruck ohne Rücksicht auf eine zufällige Belastung darstellt, g' anstatt g setzt.

Hiernach hat man:

$$D' = \tfrac{1}{2} g' \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) - \frac{2c}{g'H}\sin\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}\right],$$

daher, indem man für g' den Werth aus (115) substituirt:

$$D' = \tfrac{1}{2} g\left(1 + \frac{2p}{gH}\right)\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) - \frac{2c}{gH\left(1+\frac{2p}{gH}\right)}\sin\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(gH + 2p)\frac{H}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) - \left(\frac{2c}{gH+2p}\right)\sin\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{H}{\cos\varepsilon}\left[\frac{(gH+2p)\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right) - 2c\sin\alpha\cos\varepsilon}{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}\right] \quad \ldots\ldots (116)$$

Nennt man $\mathfrak{h}$ diejenige Wandhöhe, innerhalb welcher der Erddruck Null ist, so hat man $D' = 0$ für $H = \mathfrak{h}$, somit:

$$(g\mathfrak{h} + 2p)\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) = 2c\sin\alpha\cos\varepsilon \ldots\ldots (117),$$

und hieraus:

$$\mathfrak{h} = \frac{2c\sin\alpha\cos\varepsilon}{g\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)} - \frac{2p}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (118),$$

welche Gleichung mit jener unter (75) übereinstimmt, was auch zu erwarten war, weil $\mathfrak{h}$ offenbar die Cohäsionshöhe des Erdreiches mit Rücksicht auf die zufällige Belastung bedeutet.

Setzt man den aus (117) für $2c\sin\alpha\cos\varepsilon$ folgenden Werth in die Gleichung (116) ein, so erhält man:

$$D' = \tfrac{1}{2} g \frac{H(H - \mathfrak{h})}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots (119),$$

und, mit Rücksicht auf die Gleichung (76), weiter:

$$D' = \tfrac{1}{2} g \frac{H\left(H - h + \frac{2p}{g}\right)}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots (120).$$

Durch Vergleichung dieses Resultates mit jenem unter (93) ergibt sich die Regel, dass der Erddruck (D') mit Rücksicht auf die zufällige Belastung eben so berechnet wird, wie jener (D) ohne Rücksicht auf eine solche, nur hat man hiebei anstatt der Cohäsionshöhe (h) des unbelasteten, die Cohäsionshöhe ($\mathfrak{h}$) des belasteten Erdreiches einzuführen.

Demgemäss entsteht die Proportion:

$$\left.\begin{aligned} D : D' &= (H - h) : (H - \mathfrak{h}) \ldots\ldots\ldots \\ &= (H - h) : \left(H - h + \frac{2p}{g}\right). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (121),$$

woraus sich ergibt:

$$D' = \left(\frac{H - h + \frac{2p}{g}}{H - h}\right) D = \left[1 + \frac{2p}{g(H-h)}\right] D \ldots\ldots (122),$$

so dass man den Druck des belasteten Erdreiches auch findet, wenn man jenen des unbelasteten mit dem Coefficienten $\left[1 + \frac{2p}{g(H-h)}\right]$

multiplicirt, welche einfache Regel sich zur Anwendung besonders empfiehlt.

Hat das Erdreich keine Cohäsion, ist also $h = 0$, so geht der letztgenannte Coefficient in $\left(1 + \frac{2p}{gH}\right)$ über, und man erhält:

$$D' = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (123).$$

Sowohl dieser, als auch der vorige allgemeinere Werth des Coefficienten nimmt mit der Zuname der Druckhöhe H ab, und nähert sich hiebei der Einheit. Dies zeigt an, dass die zufällige Belastung verhältnissmässig einen desto geringeren Einfluss auf die Grösse des Erddruckes ausübt, je grösser die Druckhöhe H ist; eine Eigenschaft, welche auch schon bei einiger Ueberlegung unmittelbar einleuchtet.

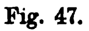
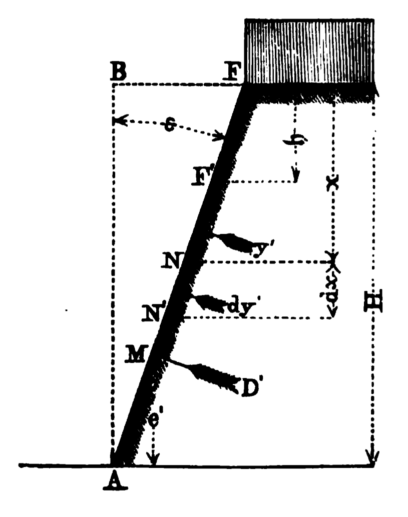


Fig. 47.



Uebergehend auf den Mittelpunkt des Erddruckes bei dem Vorhandensein einer zufälligen Belastung, so hat man zur Bestimmung desselben der Hauptsache nach in derselben Weise, wie im §. 30, vorzugehen.

In der Fig. 47 sind die nöthigen Daten zur diesfälligen Untersuchung in analoger Art, wie in der Fig. 44, ersichtlich gemacht.

Es bedeutet nämlich:

$\mathfrak{h}$..die Cohäsionshöhe des Erdreiches unter der Wirkung der zufälligen Belastung, innerhalb welcher Höhe der Erddruck Null ist;

y'..den Erddruck in der Höhe x, also auf den Wandtheil $\overline{FN}$ oder eigentlich $\overline{F'N}$;

dy'..jenen auf den Wandstreifen $\overline{NN'}$, welcher die Höhe dx hat;

D'..den auf die ganze Höhe H oder auch $(H - \mathfrak{h})$ stattfindenden Erddruck, und

e'..den Abstand der Resultirenden dieses letzteren von der Basis, wobei M den Mittelpunkt des Druckes vorstellt.

Sämmtliche Drücke sind mit Rücksicht auf die Wirkung der zufälligen Belastung verstanden.

Zunächst hat man zu Folge der Gleichung (119):

$$D' = k\,H\,(H - \mathfrak{h}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (124),$$

und analog damit:

$$y' = kx\,(x - \mathfrak{h}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (125),$$

wenn der Kürze wegen, wie auf Seite 98, der Factor

$$\frac{1}{2}\,\frac{g}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 = k$$

gesetzt wird, und $\mathfrak{h}$ den in den Gleichungen (76) und (118) gegebenen Werth hat.

Die Bedingungsgleichung für die statischen Momente in Bezug auf die Drehungsachse in A ergibt eben so wie in (110), nur $\mathfrak{h}$, y' und D' anstatt h, y und D gesetzt:

$$D'.\overline{AM} = \int_{x=\mathfrak{h}}^{x=H} \overline{AN}.\,dy' \ldots\ldots\ldots\ldots (126),$$

und wegen $\overline{AM} = \frac{e'}{\cos\varepsilon}$ und $\overline{AN} = \left(\frac{H-x}{\cos\varepsilon}\right)$ auch:

$$D'e' = \int_{x=\mathfrak{h}}^{x=H} (H - x)\,dy' \ldots\ldots\ldots\ldots (127).$$

Allgemein ist:

$$\int (H - x)\,dy' = (H - x)\,y' + \int y'dx,$$

daher insbesondere:

$$\int_{x=\mathfrak{h}}^{x=H} (H - x)\,dy' = \int_{\mathfrak{h}}^{H} y'dx \ldots\ldots\ldots\ldots (128),$$

weil das Glied $(H - x)\,y'$ sowol für $x = \mathfrak{h}$ (wegen $y' = 0$), als auch für $x = H$ (wegen $H - x = 0$) verschwindet. Man hat somit:

$$D'e' = \int_{\mathfrak{h}}^{H} y' dx = k \int_{\mathfrak{h}}^{H} x(x - \mathfrak{h})\, dx,$$

also dasselbe Integrale, wie in (113), nur mit dem Unterschiede, dass hier $\mathfrak{h}$ statt des dortigen h zu setzen ist.

Man findet daher:

$$e' = \tfrac{1}{3} H \left(1 - \frac{\mathfrak{h}}{H}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{2H}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3} H \left[1 - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{h}}{H}\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{H}\right)\right] \ldots\ldots\ldots (129),$$

worin

$$\mathfrak{h} = \left(h - \frac{2p}{g}\right)$$

zu substituiren ist.

Hiernach erhält man durch Vergleichung dieses Werthes für e' mit jenem für e in (113), welcher letztere ohne Rücksicht auf eine zufällige Belastung entsteht:

$$e' : e = 1 - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{h}}{H}\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{H}\right) : 1 - \tfrac{1}{2} \frac{h}{H}\left(1 + \frac{h}{H}\right)$$
$$= H^2 - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{h}\,(H + \mathfrak{h}) : H^2 - \tfrac{1}{2}\, h\,(H + h),$$

und

$$\frac{e'}{e} = \frac{H^2 - \frac{1}{2}\left(h - \frac{2p}{g}\right)\left(H + h - \frac{2p}{g}\right)}{H^2 - \frac{1}{2} h\,(H + h)} > 1 \ldots (130),$$

so dass in Folge der zufälligen Belastung der Mittelpunkt des Erddruckes h ö h e r hinauf rückt.

Es ist jedoch wohl zu beachten, dass diese Resultate nur insolange gelten, als $\mathfrak{h}$ wirklich eine Cohäsionshöhe bedeutet, was nämlich nur für $\mathfrak{h} \overline{\overline{>}}\, 0$, oder $h \overline{\overline{>}}\, \frac{2p}{g}$ eintritt.

Für $\mathfrak{h} = 0$ oder $h = \frac{2p}{g}$ erhält man insbesondere aus der Gleichung (129):

$$e' = \tfrac{1}{3} H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (131),$$

d. h. es liegt dann der Mittelpunkt des Erddruckes geradezu in dem dritten Theile der Höhe, somit eben so, wie wenn das Erdreich keine Cohäsion hätte und nicht zufällig belastet wäre.

In diesem Falle wird nämlich die günstige Wirkung der Erdcohäsion durch die ungünstige Wirkung der zufälligen Be-

lastung genau aufgehoben, und es stellt sich schliesslich die Sache so dar, wie wenn jede der beiden Wirkungen schon von vorne herein gleich Null angenommen würde.

Für den Fall, wenn $\mathfrak{h} < 0$, d. h. $h < \frac{2p}{g}$ ist, tritt in der vorstehenden Untersuchung insoferne eine Aenderung ein, als man das betreffende Integrale nicht mehr zwischen den Grenzen $x = \mathfrak{h}$ und $x = H$ nehmen darf, sondern hiebei als untere Grenze für x die Nulle einführen muss. Denn wenn $\mathfrak{h}$ negativ ist, hat diese Grösse blos eine rechnungsmässige, aber keine praktische Bedeutung mehr; dann gibt es nämlich für das belastete Erdreich eigentlich keine Cohäsionshöhe, d. h. keine solche Höhe, innerhalb welcher der Erddruck gleich Null würde, was zur Folge hat, dass man die fragliche Integration in der ganzen, zwischen $x = 0$ und $x = H$ gelegenen Druckhöhe vornehmen muss.

Geschieht dies, so erhält man:

$$D'e' = \int_0^H y'\,dx = k \int_0^H x\,(x - \mathfrak{h})\,dx$$

$$= \tfrac{1}{6}\,k H^2\,(2H - 3\mathfrak{h}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (132),$$

und hieraus nach Einsetzung des Werthes für D':

$$e' = \tfrac{1}{6}\,\frac{H\,(2H - 3\mathfrak{h})}{(H - \mathfrak{h})} = \tfrac{1}{3}\,H\left(\frac{H - \frac{3}{2}\mathfrak{h}}{H - \mathfrak{h}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,H\left[\frac{1 - \frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{h}}{H}}{1 - \frac{\mathfrak{h}}{H}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\,H\left[\frac{H - \frac{3}{2}\left(h - \frac{2p}{g}\right)}{H - \left(h - \frac{2p}{g}\right)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\,H\left[\frac{H - \frac{3}{2}h + \frac{3p}{g}}{H - h + \frac{2p}{g}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\,H\left[\frac{1 - \frac{3}{2}\,\frac{h}{H} + \frac{3p}{gH}}{1 - \frac{h}{H} + \frac{2p}{gH}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (133),$$

welche Relation, wie vorbemerkt, für $h < \frac{2p}{g}$ gilt, und $e' > \frac{1}{3} H$ gibt, indessen selbstverständlich auch noch für $h = \frac{2p}{g}$ angewendet werden kann, in welchem besonderen Falle man wieder, wie in der Gleichung (131), $e' = \frac{1}{3} H$ erhält.

Für $p = \infty$ wird $e' = \frac{1}{2} H$, was auch einleuchtet, weil dann das Erdgewicht gegen die zufällige Belastung verschwindet, diese auf alle Wandelemente gleichmässig einwirkt, und somit ein über die ganze Wandfläche gleichförmig vertheilter Druck entsteht, dessen Resultirende in die halbe Wandhöhe fällt.

Zu den Fällen, worin $h < \frac{2p}{g}$ ist, gehört namentlich jener für $h = 0$, d. h. wenn das Erdreich als cohäsionslos angenommen wird und eine zufällige Belastung in Rechnung zu kommen hat. Sodann erhält man aus der Relation (133):

$$e' = \frac{1}{3} H \left(\frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}} \right) = \frac{1}{3} H \left(\frac{gH + 3p}{gH + 2p} \right) \quad \ldots . \ (134).$$

Die letztgedachte Anname kommt in der Praxis gewöhnlich vor, weshalb die Resultate (123) und (134) besonders zu beachten sind, wornach sich nämlich ergibt:

$$D' : D = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) : 1 \text{ und } e' : e = \left(1 + \frac{3p}{gH}\right) : \left(1 + \frac{2p}{gH}\right),$$

wenn D und e auf den Fall des unbelasteten, D' und e' aber auf jenen des belasteten Erdreiches Bezug nehmen.

§. 32.

Zusammenstellung der Hauptresultate für die Grösse des Erddruckes und die Lage des Druckmittelpunktes in diesem Capitel. Diese Zusammenstellung enthält die jenseitige Tabelle VIII.

VIII. Tabelle.

Erdoberfläche im gleichen Niveau mit der Wandkrone. Die sonstigen Umstände sind:	Erddruck an eine liegende Wand von der Höhe H, gegen das Loth um den Winkel ε geneigt:	Abstand des Druckmittelpunktes von dem Niveau der Wandbasis:	Anmerkung
Cohäsionsloses Erdreich ohne zufällige Belastung	$k H^2$	$\frac{1}{3} H$	$k = \frac{1}{2} \frac{g}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$. α = nat. Böschungswinkel. g = Erdgewicht per Cubikeinheit. p = zufällige Belastung per Quadrateinheit. h = Cohäsionshöhe nach der Formel (56).
Cohäsionsloses Erdreich mit zufälliger Belastung	$k\left(1 + \frac{2p}{gH}\right) H^2 > k H^2$	$\frac{1}{3} H \left[\frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}}\right] > \frac{1}{3} H$	
Cohärirendes Erdreich ohne zufällige Belastung	$k\left(1 - \frac{h}{H}\right) H^2 < k H^2$	$\frac{1}{3} H \left[1 - \frac{h}{2H}\left(1 + \frac{h}{H}\right)\right] < \frac{1}{3} H$	
Cohärirendes Erdreich mit zufälliger Belastung	$k\left(1 - \frac{\mathfrak{h}}{H}\right) H^2 \leqq k H^2$	$\frac{1}{3} H \left[1 - \frac{\mathfrak{h}}{2H}\left(1 + \frac{\mathfrak{h}}{H}\right)\right] \leqq \frac{1}{3} H$, für $\mathfrak{h} = \left(h - \frac{2p}{g}\right) \geqq 0$.	
	$k\left(1 - \frac{\mathfrak{h}}{H}\right) H^2 \geqq k H^2$	$\frac{1}{3} U \left[\frac{1 - \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{h}}{H}}{1 - \frac{\mathfrak{h}}{H}}\right] \geqq \frac{1}{3} H$, für $\mathfrak{h} = \left(h - \frac{2p}{g}\right) \leqq 0$.	

§. 33.

Einfluss einer künstlichen Verdichtung des Hinterfüllungsmateriales auf die Wirkung des Erddruckes an eine Stützwand. Auf die Grösse des Erddruckes hat eine solche Verdichtung einen zweifachen Einfluss. Sowohl das Gewicht als auch die Cohäsion des Erdreiches wird dadurch, im Vergleiche zu dem lockeren Zustande desselben, vermehrt; indessen ist der Einfluss der einen Veränderung der entgegengesetzte von jenem der anderen. Durch die Vergrösserung des Gewichtes entsteht nämlich vergleichsweise ein grösserer, durch die Vermehrung der Cohäsion dagegen ein kleinerer Erddruck; somit werden diese beiden Einflüsse sich gegenseitig ganz oder theilweise aufheben, und das schliessliche Ergebniss für die Praxis wird günstig oder ungünstig ausfallen, je nachdem von den beiden durch die Verdichtung des Erdreiches hervorgerufenen Veränderungen die eine oder die andere überwiegend ist.

Zur näheren Untersuchung dieses Verhaltens nenne man den Erddruck des lockeren Materiales, und zwar unter der Voraussetzung, dass hiebei die ohnehin nicht bedeutende Cohäsion desselben ausser Acht bleibt .... D_o,
den Erddruck des verdichteten Materiales, wenn hiebei die Cohäsionshöhe desselben h ist .... D_c,
das Gewicht des Erdreiches per Cubikeinheit im lockeren Zustande .... g_o,
und jenes im verdichteten Zustande .... g_c;
zugleich nehme man an, dass der natürliche Böschungswinkel α in den gedachten zwei Zuständen nicht wesentlich geändert werde, welche Anname in der That annäherungsweise zulässig ist.

Hiernach kann man setzen:

$$D_o : D_c = g_o : g_c \left(1 - \frac{h}{H}\right),$$

indem, wie bisher, H die ganze Wandhöhe bezeichnet. Es wird jetzt darauf ankommen, ob das dritte Glied der Proportion kleiner oder grösser als das vierte ist, um festzustellen, ob man D_o kleiner oder grösser als D_c erhält.

Geht man zunächst auf die Dammerde über, und setzt hiefür durchschnittlich $g_o = 75$ und $g_c = 95$ Pfd., ferner — wie bei einer lothrechten Wandrichtung — nach der Tabelle IV etwa $h = 12$ Fuss; so findet man:

$$D_o : D_c = 15 : 19 \left(1 - \frac{12}{H}\right),$$

woraus folgt, dass $D_o \gtreqless D_c$ sein wird, wenn $H \lesseqgtr 57$ Fuss ist; oder mit Worten ausgedrückt: Bei Wandhöhen unter $9\frac{1}{2}$ oder circa 10 Klaftern ist der Druck der stark verdichteten Dammerde noch immer kleiner als derjenige, welcher für den lockeren und cohäsionslos gedachten Zustand derselben berechnet wird. Erst bei grösseren Wandhöhen stellt sich das umgekehrte Verhältniss heraus. So grosse Wandhöhen kommen aber in der Praxis gewöhnlich nicht vor. Man kann daher schliessen, dass, wenn hinter einer Wand Erde aufgeschüttet wird, der Druck dieses lockeren Materiales in der Regel grösser ist, als in dem Falle, wenn die Anschüttung künstlich verdichtet wird; und zwar um so mehr, wenn die Stützwand nicht, wie oben vorausgesetzt, lothrecht steht, sondern eine liegende Richtung hat, weil dann die Cohäsionshöhe h noch grösser, als es in der vorigen Proportion geschehen, angenommen werden muss.

Aus diesem Grunde ist es zweckmässig, angeschüttete Dammerde durch Anstampfen möglichst zu verdichten, den entstehenden Erddruck aber ohne Rücksicht auf diese Verdichtung und mit Beiseitelassung jedweden Cohäsionseinflusses zu bestimmen, indem man auf diese Weise umständlichen Berechnungen am besten ausweicht, und dennoch für die Praxis brauchbare Resultate erhält.

Die Verdichtung des Hinterfüllungsmateriales ist übrigens auch aus anderen Gründen nothwendig, nämlich, um einerseits die Setzung der Anschüttung auf ein Minimum zu reduciren, und andererseits, um das Eindringen von Regen- und Schneewasser,

namentlich in die tiefer gelegenen Schichten, möglichst zu verhindern. Das Erdreich ist insbesondere bei freistehenden Anschüttungen immer dem Witterungswechsel ausgesetzt, und je lockerer hiebei das Materiale ist, desto mehr Wasser kann von demselben aufgenommen werden; was jedenfalls nachtheilig wäre, denn dadurch würde das Gewicht des Erdreiches vergrössert und zugleich die Cohäsion verringert, folglich im Ganzen genommen der Erddruck vermehrt. Die Ausführung solcher Anschüttungen darf daher, um den Druck derselben thunlichst zu vermindern, nicht regellos geschehen, sondern es soll hiebei das Erdmateriale in horizontalen Schichten (von circa 6" Höhe) aufgetragen, und jede gut gestampft werden. Zudem soll man, wenn zulässig, die Anordnung treffen, dass das Fuhrwerk, welches das Erdmateriale beistellt, gezwungen ist, über die fertigen Schichten zu- und abfahren zu müssen, damit auch hiedurch auf eine Verdichtung der Anschüttung hingewirkt werde.

Der Hauptsache nach gelten dieselben Bemerkungen für Hinterfüllungen aus Lehmerde, wobei es überdies, wie im §. 23 angedeutet, vortheilhaft ist, dieselbe in einem etwas feuchten Zustande zu benützen, oder aber solche, falls sie zu trocken wäre, in den einzelnen Anschüttungslagen mit Wasser zu benetzen, weil dann durch die Verdichtung derselben eine bedeutend grössere Cohäsion erzeugt werden kann, welche den factischen Erddruck wesentlich verringert.

Bei Sand- und Schotteranschüttungen kann man der Natur der Sache nach auf eine nennenswerthe Verdichtung nicht hinwirken, wohl aber ist, namentlich bei den letzteren, zu empfehlen, hiezu, wo möglich, gewöhnliche Erde beizumengen, um wenigstens einige Cohäsion in das Materiale hineinzubringen und das Eindringen von Wasser einigermassen zu beschränken.

Uebrigens soll auch bei diesen Materialien zu Gunsten der Praxis die Regel beibehalten werden, dass in der Berechnung des jeweiligen Erddruckes weder auf die allfällig mögliche Verdichtung, noch auf die etwaige Cohäsion derselben Rücksicht genommen,

wohl aber in der Ausführung die thunlichste dichte Lagerung der Materialschichten angestrebt werde.

Dieser Vorgang kann auch im Falle der Berechnung des auf die Stützwand einwirkenden Umsturzmomentes eingeschlagen werden; wobei bemerkt wird, dass (weil der Mittelpunkt des Erddruckes bei dem cohäsionslos gedachten Materiale höher liegt, als bei Berücksichtigung der Cohäsion) das Resultat für das Umsturzmoment — nicht nur darum, weil schon der Erddruck an und für sich nach der vorigen Berechnungsregel etwas zu gross sich beziffert, sondern auch wegen des im Vergleiche zur Wirklichkeit ebenfalls etwas grösser eingeführten Hebelarmes — sich ungünstiger als thatsächlich herausstellt, daher in einer solchen Berechnung schon ein gewisser Stabilitätsüberschuss enthalten ist, auf welchen man bei der späteren Einführung des in der Praxis nöthigen Sicherheitsgrades in geeigneter Weise Bedacht zu nehmen hat.

§. 34.

Einfluss des Eindringens von Regen- und Schneewasser, eventuell von Grundwässern in das Hinterfüllungsmateriale an einer Stützwand auf die Wirkung des von demselben ausgeübten Druckes. Ungeachtet aller Verdichtung des Hinterfüllungsmateriales, insoferne eine solche überhaupt zulässig ist, wird es doch, falls nicht besondere Schutzmassregeln getroffen worden sind, niemals möglich sein, zu verhindern, dass in dasselbe Regen- und Schneewasser mehr oder weniger, insbesondere in die oberen Schichten eindringt; ja bei niedrigen Erdanschüttungen kann es sogar geschehen, dass das Wasser durch das Niedersinken nach und nach bis zu dem Fundamente der Stützwand gelangt. Indem nun dadurch der Erddruck an die Stützwand zu Ungunsten ihrer Stabilität sich vergrössert, weil einerseits das Gewicht des Erdreiches vermehrt und andererseits die Cohäsion desselben vermindert wird, muss man in der Praxis die gedachte Eventualität gehörig berücksichtigen, was dadurch geschieht, dass man bei dem oben empfohlenen Vor-

gange für die Berechnung des Erddruckes (nämlich der Zustand locker und ohne Cohäsion gedacht) das mit g bezeichnete Einheitsgewicht, des Wasseraufsaugens wegen, durchschnittlich vergrössert, und zwar für Dammerde, von welcher hier zunächst die Rede ist, um 5 bis 10 Pfd. per Cubikfuss. Für Anschüttungen unter 2 Klafter Höhe kann man den fraglichen Gewichtszuschuss mit 10 Pfd. annehmen, bei grösseren Höhen aber mit demselben nach und nach bis auf 5 Pfd. heruntergehen, indem es einleuchtet, dass der aus der Wassereinsaugung entspringende Uebelstand desto weniger nachtheilig einwirkt, je höher die Erdanschüttung ist.

Es kann vorkommen, dass bei Erdanschüttungen auch Wasser von unten her eindringt, z. B. bei Uferbauten, Schleusen, Wasserleitungsreservoirs u. s. w. In diesem Falle wird man vorsichtshalber den Gewichtszuschuss ohne wesentliche Rücksichtsname auf die Anschüttungshöhe beziffern. Uebrigens soll dem Eindringen von Grundwässern jedenfalls durch eine entsprechende Fundirung der Stützwand nach Zulässigkeit vorgebeugt werden.

Der Hauptsache nach gilt das Gesagte auch für Anschüttungen aus Sand und Lehm. Nur ist beim Sande keine bedeutende Cohäsion vorhanden und er kann durch Anstampfen nicht viel verdichtet werden; auch ist derselbe fähig, mehr Wasser als die Dammerde aufzunehmen, weshalb man je nach der Anschüttungshöhe den oben angedeuteten Gewichtszuschlag mit 8 bis 16 Pfd. per Cubikfuss in Rechnung bringen soll. Kann das Wasser auch von unten her eindringen, so nimmt hiebei wieder die Anschüttungshöhe einen minder wesentlichen Einfluss. Bei Lehm, welcher noch mehr Fähigkeit besitzt, Wasser zu absorbiren, mag man in ähnlicher Weise einen Gewichtszuschuss von 10 bis 20 Pfd per Cubikfuss in Anschlag bringen.

Schotter zeigt ein wesentlich verschiedenes Verhalten. Bei den vorgenannten Erdgattungen vereinigt sich nämlich das Wasser mit demselben so, dass das Gemenge gleichsam einen Brei bildet, ausserdem dringt dabei das Wasser nicht immer in die ganze Tiefe der Anschüttung ein. Bei Schotteraufschüttungen dagegen entsteht kein solcher Brei, zudem dringt das Wasser in die ganze

Tiefe ein und füllt die Zwischenräume aus, wenn nur eine hinreichende Wassermenge vorhanden ist. Aus dem Umstande, dass Schotter und Wasser keine breiartige Masse bilden, geht zunächst hervor, dass man es in einem solchen Falle mit zweierlei Druckwirkungen zu thun hat, welche abgesondert berechnet werden müssen, und dass somit der Gesammtdruck auf die Stützwand der Summe beider Druckwirkungen gleichzusetzen ist. Die Erfahrung zeigt, dass die leeren Zwischenräume beim Schotter circa 40% von dem ganzen cubischen Raume betragen. Diese Zwischenräume können allerdings verkleinert werden, wenn man dem Schotter gewöhnliche Erde beimengt, was jedenfalls zweckmässig ist und stets geschehen soll, falls überhaupt solche Erde zur Verfügung steht. Indem nun ein Cubikfuss Wasser 56·4 Pfd. wiegt, beträgt das Gewicht des Wassers per Cubikfuss Schotter (ohne Erdebeimengung) $56 \cdot 4 \times 0 \cdot 4 = 22 \cdot 56$ Pfd., und man muss, wie vorbemerkt, den Druck dieser Wassermenge besonders berechnen und denselben sodann zu demjenigen des Schottermateriales hinzuaddiren, um die Totalwirkung zu erhalten.

Zu diesem Behufe nenne man

das Gewicht des Schotters per Cubikfuss .... g_s
den von diesem, auf die Stützwand ausgeübten Druck ...... D_s
das Gewicht des Wassers per Cubikfuss (nämlich 56·4 Pfd.).. g_w
das Verhältniss der leeren Zwischenräume des Schottermateriales zu dem ganzen Raume, den dieses einnimmt, ... δ

(also nach dem Obigen $\delta = 0 \cdot 4$),

endlich

den durch das eingedrungene Wasser entstehenden Druck auf die Stützwand .... D_w.

Hiernach ist der Totaldruck, um den es sich in diesem Falle handelt:

$$D = D_s + D_w.$$

Zunächst ist der eigentliche Schotterdruck nach der Formel (94):

$$D_s = \tfrac{1}{2} g_s \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2,$$

wobei der für den reinen Schotter entsprechende natürliche Böschungswinkel (α) in Rechnung zu kommen hat.

Bezüglich des Wasserdruckes ist zu bemerken, dass ein Cubikfuss der Schotteranschüttung offenbar die Wassermenge δg_w aufnimmt, und dass die Wirkung dieser Wassermenge nahezu dieselbe sein wird, welche entstehen würde, wenn hinter der Stützwand eine tropfbare Flüssigkeit sich befände, welche die ganze Wandhöhe einnähme und das Gewicht von δg_w per Cubikfuss hätte. Hiernach kann man sich erlauben, mit Rücksicht auf die hydrostatische Formel (4) zu schreiben:

$$D_w = \frac{1}{2} \delta g_w \frac{H^2}{\cos \varepsilon}.$$

Man erhält daher:

$$D = \frac{1}{2} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left\{ g_s \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2 + \delta g_w \right\}.$$

Es soll nun untersucht werden, welches eingebildete Schottergewicht g per Cubikfuss vorhanden sein müsste, damit hiedurch rechnungsmässig der gleiche Druck D entstehen würde.

Man hätte dann:

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2,$$

und durch Gleichsetzung der beiden für D erhaltenen Werthe:

$$g \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2 = g_s \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2 + \delta g_w,$$

woraus sich ergibt:

$$g = g_s + \delta g_w \left[\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)} \right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (135).$$

So schwer müsste man sich nämlich den Schotter vorstellen, damit der rechnungsmässig resultirende Druck auf die Stützwand eben so gross wird, wie der Druck des wirklichen Schotters mit Berücksichtigung der Wirkung des eindringenden Wassers.

Um in Betreff dieses Ergebnisses einen deutlichen Begriff zu bekommen, möge folgendes Zahlenbeispiel angeführt werden. Es sei $g_s = 90$ und

$g_\omega = 56{\cdot}4$ Pfd., $\delta = 0{\cdot}4$, $\varepsilon = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{\cdot}3$ bis $1{\cdot}4$, folglich nahezu $\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 = 4$. Hiernach findet man : $g = 180$ Pfd.

Das Schottermateriale müsste also, anstatt mit dem wirklichen Gewichte von 90 Pfd. per Cubikfuss, mit 180 Pfd. in Rechnung kommen, d. h. die mit Wasser angefüllte Schotteranschüttung übt auf die Stützwand in dem beispielsweisen Falle einen doppelt so grossen Druck aus, wie jener ist, der vor dem Hinzutreten des Wassers vorhanden war.

Wie zu ersehen, ist der Einfluss des Wassereindringens in das Schottermateriale ein wesentlicher, weshalb man Schotteranschüttungen hinter Stützwänden möglichst vermeiden, oder, wenn hievon schon nicht Umgang genommen werden kann, wenigstens dafür sorgen soll, dass dem Schotter sonstige Erde beigemengt werde, was freilich nicht immer möglich ist.

Das gleiche Verhalten wie Schotter zeigen Hinterfüllungen mit grösseren Steinen, z. B. Abfällen von Felssprengungen, indem auch hier augenscheinlich dieselben ungünstigen Umstände, wie bei dem eigentlichen Schotter, auftreten.

Zum Beweise, wie unvortheilhaft Hinterfüllungen der bezeichneten Art sind und wie gefährlich solche für die Standfähigkeit von Stützwänden, welche dem Drucke derselben widerstehen sollen, werden können, wird hier auf den Einsturz der grossen, bis acht Klafter hohen Stützmauern hingewiesen, welcher bei dem im Jahre 1858 vollendeten Umbaue der Reichsstrasse hinter Portoré im croatischen Küstenlande erfolgte.

Diese Strasse ist nämlich durchaus in felsigem Terrain tracirt, welches die Fortsetzung des kahlen Karstgebirges im Triester Gebiete bildet. Die Strassenbahn ist zumeist in das Terrain eingeschnitten, und nur an Einer Stelle, welche eine Mulde bildet, wurde sie aufgedämmt.

Fig. 48.

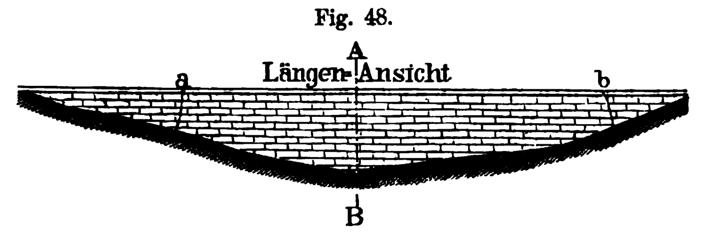
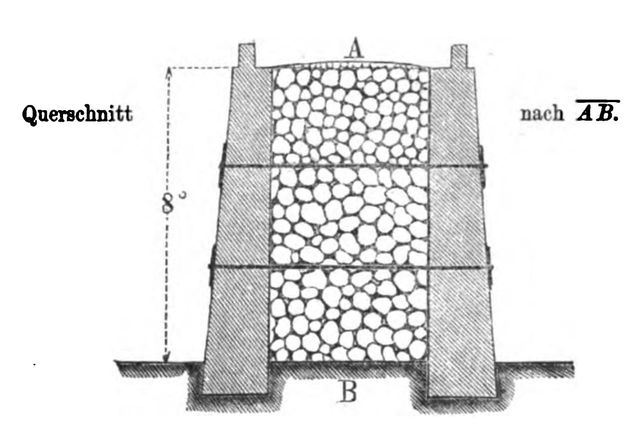


Fig. 48 zeigt die beiläufige Längenansicht und Fig. 49 den Querschnitt dieser über die Mulde führenden Strassenstrecke. Zur Ausfüllung

zwischen den Stützmauern musste, da dort nirgends sonstige Erde vorhanden ist, das Materiale von den Felssprengungen aus den Einschnitten verwendet werden, und zudem wurden die Stützmauern selbst, nach landesüblicher Weise nicht in Mörtel gelegt, sondern nur trocken aufgeführt.

Fig. 49.

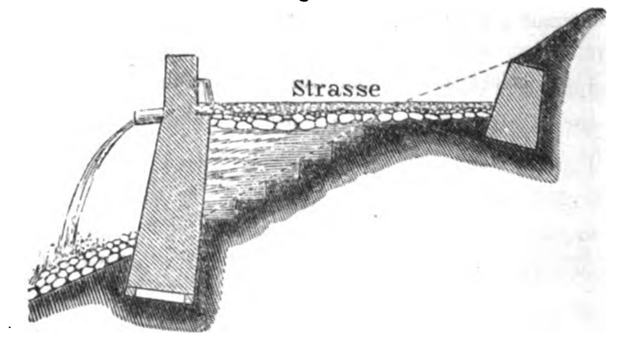


Diese Stützmauern waren nun allerdings eine Zeit lang im Stande, sich zu erhalten und dem Drucke des Hinterfüllungsmateriales zu widerstehen; als jedoch ein heftiger Regen eintrat, füllten sich die Zwischenräume der Anschüttung mit Wasser aus, und der Druck an die Stützmauern wurde hiedurch so bedeutend vermehrt, dass diese grösstentheils (nämlich in der Strecke *ab*) zusammenstürzten und in einer solideren Weise wieder erbaut werden mussten. In Betreff dieser Wiedererbauung ist der Umstand eigenthümlich, dass man zur Erzielung einer erhöhten Sicherheit die neuen Stützmauern mit eisernen Schliessen verbunden hat, wie dies in dem vorskizzirten Querschnitt angedeutet erscheint.

Da in jedem Falle das Eindringen von grösseren Wassermengen in eine Anschüttung hinter einer Stützwand nachtheilig einwirkt, so ist es namentlich dort, wo eine bedeutendere Wasseransammlung, wie etwa an Berglehnen, stattfinden kann, zu empfehlen, für den Abfluss des Wassers über die Stützwände hinaus mittelst Abzugsrinnen oder Canälen Sorge zu tragen. (Fig. 50.)

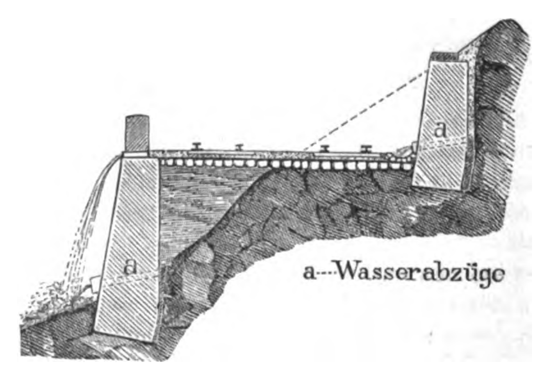
Nöthigen Falls wird man derlei Abzugsöffnungen nicht nur oben, sondern auch an passend gewählten Stellen tiefer anbringen, insbesondere dann, wenn zu befürchten ist, dass der Anschüttung

Fig. 50.



aus Quellen im Innern des Terrains ebenfalls Wasser zugeführt werden kann. (Fig. 51.)

Fig. 51.



Vorzugsweise sollen derlei Vorsichtsmassregeln bei Anschüttungen aus Schotter, wofür die Ursache aus dem hierüber Gesagten einleuchtet, dann aber auch bei solchen aus Lehm, und zwar darum getroffen werden, weil dieses Materiale nicht nur viel Wasser aufzusaugen fähig ist, sondern auch dadurch (gleichsam wie ein in's Wasser eingetauchter Schwamm) sich aufblähet, und hiebei mitunter eine so bedeutende Expansivkraft entwickelt, dass die Stützwände leicht zum Ausweichen gebracht werden.

Hierin liegt zugleich ein weiterer Grund, warum man trockenes Lehmmateriale, insoferne es zur Anschüttung hinter Stützwänden verwendet werden muss, während der schichtenweisen La-

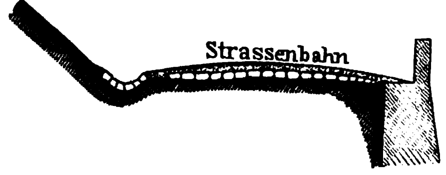
gerung mit Wasser benetzen soll, um nämlich hiedurch die Fähigkeit des Materiales, noch weiter Wasser in sich aufzunehmen, zu vermindern.

In manchen Fällen, namentlich wenn Strassen oder Eisenbahnen in zerklüfteten Felslehnen eingeschnitten werden, ist es sogar nöthig, zur unschädlichen Abführung des sich sammelnden Wassers ein ganzes System von Schächten, Stollen und Canälen rückwärts in die Bergwand derart hineinzulegen, dass hiedurch gleichsam eine verticale Drainirung entsteht.

§. 35.

Durch Stützmauern gehaltenes Erdreich an gewöhnlichen Strassen. Sicherheitscoefficienten in diesem Falle. (Fig. 52.) Bezeichnet man mit D den Erddruck an

Fig. 52.



eine solche Stützmauer, ohne Berücksichtigung der auf der Strassenbahn vorkommenden grössten zufälligen Belastung, und mit D' jenen nach Berücksichtigung derselben, so hat man bekanntlich zu Folge der Untersuchungen im §. 31, insbesondere nach der dortigen Gleichung (123):

$$D' = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) D,$$

indem man gleichzeitig beachtet, dass man bei der Berechnung des Werthes von D nach der im §. 33 gegebenen Regel vorgeht, nämlich hiebei das Erdmateriale im lockeren und cohäsionslos gedachten Zustande annimmt.

Was den Abstand des Druckmittelpunktes von dem durch die Stützwandbasis gehenden Horizonte betrifft, so ist dieser Abstand bei dem cohäsionslos gedachten Erdmateriale ohne Berück-

sichtigung der zufälligen Belastung: $e = \frac{1}{3} H$, mit Berücksichtigung derselben, nach Massgabe der Gleichung (134), aber:

$$e' = \left[\frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}}\right] e.$$

Um die in den so erscheinenden Formeln für D' und e' innerhalb der Klammern enthaltenen Factoren zu beziffern, hat man zunächst in Ueberlegung zu nehmen, wie gross die zufällige Belastung per Quadrat-Einheit auf einer gewöhnlichen Strasse werden kann. Erfahrungsgemäss wird die grösste zufällige Belastung in dem betrachteten Falle bei dem Entstehen von Menschengedränge angenommen, obwol über die Grösse der Belastung selbst die Angaben der Ingenieure verschiedener Länder mehr oder weniger von einander abweichen.

Am kühnsten gehen in dieser Beziehung die Franzosen vor, bei denen ein altes Regierungsgesetz sich dahin ausspricht, die Belastung durch Menschengedränge per Quadrat-Meter mit 200 Kilogrammen anzunehmen, was, auf Wiener Mass und Gewicht umgerechnet, per Quadrat-Klafter nur 12·8 Centner gibt; während man hierlands, so wie in Deutschland und England, 25—30 Centner per Quadrat-Klafter rechnet.

Indessen sind die Franzosen, namentlich durch ihre ungünstigen Erfahrungen an vielen Brückenconstructionen, nach und nach selbst zur Erkenntniss gelangt, dass die erwähnte Belastung zu gering bemessen ist, und sicherheitshalber erhöht werden muss.

Die hierlands übliche höhere Ziffer von 25 bis 30 Centnern per Flächenklafter lässt sich durch die Betrachtung, wie viele Menschen auf einer Quadratklafter Raum möglicher Weise Platz finden können, ganz gut begründen. In dieser Beziehung wird das Resultat einer Probe angeführt, welche mit einer eisernen Brücke in Wien vorgenommen wurde.

Zwei gleiche Brücken, jede im Lichten 5 Klafter lang und 2½ Klafter breit, wurden nämlich anno 1855 im hiesigen k. k. Hofstallgebäude ausgeführt, wo dieselben im hintersten Hofraume zwei Gebäude in Stockwerkshöhe mit einander verbinden.

Das Gewicht für die Belastungsprobe, welche man mit Einer dieser Brücken vorgenommen hat, wurde unmittelbar durch das Zusammendrängen

von Menschen hervorgebracht. Zur Vorname dieser Probe hat man die Brücke vorerst im Hofraume der Fabrik des Mechanikers **Bollinger**, welche die Ausführung zu besorgen hatte, aufgestellt und montirt, und hiebei die Brückenenden durch horizontal gelegene Balken und Pfosten unterstützt, so dass das Brückenfeld nur wenige Zolle von dem Erdboden entfernt, also eine Gefährdung der darauf zusammengedrängten Personen nicht zu befürchten war. Auf der Brücke standen 200 Soldaten und 82 Fabriksarbeiter, zusammen 282 Mann, wonach bei der Brückenbahn-Fläche von $12\frac{1}{2}$ Quadratklaftern durchschnittlich die Anzahl von 22·56 Personen auf eine Flächenklafter entfiel. Das Gewicht selbst wurde nicht erhoben; rechnet man jedoch $1\frac{1}{4}$ Centner per Mann, so findet man 28·2 Centner als Durchschnittsbelastung per Flächenklafter*).

Indem man somit die Bemessung der Belastung mit 25 bis 30 Centnern per Quadrat-Klafter gelten lässt, hat man, wenn in Fussen und in Pfunden die Rechnung durchgeführt wird, zu setzen:

$$p = 69\cdot4 \text{ bis } 83\cdot3 \text{ Pfd. per Quadrat-Fuss.}$$

Sei nun das Gewicht des Erdreiches per Cubikfuss $g = 80$ Pfd., welche Anname eher zu gering als zu hoch gegriffen ist, so erhält man zunächst:

$$\frac{p}{g} = 0\cdot87 \text{ bis } 1\cdot04,$$

wobei man vorsichtshalber blos die grössere Zahl berücksichtigen, und diese, was genau genug ist, geradezu gleich der Einheit annehmen mag.

Hiernach ergibt sich:

$$\frac{p}{g} = 1,$$

$$\frac{D'}{D} = 1 + \frac{2p}{gH} = 1 + \frac{2}{H},$$

$$\frac{e'}{e} = \frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}} = \frac{1 + \frac{3}{H}}{1 + \frac{2}{H}} = \frac{H+3}{H+2} = 1 + \frac{1}{H+2};$$

*) Siehe die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines vom Jahre 1855, Seite 22. Daselbst ist noch bemerkt, dass schon in früherer Zeit von dem k. k. Geniecorps in Wien ähnliche Versuche angestellt wurden, wobei sich zeigte, dass es mitunter möglich war, sogar 24 Mann auf eine Quadratklafter zusammenzudrängen, von welchen freilich keiner mehr im Stande war, auch nur die kleinste Bewegung zu machen.

also für verschiedene Wandhöhen, und zwar für solche von 1 bis 10 Klaftern, insbesondere für

$$H = 6,\quad 12,\quad 18,\quad 24,\quad 30,\quad 60 \text{ Fussen:}$$

$$\frac{D'}{D} = 1\tfrac{1}{3},\quad 1\tfrac{1}{6},\quad 1\tfrac{1}{9},\quad 1\tfrac{1}{12},\quad 1\tfrac{1}{15},\quad 1\tfrac{1}{30};$$

$$\frac{e'}{e} = 1\tfrac{1}{8},\quad 1\tfrac{1}{14},\quad 1\tfrac{1}{20},\quad 1\tfrac{1}{26},\quad 1\tfrac{1}{32},\quad 1\tfrac{1}{62}.$$

In der Praxis liegen die Werthe für die Höhen der Stützmauern in der Regel zwischen 6 und 60 Fussen. Hiernach würde unter den gemachten Voraussetzungen der Erddruck an Strassenstützmauern in Folge der grössten zufälligen Belastung so gross werden, dass derselbe das $1\frac{1}{30}$ bis $1\frac{1}{3}$fache desjenigen Erddruckes beträgt, welcher ohne Rücksicht auf eine zufällige Belastung berechnet wird. Auch der Hebelsarm des, als Resultirende gedachten Erddruckes von der Wandbasis an gerechnet, nimmt mit der zufälligen Belastung, jedoch in geringerem Verhältnisse, zu.

Die jeweilige Zahl nun, mit welcher man die alleinige Druckwirkung des Erdreiches multipliciren muss, um die durch die grösste zufällige Belastung vermehrte Druckwirkung und ausserdem einen gewissen Ueberschuss zu erhalten, heisst „Sicherheits-Coefficient", welcher im §. 26 mit dem Buchstaben s bezeichnet wurde.

Die Werthe für diesen Sicherheits-Coefficienten hängen, wie aus den obigen Resultaten hervorgeht, von der grösseren oder geringeren Wandhöhe ab, und zwar derart, dass s zunimmt, wenn H abnimmt, und umgekehrt. Indem man daher allgemein:

$$D' = s\,D \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (136)$$

zu setzen hat, wird es vorkommenden Falls darauf ankommen, den passenden Werth für den Sicherheits-Coefficienten s ausfindig zu machen.

Würde man sich genau an die obigen Rechnungsergebnisse halten, so müsste man für s die Werthe von $1\frac{1}{3}$ bis $1\frac{1}{30}$ annehmen, insoferne Mauerhöhen von 6 bis 60 Fussen in Betracht kommen. In der Praxis muss man aber einen, den Grenzzustand des Gleichgewichtes überragenden, somit erhöhten Grad der Sicher-

heit für die Stabilität der Stützwände zu erreichen suchen, weshalb es nothwendig ist, für den fraglichen Sicherheits-Coefficienten grössere Werthe, als aus den vorigen Betrachtungen abgeleitet wurden, einzuführen. Aus diesem Grunde ist es erfahrungsgemäss zu empfehlen, den gedachten Sicherheits-Coefficienten für Strassenstützmauern bei minder grossen Mauerhöhen bis $s = 2$, und bei grösseren Höhen bis $s = 1\frac{1}{2}$ anzunehmen.

Bei ganz niedrigen Mauern, deren Höhe nur einige Fusse beträgt, könnte es wohl geschehen, dass — wenn man in diesem Falle eine Rechnung anstellen wollte — der fragliche Sicherheits-Coefficient noch weiter vergrössert werden müsste, indessen würde eine solche Nothwendigkeit nur selten eintreten, nämlich dann, wenn das Hinterfüllungsmateriale Schotter oder Sand sein sollte, weil diese Materialien keine oder nur eine geringe Cohäsion besitzen, so dass eine günstige auf die Verminderung des Erddruckes abzielende Cohäsionswirkung nicht zu erwarten ist. Wäre das Hinterfüllungsmateriale jedoch Dammerde oder Lehm, so könnte in der Regel der vorangeführte Maximal-Coefficient $s = 2$ auch für ganz kleine Mauerhöhen als ausreichend angesehen werden, zumal bei diesen Materialien die bedeutende Cohäsion in einer so günstigen Weise mitwirkt, dass schon hiedurch, und weil diese Cohäsionswirkung nicht in Rechnung kommt, ein namhafter Stabilitätsüberschuss hervorgerufen würde.

Diese Bemerkungen hat man indessen blos der Vollständigkeit wegen, und um einem etwaigen Missverständnisse vorzubeugen, beigefügt; denn thatsächlich wird der praktische Ingenieur gar nicht in den Fall kommen, die Stärke von Stützmauern, welche nur wenige Fuss hoch sind, berechnen zu müssen; indem dieselbe schon aus sonstigen praktischen Gründen mit einem gewissen Ausmasse wird angeordnet werden müssen, unter welches man — selbst, wenn man rechnungsmässig ein kleineres fände — nicht herabgehen darf.

Hat man die erwünschte $s$fache Sicherheit nach der vorigen Andeutung bei der Berechnung des Erddruckes berücksichtigt, so kann man von der oben besprochenen Vergrösserung der, auf den

Hebelsarm für das allfällig in Betracht kommende Umsturzmoment bezüglichen Grösse e verzichten, daher ungeachtet der Wirkung der zufälligen Belastung ohne weiters annehmen, dass der Druckmittelpunkt in dem dritten Theile der Höhe liegt. Denn einerseits ist die Veränderung der Grösse e thatsächlich, mitunter bedeutend, kleiner, als sie aus dem rechnungsmässig angegebenen Verhältnisse $\frac{e'}{e}$ sich ergeben würde, weil vermöge der Erdcohäsion, welche hiebei nicht berücksichtigt erscheint, der Druckmittelpunkt tiefer rückt; andererseits aber sind die vorgeschlagenen Sicherheitscoefficienten $s = 1\frac{1}{2}$ bis 2 schon derart gewählt, dass dieselben auch in dem Falle, wenn es sich um die rechnungsmässige Einführung des Umsturzmomentes handelt, ausreichen; zudem ist zu beachten, dass derlei Rechnungen ohnedies nur mit einer beschränkten Genauigkeit sich durchführen lassen, da schliesslich noch mancherlei praktische Einflüsse in's Spiel kommen, die nur beiläufig im Wege der Abschätzung beurtheilt werden können.

Indem man für den jeweiligen Sicherheits-Coefficienten innerhalb der in der Praxis vorkommenden Mauerhöhen von 6 bis 60 Fussen, die praktischen Werthe von 2 bis $1\frac{1}{2}$ herab gelten lässt, kann man, um die passenden Zwischenzahlen zu finden, sich erlauben, die Abhängigkeit zwischen s und H annäherungsweise durch die Gleichung:

$$s = a + \frac{b}{H} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (137)$$

darzustellen, weil man nämlich zunächst

$$\frac{D'}{D} = 1 + \frac{2}{H},$$

sodann aber gefunden hat, dass dieser Werth noch weiter vergrössert werden muss, was eben durch die Vermehrung der Zahlen 1 und 2 bis auf die Zahlen a und b geschehen soll, ohne die eigentliche Functionsform in Bezug auf H zu ändern.

Um die Werthe der neuen Constanten a und b zu finden, hat man zu berücksichtigen, dass $s = 2$ für $H = 6$ Fuss, und $s = 1\frac{1}{2}$ für $H = 60$ Fuss werden soll. Demnach erhält man die zwei Bedingungsgleichungen:

$$2 = a + \frac{b}{6} \text{ und } 1\tfrac{1}{2} = a + \frac{b}{60},$$

woraus $a = 1\frac{4}{9} = 1 \cdot 44$ und $b = \frac{10}{3} = 3 \cdot 33$ folgt, so dass die Gleichung (137) in folgende übergeht:

$$s = 1 \cdot 44 + \frac{3 \cdot 33}{H} \dots\dots\dots\dots\dots (138),$$

worin die jeweilige Stützmauerhöhe H in Fussen einzusetzen ist.

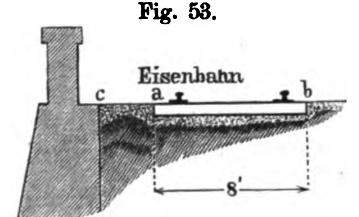
Für $H = 24$ Fuss z. B. ist $s = 1 \cdot 58$, oder abgerundet $s = 1 \cdot 6$.

§. 36.

Durch Stützmauern gehaltenes Erdreich an Eisenbahnen. Sicherheits-Coefficient in diesem Falle. (Fig. 53.) Mit Rücksicht auf die Schwere und Länge der Locomotiven beträgt die grösste zufällige Belastung auf Eisenbahnen per Current-Klafter Geleise durchschnittlich 120 bis 180, daher per Current-Fuss 20 bis 30 Centner. Wird bei einem einfachen Geleise die Länge der Bahnquerschwellen $\overline{ab}$ mit 8 Fussen angenommen, so entfällt per Current-Fuss dieser Schwellen, oder per Quadrat-Fuss Bahnoberfläche in dem Bahnstreifen $\overline{ab}$ durchschnittlich ein Belastungsgewicht von $\frac{20}{8} = 2\frac{1}{2}$ bis $\frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}$ Centnern.

Um die Wirkung dieser Belastung in den Formeln (123) und (134) zu berücksichtigen, wird es mehr als genügen, höchstens $p = 3$ Centner zu setzen, d. h. den Fall so anzusehen, als ob diese Einheitsbelastung überall auf der ganzen Bahnoberfläche vorhanden wäre — nämlich auch in dem Raume zwischen a und c, so wie auf der anderen Seite ausserhalb des Geleises, obwol dies in der Wirklichkeit zu Gunsten der Mauer-Stabilität nicht eintritt.

Fig. 53.



Auch bei dem Vorhandensein von mehr als Einem Eisenbahngeleise braucht die bezeichnete Belastungszahl nicht erhöht zu werden, da diese immer noch als ausreichend angesehen werden kann.

Indem man daher $p = 300$ Pfund und (wie im vorigen §.) $g = 80$ Pfund, in die Berechnung einführt, erhält man einerseits:

$$\frac{D'}{D} = 1 + \frac{2p}{gH} = 1 + \frac{7 \cdot 5}{H},$$

und andererseits:

$$\frac{e'}{e} = \frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}} = \frac{1 + \frac{11 \cdot 25}{H}}{1 + \frac{7 \cdot 5}{H}} = \frac{H + 11 \cdot 25}{H + 7 \cdot 5}$$

$$= 1 + \frac{3 \cdot 75}{H + 7 \cdot 5};$$

daher insbesondere für die Mauerhöhen zwischen 6 und 60 Fussen:

$$\frac{D'}{D} = 2\tfrac{1}{4} \text{ bis } 1\tfrac{1}{8};$$

$$\frac{e'}{e} = 1\tfrac{5}{18} \;\; „ \;\; 1\tfrac{1}{18}.$$

Ist wieder $\frac{D'}{D}$ der Sicherheits-Coefficient s, und beachtet man, dass dieser aus analogen Gründen, wie im vorigen §., etwas vergrössert werden muss, um die für die Praxis nöthige Sicherheit für die Mauer-Stabilität zu erhalten, so gelangt man erfahrungsgemäss zu dem Ergebnisse, dass man für Eisenbahn-Stützmauern je nach ihrer Höhe den Sicherheits-Coefficienten $s = 2$ bis 3 zu setzen hat, und zwar so, dass derselbe grösser anzunehmen ist, wenn die Mauerhöhe abnimmt, und umgekehrt.

Indem man $s = 3$ für $H = 6$ Fuss, und $s = 2$ für $H = 60$ Fuss gelten lässt, kann man, so wie im vorigen §., wieder annäherungsweise die Abhängigkeit zwischen den Grössen s und H durch eine Gleichung von der Form:

$$s = a + \frac{b}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

ausdrücken, und es sind jetzt die Constanten a und b aus den beiden Bedingungsgleichungen:

$$3 = a + \frac{b}{6} \text{ und } 2 = a + \frac{b}{60}$$

abzuleiten, wodurch man insbesondere $a = 1\frac{8}{9} = 1 \cdot 89$ und $b = 6\frac{2}{3} = 6 \cdot 67$, sofort aber:

$$s = 1 \cdot 89 + \frac{6 \cdot 67}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

erhält.

Für $H = 24$ Fuss wäre z. B. $s = 2 \cdot 17$ oder abgerundet, $s = 2 \cdot 2$.

§. 37.

Zusammenfassung der theoretisch-praktischen Regeln für die Bestimmung des Erddruckes an Strassen- und Eisenbahnstützmauern. Man berechne zunächst den Erddruck nach der, in der Gestalt der hydrostatischen Formel erscheinenden Gleichung (94):

$$D = \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},$$

worin H die verticale Mauerhöhe über dem Fundamente, ε den Neigungswinkel der gedrückten Mauerfläche gegen das Loth, w aber das per Cubikeinheit entfallende Gewicht derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche denselben Druck an die Stützwand ausüben würde, wie das cohäsionslos gedachte Erdreich.

Der fragliche Werth für w ist nach einer der massgebenden Gleichungen (95, 96, 97, 98) oder mit Zuhilfename der Tabelle VI im §. 27 (pag. 90) zu bestimmen, wobei anstatt g das Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches im lockeren Zustande, eventuell um den wegen des Wassereindringens nothwendig erachteten Zuschlag vermehrt, einzuführen ist.

Der so erhaltene Erddruck D ist sodann mit Bedachtname auf die zufällige Belastung, und weil ein gewisser Sicherheitsüberschuss vorhanden sein muss, mit dem Sicherheits-Coefficienten s zu multipliciren, welcher nach Massgabe der Gleichungen (138) oder (140), je nachdem es sich um Stützmauern an gewöhnlichen Strassen oder an Eisenbahnen handelt, zu beziffern ist, um nämlich denjenigen Erddruck D' zu erhalten, den man schliesslich bei der Beurtheilung der Mauer-Stabilität in Berücksichtigung zu nehmen hat.

Insoferne hiebei der Hebelsarm für das Umsturzmoment in Betracht kommt, kann man den Mittelpunkt des Erddruckes geradezu in dem dritten Theile der Druckhöhe annehmen.

Bei der praktischen Ausführung hat man übrigens darauf zu sehen, dass die Erdanschüttung allmälig in Schichten aufge-

tragen und gehörig gestampft, wenn möglich auch durch das Darüberfahrenlassen des Arbeits-Fuhrwerkes noch weiter verdichtet werde; auch soll für den gehörigen Abfluss des Regen- und Schneewassers, dann der etwa im Innern zufliessenden Quellen Sorge getragen werden.

Bemerkenswerth ist noch, dass es üblich ist, bei Anschüttungen auf Berglehnen diesen letzteren eine stufenförmige Gestaltung zu geben (beispielsweise, wie in der Figur 50), um eine zweckmässigere Verbindung zwischen dem aufgeschütteten und dem gewachsenen Erdreiche zu bewerkstelligen.

Ex. Wie gross ist der Erddruck an eine 30 Fuss hohe Strassen-Stützmauer, behufs der Stabilitätsberechnung für diese letztere, anzunehmen, wenn die gedrückte Mauerfläche liegend und hiefür tg $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ist, ferner das Gewicht des aus Dammerde bestehenden Hinterfüllungsmateriales im lockeren Zustande 75 Pfunde, und das natürliche Böschungsverhältniss tg $\alpha = 1 \cdot 2$ beträgt?

Nimmt man nach den Andeutungen im §. 34 den Gewichtszuschlag wegen des in das Erdreich möglichen Wassereindringens mit 5 Pfd. an, so hat man für $g = 75 + 5 = 80$ Pfd. zu setzen. Nun findet man nach der Tabelle VI für tg $\alpha = 1 \cdot 2$ und tg $\varepsilon = \frac{1}{10}$, an der Durchkreuzung der bezüglichen Spalten:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 184,$$

somit nach Benützung des vorigen Werthes für g:

$$w = 0 \cdot 184\, g = 14 \cdot 72 \text{ Pfd.}$$

Indem man jetzt (laut der Tabelle III) $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 \cdot 005$ setzt, so erhält man, wegen $H = 30$ Fuss, nach der Formel (94):

$$D = \frac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 6657 \text{ Pfd.} = 66 \cdot 57 \text{ Ctr.}$$

Endlich hat man nach der Formel (138) den betreffenden Sicherheits-Coefficienten:

$$s = 1 \cdot 44 + \frac{3 \cdot 33}{H} = 1 \cdot 55,$$

hiermit aber die fragliche Grösse des Erddruckes:

$$D' = s\, D = 103 \cdot 2 \text{ Ctr.}$$

Zweites Capitel.

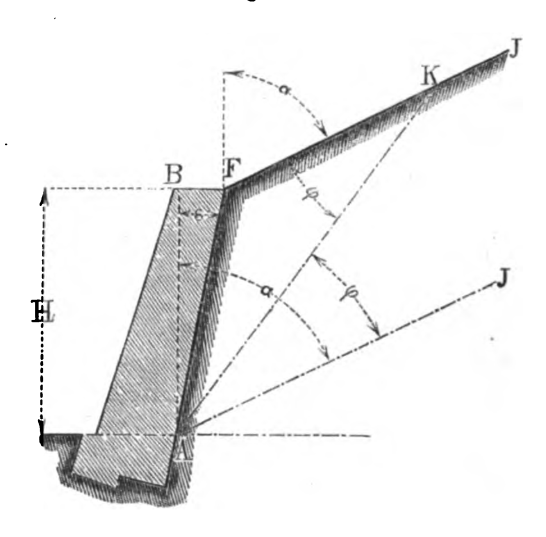
Erddruck an eine um den Winkel ε geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich von der Wandkrone an nach der natürlichen Böschung ansteigt.

§. 38.

Grösse des Erddruckes und Mittelpunkt desselben in diesem Falle. Um die Grösse des bezüglichen Erddruckes an die Stützwand aufzufinden, und zwar, indem man gleich von vorne herein die allfällige Cohäsion des Erdreiches ausser Acht lässt, hat man die Formel (78) für $c = 0$ zu benützen, und hiernach zu setzen:

$$D = \max \varDelta = \max \left[\frac{X \sin \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon)}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (141).$$

Fig. 54.



Hierin ist nach Fig. 54:

$$X = \left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prisma's } AFK\end{matrix}\right\} = g \,.\, \triangle AFK$$

$$= \tfrac{1}{2} g \,.\, \overline{AF} \,.\, \overline{AK} \,.\, \sin \measuredangle FAK,$$

also wegen:

$$\overline{AF} = \frac{H}{\cos\varepsilon}, \quad \sphericalangle FAK = (\alpha - \varepsilon - \varphi) \text{ und}$$

$$\overline{AK} = \overline{AF}\,\frac{\sin \sphericalangle AFK}{\sin \sphericalangle AKF} = \frac{H}{\cos\varepsilon}\,\frac{\sin(180^\circ - \alpha + \varepsilon)}{\sin\varphi} = \frac{H \sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon \sin\varphi},$$

insbesondere:

$$X = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)\sin(\alpha - \varepsilon - \varphi)}{\cos^2\varepsilon \sin\varphi},$$

hiernach aber:

$$\Delta = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2\varepsilon} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varepsilon - \varphi)}{\cos(\varphi + \varepsilon)} \;\ldots\ldots\; (142).$$

Der in dieser Formel von φ abhängige Factor:

$$f(\varphi) = \frac{\sin[\alpha - (\varphi + \varepsilon)]}{\cos(\varphi + \varepsilon)} = \cos\alpha\,[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon)]$$

ist nun zu einem Maximum zu machen, nämlich insoferne, als ein solches innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = (\alpha - \varepsilon)$ stattfindet.

Würde man hiebei den ersten Differential-Quotienten:

$$\frac{d f(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{\cos\alpha}{\cos^2(\varphi + \varepsilon)} = 0$$

setzen wollen, so erhielte man die unmögliche Gleichung $\cos(\varphi + \varepsilon) = \infty$, was anzeigt, dass es sich dermalen nicht um ein analytisches, sondern um ein numerisches Maximum innerhalb der bezeichneten Grenzwerthe für φ handelt, folglich der Fall eintritt, auf den am Schlusse des §. 13 unter Punkt 4 aufmerksam gemacht wurde.

Die Gestaltung des Ausdruckes für $f(\varphi)$ lässt sogleich erkennen, dass die erwähnte Bedingung für $\varphi = 0$ eintritt, somit das Bruchprisma die ganze Erdmasse enthält, welche zwischen den beiden natürlichen Böschungen $\overline{AJ}$ und $\overline{FJ}$ enthalten ist. Man erhält daher:

$$D = \max\Delta = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos^3\varepsilon} \sin^2(\alpha - \varepsilon)$$

$$= \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2 = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \ldots\ldots (143),$$

worin:

$$w = g\left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\; (144)$$

das Gewicht der cubischen Einheit derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche auf die Wand denselben Druck, wie das Erdreich, ausüben würde*).

Um zur Berechnung der Formel (144) nicht trigonometrische Tafeln benützen zu müssen, hat man dieselbe wie folgt umzustalten:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\sin\alpha\cos\varepsilon - \cos\alpha\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha\,(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\varepsilon)^2 = \frac{(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\varepsilon)^2}{(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)} \ldots\ldots (145),$$

so dass jetzt nur die für $\mathrm{tg}\,\varepsilon$ und $\mathrm{tg}\,\alpha$ gegebenen Werthe zu substituiren sind.

Für eine verticale Stützwand ist $\varepsilon = 0$, somit:

$$\frac{w}{g} = \sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (146),$$

$$D = \tfrac{1}{2}\,g\,H^2\sin^2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (147).$$

Um übrigens auch diese Rechnung zu umgehen, kann man die nachstehende Tabelle benützen, von deren Einrichtung der Hauptsache nach dasselbe gilt, was im §. 27 von der dortigen Tabelle VI gesagt wurde.

*) Für $\alpha = 90^\circ$ ist das Hinterfüllungsmateriale unmittelbar als tropfbare Flüssigkeit zu betrachten, und es kann sodann zwischen den Einheitsgewichten g und w ein Unterschied nicht mehr vorhanden sein. In der That ergibt sich aus der Formel (144), wenn $\alpha = 90^\circ$ wird, geradezu $w = g$. Hiebei fällt die Bedingung, dass die Bruchfläche für $\varphi = 0$ eintritt, ausnamsweise weg, weil, wenn man in der Gleichung (142) $\alpha = 90^\circ$ setzt, der Werth von $\varDelta$ überhaupt constant wird, also eines Maximums nicht mehr fähig ist, was auch die Relation für $\frac{d\,f(\varphi)}{d\,\varphi}$ beweiset, die dann, wegen $\alpha = 90^\circ$, immer verschwindet, wie auch der Winkel φ gewählt werden mag.

IX. Tabelle*).

$\left[\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2 = \beta$	tg ε, für die innere Wandböschung							
tg α, für die natürliche Erdböschung	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
1·0	0·500	0·420	0·405	0·395	0·383	0·347	0·320	0·281
1·1	0·548	0·468	0·452	0·442	0·430	0·394	0·367	0·327
1·2	0·590	0·511	0·496	0·486	0·474	0·438	0·410	0·370
1·3	0·628	0·550	0·535	0·525	0·513	0·478	0·450	0·410
1·4	0·662	0·586	0·571	0·561	0·549	0·514	0·486	0·447
1·5	0·692	0·618	0·603	0·594	0·582	0·547	0·520	0·481
1·6	0·719	0·646	0·632	0·623	0·611	0·577	0·551	0·512
1·7	0·743	0·672	0·658	0·649	0·638	0·604	0·578	0·540
1·8	0·764	0·695	0·682	0·673	0·662	0·629	0·604	0·567
1·9	0·783	0·716	0·703	0·694	0·683	0·652	0·627	0·591
2·0	0·800	0·735	0·722	0·714	0·703	0·672	0·648	0·613
2·1	0·815	0·752	0·739	0·731	0·721	0·691	0·667	0·633

Ex. Es sei der Erddruck an eine liegende Stützmauer zu berechnen, wenn die Oberfläche des Erdreichs nach der natürlichen Böschung ansteigt, die Cohäsion desselben und die Reibung an der Mauer ausser Betracht bleibt und hiezu folgende Daten bekannt sind:

*) Diese Tabelle hat der Verfasser zuerst in dem österreichischen Baualmanach für das Jahr 1861 veröffentlicht.

Höhe der Mauer .... $H = 30$ Fuss,
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der inneren Mauerböschung .... $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$,
Erdgewicht per Cubikfuss .... $g = 85$ Pfd.,
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der natürlichen Erdböschung .... $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$.

Rechnet man zunächst nach der Formel (144), wozu man jedoch trigonometrische Tafeln benöthigt, so hat man, wegen $\alpha = 51^\circ 47'$, $\varepsilon = 9^\circ 28'$ und $(\alpha - \varepsilon) = 42^\circ 19'$:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\sin 42^\circ 19'}{\cos \ 9^\circ 28'}\right]^2 = 0 \cdot 466.$$

Rechnet man dagegen, ohne derlei Tafeln, nach der Formel (145), so hat man:

$$\frac{w}{g} = \frac{(1 \cdot 27 - \frac{1}{6})^2}{1 + 1 \cdot 27^2} = 0 \cdot 466, \text{ wie zuvor.}$$

Benützt man endlich die Tabelle IX, so wird man, wie folgt, vorgehen:

Für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$ ist:......... $\frac{w}{g} = 0 \cdot 438$,

„ $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 3$ „ $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$ „ :......... $\frac{w}{g} = 0 \cdot 478$,

Differenz: $0 \cdot 1$.............................. $0 \cdot 040$.

Da aber $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$ ist, so findet man durch Interpolation:

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 040 = (1 \cdot 27 - 1 \cdot 20) : x,$$

woraus sich ergibt:

$$x = 0 \cdot 028 \text{ und } \frac{w}{g} = 0 \cdot 438 + x = 0 \cdot 466,$$

somit wieder dasselbe Resultat.

Hiernach erhält man weiter:

$$w = 0 \cdot 466 \, g = 39 \cdot 61 \text{ Pfd.},$$

und nach der Formel (143), worin (laut Tabelle III) $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 \cdot 0138$ zu setzen ist:

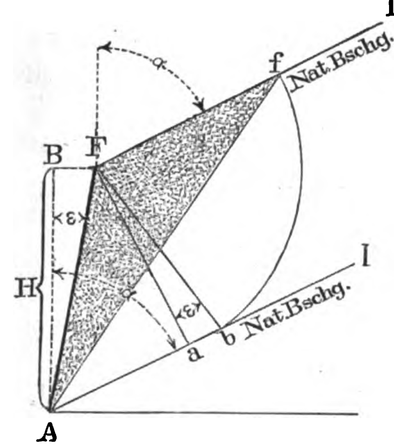
$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 180 \cdot 70 \text{ Ctr.},$$

welcher Druck, wie man aus der Vergleichung dieses Beispieles mit jenem auf Seite 91 angegebenen ersieht, bedeutend grösser ist, als in dem Falle, wenn unter sonst gleichen Umständen die Oberfläche des Erdreiches eine horizontale Begrenzung hat.

Was den Mittelpunkt des Druckes betrifft, so liegt derselbe unter den vorausgesetzten Umständen, wonach die Grösse des Druckes mit dem Quadrate der Stützwandhöhe zu- und abnimmt, in dem dritten Theile dieser Höhe, von unten an gerechnet.

Uebergehend auf die grafische Darstellung der Wirkung des in Rede stehenden Erddruckes, so kann man wieder unterscheiden, ob es sich hiebei darum handelt, die verhältnissmässige Zuname des Druckes von oben nach unten, oder aber die Grösse des Druckes selbst durch das Gewicht eines Erdprisma's anschaulich zu machen.

Fig. 55.



In ersterer Beziehung können auch dermalen die für die hydrostatischen Verhältnisse gegebenen Figuren 12 und 13 als Grundlage dienen, weil, wie zuvor bemerkt, der hier in Betracht kommende Erddruck, eben so wie der hydrostatische Druck, von dem Quadrate der Druckhöhe abhängt.

In der zweiten Beziehung dagegen gibt die in der Fig. 55 angedeutete Construction Aufschluss, in welcher nämlich das punktirte Erdprisma AFf dem Gewichte nach den oben mit D bezeichneten Erddruck vorstellt. Dieses Erdprisma wird auf folgende Art gefunden:

Sind $\overline{AI}$ und $\overline{FI}$ nach der natürlichen Erdböschung gerichtet, so hat man

$$\overline{Fa} \perp \overline{AI}, \ \sphericalangle aFb = \varepsilon \text{ und } \overline{Fb} = \overline{Ff}$$

zu machen, hierauf aber $\overline{Af}$ zu ziehen; denn es ist:

$$\overline{AF} = \frac{H}{\cos\varepsilon}, \ \overline{aF} = \overline{AF}\sin(\alpha - \varepsilon) = \frac{H\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon},$$

$$\overline{Ff} = \overline{Fb} = \frac{\overline{aF}}{\cos\varepsilon} = \frac{H \sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2\varepsilon},$$

$$\triangle AFf = \tfrac{1}{2}\,\overline{Fa}\,.\,\overline{Ff} = \tfrac{1}{2} H^2 \frac{\sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos^3\varepsilon} = \tfrac{1}{2} \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2,$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prisma's } AFf\end{array}\right\} = g \cdot \triangle AFf = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2,$$

also in der That eben so gross, wie der in der Formel (143) bezifferte Erddruck, wodurch die Richtigkeit der vorbeschriebenen Construction nachgewiesen erscheint.

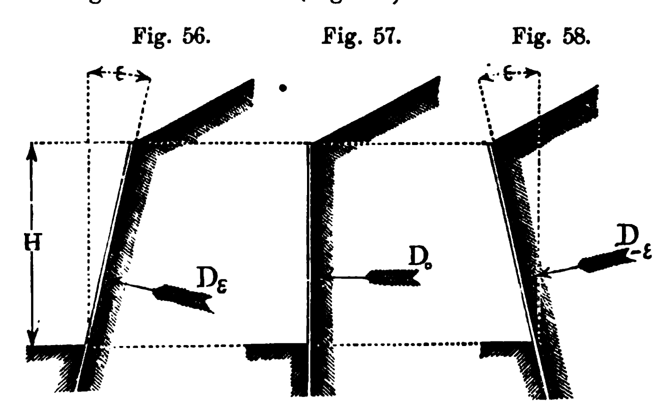
Für eine verticale Stützwand ist $\varepsilon = 0$, und die Construction wird insoferne einfacher, als hiebei der Punkt b auf a fällt, und dieserwegen blos $\overline{Ff} = \overline{Fa}$ zu machen ist.

§. 39.

Einfluss der Richtung der Stützwand auf die Grösse des Erddruckes. Unter übrigens gleichen Umständen ist der bezügliche Erddruck, und zwar:

An eine liegende Stützwand (Fig. 56):

Fig. 56. Fig. 57. Fig. 58.



$$D_\varepsilon = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2;$$

an eine lothrechte (Fig. 57):

$$D_0 = \tfrac{1}{2} g H^2 \sin^2\alpha;$$

und an eine überhängende (Fig. 58):

$$D_{-\varepsilon} = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2.$$

Hiernach ergibt sich insbesondere:

$$D_\varepsilon : D_{-\varepsilon} = \sin^2(\alpha - \varepsilon) : \sin^2(\alpha + \varepsilon),$$

oder:

$$D_{-\varepsilon} = \left[\frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\sin(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 D_\varepsilon = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon}\right)^2 D_\varepsilon \;\ldots\ldots\; (148),$$

also dieselbe Relation, wie in (106), so dass es in Bezug auf das gegenseitige Verhältniss keinen Unterschied macht, ob das Erdreich oben horizontal begrenzt ist, oder nach der natürlichen Böschung ansteigt, was jedenfalls bemerkenswerth ist.

Auch findet, wie in (108), die weitere Relation statt:

$$D_\varepsilon < D_0 < D_{-\varepsilon} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (149),$$

was in ähnlicher Weise, wie im §. 29, lit. A, bewiesen werden kann.

Fig. 59.

Nimmt man, um einen anderen Interesse gewährenden Vergleich durchzuführen, an, es soll an einer Berglehne, welche nach der natürlichen Böschung ansteigt, eine Wandmauer errichtet werden, so kann man die Richtung der gedrückten Mauerfläche (Fig. 59) sehr verschieden wählen (z. B. $\overline{1A}$, $\overline{2A}$, $\overline{3A}$, $\overline{4A}$), und demzufolge die Frage stellen, bei welcher Richtung der Erddruck am kleinsten ausfällt. Zur Beantwortung dieser Frage betrachte man den Neigungswinkel ε der Wand (Fig. 60) als va-

riabel, fälle von A das Perpendikel P auf die Böschungslinie der Berglehne, und beachte, dass man jetzt folgende Relationen erhält:

$$\overline{AB} = H = \overline{AF} \cos \varepsilon, \; \overline{AF} = \frac{P}{\sin(\alpha - \varepsilon)} \text{ und } H = P \frac{\cos \varepsilon}{\sin(\alpha - \varepsilon)};$$

hiernach aber für den Erddruck:

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}\right]^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{P^2}{\cos \varepsilon} \dots\dots (150).$$

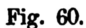
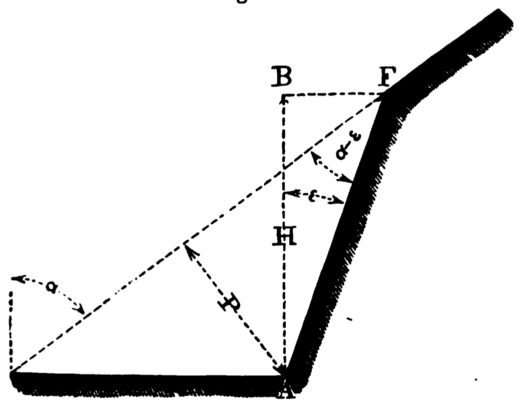


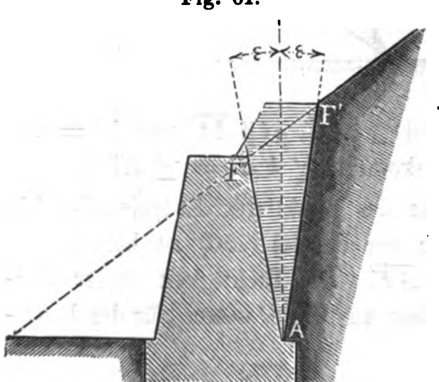
Fig. 60.



Da P constant ist, so kommt der kleinste Werth von D für $\varepsilon = 0$ zum Vorschein; denn dann ist:

$$D = \tfrac{1}{2} g P^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (151).$$

Fig. 61.



Unter allen Wandmauern, welche nach der obigen Anordnung möglich sind, wird daher diejenige den kleinsten Erddruck erleiden, deren rückwärtige Fläche vertical ist.

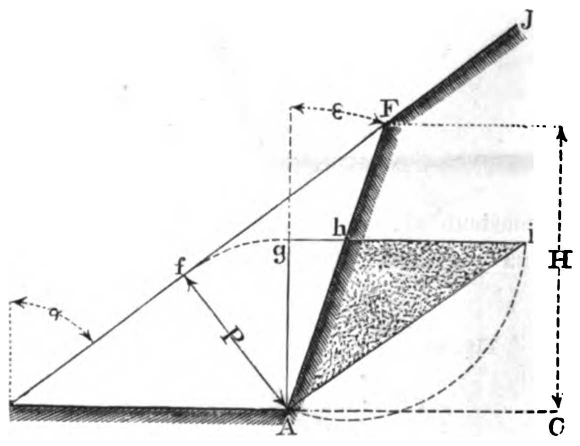
Die Formel (150) ist noch insoferne bemerkenswerth, als die Grösse des Erddruckes dieselbe bleibt, ob ε positiv oder negativ

genommen wird. Hiernach ist der Erddruck auf die Wandfläche $\overline{AF'}$ (Fig. 61) eben so gross, wie jener auf die entgegengesetzt geneigte Wandfläche $\overline{AF''}$, vorausgesetzt, dass der Neigungswinkel beider Wandflächen numerisch genommen einerlei Grösse hat.

Die besprochene Gleichung enthält übrigens genau das hydrostatische Gesetz, wenn man P als verticale Höhe der Wand, ε als Neigungswinkel derselben gegen das Loth, und g als Gewicht der eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit annimmt. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung kann man den bezüglichen Erddruck auch auf folgende Weise grafisch darstellen.

Man construire (Fig. 62):

Fig. 62.



$\overline{Af} = P \perp \overline{FJ}$, $\overline{Ag} = P$ und $\perp \overline{AC}$, $\overline{gi} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{hi} = \overline{Ah}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\measuredangle\, hAi = \measuredangle\, iAC$.

Sodann ist das Gewicht des punktirten Erdprisma's Ahi eben so gross, wie der nach der Formel (150) zu berechnende Erddruck D auf die Wand $\overline{AF}$. Die Richtigkeit dieser Darstellung ergibt sich unmittelbar aus den Gesetzen für den hydrostatischen Druck.

Drittes Capitel.

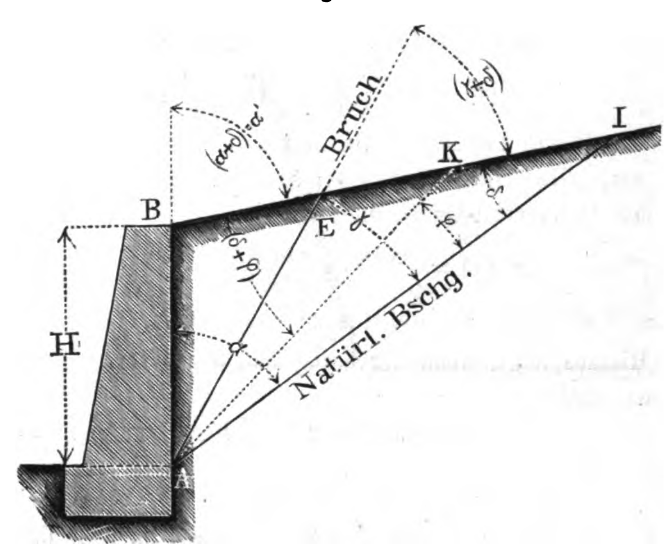
Erddruck an eine verticale Stützwand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich, von der Wandkrone an, nach einer beliebigen Richtung ansteigt, welche mit der] natürlichen Erdböschung den Winkel δ einschliesst.

§. 40.

Grösse des Erddruckes und Mittelpunkt desselben in diesem Falle. Um die Grösse des bezüglichen Erddruckes an die Stützwand aufzufinden, und zwar mit Beiseitelassung der allfälligen Cohäsion des Erdreiches, hat man die Formel (78) für $c = 0$ und $\varepsilon = 0$ zu benützen, und hiernach zu setzen:

$$D = \max \varDelta = \max (X \operatorname{tg} \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (152),$$

Fig. 63.



worin mit Bezug auf die Figur 63:

$$X = \left\{ \begin{matrix} \text{Gewicht des Erd-} \\ \text{prisma's } ABK \end{matrix} \right\} = g \cdot \triangle ABK$$

zu substituiren kommt.

Es ist aber:

$$\triangle ABK = \tfrac{1}{2}\,\overline{AB}\,.\,\overline{AK}\,.\sin \measuredangle BAK,$$

also wegen:

$\overline{AB} = H, \overline{AK} = \overline{AB}\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\delta+\varphi)}$ und $\measuredangle BAK = (\alpha - \varphi)$ insbesondere:

$$\triangle ABK = \tfrac{1}{2} H^2 \sin(\alpha+\delta)\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)},$$

$$X = \tfrac{1}{2} g\, H^2 \sin(\alpha+\delta)\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)},$$

und:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} g\, H^2 \sin(\alpha+\delta)\frac{\sin(\alpha-\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{\sin(\delta+\varphi)} \ldots\ldots (153).$$

Der variable Theil dieses Ausdruckes heisst:

$$F(\varphi) = \frac{\sin(\alpha-\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{\sin(\delta+\varphi)} = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\varphi}\right)\operatorname{tg}\varphi$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\delta}\left(\frac{a-x}{b-x}\right)x = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta} f(x),$$

wenn man, der Kürze halber, vorläufig setzt:

$$\operatorname{tg}\alpha = a,\ \operatorname{tg}\delta = b,\ \operatorname{tg}\varphi = x, \text{ und}$$

$$f(x) = \left(\frac{a-x}{b+x}\right)x = \left(\frac{ax-x^2}{b+x}\right) \ldots\ldots\ldots (154).$$

Der Werth für $\varDelta$ soll ein Maximum werden, dies ist der Fall, wenn $f(x)$ ein solches wird; somit hat man zu diesem Behufe den Differential-Quotienten:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{b(a+b)}{(b+x)^2} - 1$$

für den Fall seines Nullwerdens zu untersuchen.

Hieraus folgt, wenn der bezügliche Werth von x mit x' bezeichnet wird:

$$(b+x')^2 = b(a+b),$$

also:

$$x' = -b + \sqrt{b(a+b)} \ldots\ldots\ldots\ldots (155),$$

weil von dem Doppelzeichen der Wurzelgrösse offenbar dasjenige zu wählen ist, wofür der Werth von x' positiv wird.

Indem nun allgemein $x = \operatorname{tg}\varphi$ war, so hat man insbesondere $x' = \operatorname{tg}\gamma$, weil nämlich der dazu gehörige Werth von φ den mit γ bezeichneten Bruchwinkel vorstellt; somit ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= -b + \sqrt{b(a+b)} = \sqrt{b}\,[\sqrt{a+b} - \sqrt{b}] \\ &= -\operatorname{tg}\delta + \sqrt{\operatorname{tg}\delta\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta)} \\ &= \sqrt{\operatorname{tg}\delta}\,[\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta} - \sqrt{\operatorname{tg}\delta}] \end{aligned}\right\}\ldots(156).$$

Dieser Werth begründet in der That das Maximum von $\varDelta$, weil der zweite Differential-Quotient allgemein:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{d x^2} = -\frac{2b(a+b)}{(b+x)^4},$$

also für $x = x'$ insbesondere:

$$f''(x') = -\frac{2}{\sqrt{b(a+b)}},$$

somit negativ wird, wie es für das Maximum von $f(x)$, beziehungsweise von $\varDelta$ sein soll.

Als Controle für die Richtigkeit des erhaltenen Werthes von $\operatorname{tg}\gamma$ kann man die Betrachtung benützen, dass die bereits bekannten einfacheren Fälle, wo die Erdanschüttung hinter der Stützwand einmal horizontal begrenzt ist, und das andere Mal nach der natürlichen Böschung ansteigt, in dem jetzt behandelten allgemeineren Falle enthalten sein müssen.

In der That findet man aus der Relation (156) einerseits, nämlich für eine horizontale Erdreich-Oberfläche, wegen der damit zusammenhängenden Bedingung $(\alpha + \delta) = 90^0$ oder $\delta = (90^0 - \alpha)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= -\operatorname{cotg}\alpha + \sqrt{\operatorname{cotg}\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)} \\ &= -\operatorname{cotg}\alpha + \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha} \\ &= \left(\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

also übereinstimmend mit der Formel (87), da hier $\varepsilon = 0$ ist:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2};$$

andererseits aber für den Fall der natürlichen Ansteigung der Erdreich-Oberfläche, wegen $\delta = 0$, auch $\gamma = 0$, was gleichfalls mit dem diesbezüglichen früheren Ergebnisse (§. 38) im Einklange steht.

Die erwähnten zwei Specialfälle für $\delta = (90^0 - \alpha)$ und für $\delta = 0$ bilden die Grenzen, zwischen welchen die sonstigen Fälle

für eine beliebige Ansteigung der Erdreich-Oberfläche hinter der Stützwand gelegen sind.

In dem ersten Grenzfalle halbirt die Bruchfläche im Erdreiche den Winkel zwischen der natürlichen Erdböschung und der Stützwand, im zweiten dagegen fällt dieselbe mit der natürlichen Erdböschung zusammen; hieraus, und in Folge der näheren Untersuchung der Gleichung (156) schliesst man, dass der Bruchwinkel γ immer kleiner wird, je mehr sich die von der Wandkrone ansteigende Erdböschung der natürlichen nähert. Es bestehen daher für die innerhalb der angedeuteten Grenzen gelegenen Zwischenfälle die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}(90^0 - \alpha) > \delta > 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\alpha}{2} > \gamma > 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} (157).$$

In der Regel ist nicht der Winkel δ, sondern das Böschungsverhältniss für die Erdfläche $\overline{BJ}$ gegeben; dann ist zunächst nur $\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \delta)$ bekannt, es kann aber hieraus, und weil auch $\operatorname{tg}\alpha$ gegeben ist, $\operatorname{tg}\delta$ leicht berechnet werden; denn man hat sodann wegen $\delta = (\alpha' - \alpha)$:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}\right).$$

Ex. Ist $\operatorname{tg}\alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \delta) = 4\frac{1}{4}$ (das Erdreich steigt also hinter der Stützwand, wie man zu sagen pflegt, nach einer $4\frac{1}{4}$ füssigen Böschung an), so findet man:

$$\operatorname{tg}\delta = \tfrac{1}{4}, \text{ somit } \operatorname{tg}\gamma = -0 \cdot 5 + \sqrt{0 \cdot 85} = 0 \cdot 422$$

$$\text{und } \gamma = 22^\circ\, 52' < \frac{\alpha}{2} = 25^\circ\, 6', \text{ weil } \alpha = 50^\circ\, 12' \text{ ist.}$$

Die Bruchfläche des untersuchten Falles lässt sich auch in grafischer Weise ohne Schwierigkeit finden.

Man construire nämlich (Fig. 64) $\overline{AJ'} \parallel \overline{BJ}$, $\overline{Bb} \perp \overline{AJ}$, über $\overline{Bb}$ als Durchmesser einen Halbkreis, endlich $\overline{bd} = \overline{bc}$; sodann ist die durch d gezogene Gerade $\overline{AE}$ die gesuchte Bruchrichtung und der punktirte Erdkörper ABE das Bruchprisma.

Beweis.

$$\overline{aB} = \overline{Aa}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,\ \overline{ab} = \overline{Aa}\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

$$\overline{aB} + \overline{ab} = \overline{Bb} = \overline{Aa}\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\delta),$$

$$\overline{bc} = \sqrt{\overline{Bb}\,.\,\overline{ab}} = \overline{Aa}\sqrt{\mathrm{tg}\,\delta\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\delta)},$$

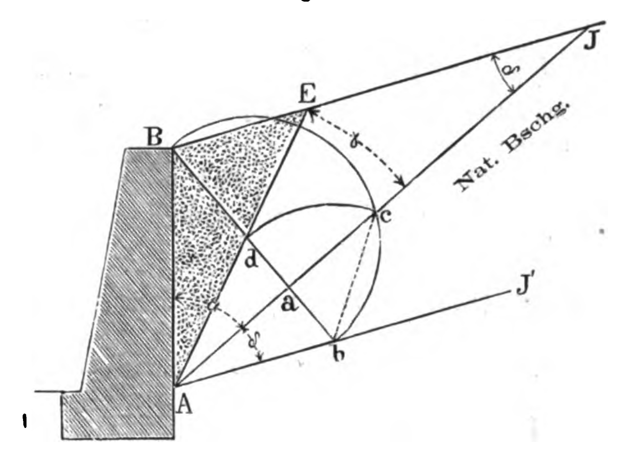
$$\overline{ad} = \overline{bd} - \overline{ab} = \overline{bc} - \overline{ab} =$$

$$= \overline{Aa}\,[-\,\mathrm{tg}\,\delta + \sqrt{\mathrm{tg}\,\delta\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\delta)}],$$

$$\mathrm{tg} \measuredangle aAd = \frac{\overline{ad}}{\overline{Aa}} = -\,\mathrm{tg}\,\delta + \sqrt{\mathrm{tg}\,\delta\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\delta)},$$

somit $\measuredangle aAd = \gamma$.

Fig. 64.



Noch ist der Werth von x' aus der Gleichung (155) zurück zu substituiren in die Relationen für $f(x)$, $F(\varphi)$ und Δ, um sofort den Maximalwerth dieser letzteren Grösse und hiedurch den fraglichen Erddruck D zu finden.

In Ausführung dieser Absicht hat man:

$$x' = -\,b + \sqrt{b\,(a+b)} = \sqrt{b}\quad(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}),$$

$$a - x' = a + b - \sqrt{b\,(a+b)} = \sqrt{a+b}\,(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}),$$

$$b + x' = \sqrt{b\,(a+b)},\ \text{daher:}$$

$$f\,(x = x') = \frac{(a - x')\,x'}{(b + x')} = (\sqrt{a+b} - \sqrt{b})^2,$$

und:

$$F(\varphi = \gamma) = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta} f(x') = \frac{\cos\alpha}{\cos\delta} (\sqrt{a+b} - \sqrt{b})^2,$$

nach der Gleichung (153) aber:

$$\max \varDelta = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha+\delta)\cos\alpha}{\cos\delta} (\sqrt{a+b} - \sqrt{b})^2,$$

womit der Werth von $D = \max \varDelta$ hergestellt ist. Setzt man anstatt a und b die entsprechenden Winkeltangenten $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\delta$, so erhält man:

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha+\delta)\cos\alpha}{\cos\delta} (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta} - \sqrt{\operatorname{tg}\delta})^2 \ldots . (158).$$

oder, wenn man, um ohne Zuhilfename von trigonometrischen Tafeln zu rechnen, auch den Factor $\frac{\sin(\alpha+\delta)\cos\alpha}{\cos\delta}$ als eine Function von $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\delta$ ausdrückt:

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right) (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta} - \sqrt{\operatorname{tg}\delta})^2 \ldots\ldots (159),$$

indem man nämlich beachtet, dass man schreiben kann:

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)\cos\alpha}{\cos\delta} = \frac{(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta)\cos\alpha}{\cos\delta}$$
$$= \cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta)$$
$$= \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right).$$

Die Formel (159) enthält das hydrostatische Gesetz, denn es ist:

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (160),$$

wobei:

$$w = g\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right) (\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta} - \sqrt{\operatorname{tg}\delta})^2 \ldots\ldots (161)$$

das Gewicht per Kubikeinheit derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche denselben Druck, wie das Erdreich, erzeugt.

Ex. Für das vorhin angegebene Beispiel hat man: $\operatorname{tg}\alpha = 1{\cdot}2$, $\operatorname{tg}\delta = 0{\cdot}5$, und wenn man noch $g = 75$ Pfd., $H = 30'$ annimmt, so findet man:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{1{\cdot}2 + 0{\cdot}5}{1 + 1{\cdot}44}\right) (\sqrt{1{\cdot}2 + 0{\cdot}5} - \sqrt{0{\cdot}5})^2$$
$$= \frac{17}{244} (\sqrt{17} - \sqrt{5})^2 = \frac{17}{122} (11 - \sqrt{85}) = 0{\cdot}248,$$

$w = 0{\cdot}248\, g = 18{\cdot}6$ Pfd.,

$D = \tfrac{1}{2} w H^2 = 83{\cdot}7$ Ctr.

Zur bequemeren Bestimmung ist nachstehend eine Tabelle beigefügt, welche für verschiedene Werthe von $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \varepsilon$ die entsprechenden Resultate für $\frac{w}{g}$ enthält.

X. Tabelle.

Natürliches Böschungsverhältnis: $\operatorname{tg} \alpha$ \ δ / α	Werthe für $\operatorname{tg} \delta$										
	0	0·1	0·2	0·3	0 4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
1·0	0·500	0·295	0·252	0·228	0·212	0·201	0·192	0·186	0·180	0·175	0·172
1·1	0·548	0·330	0·282	0·256	0·238	0 225	0·216	0·208	0·201	0·196	
1·2	0·590	0·362	0·311	0·282	0·262	0·248	0·237	0·229	0·222		
1·3	0·628	0·391	0·337	0·306	0·285	0·269	0·258	0·248			
1·4	0·662	0·418	0·361	0·328	0·306	0·289	0·276	0·266			
1·5	0·692	0·443	0·384	0·349	0·325	0·307	0·294				
1·6	0·719	0·466	0·404	0·368	0·343	0·325	0·310				
1·7	0·743	0·487	0·424	0·386	0 360	0·341					
1·8	0·764	0·506	0·441	0.402	0·375	0·355					
1·9	0·783	0·523	0·457	0·418	0·390	0·369					
2·0	0·800	0·539	0·472	0·432	0·403	0·382					
2·1	0·815	0·554	0·486	0·445	0·416						

$$\operatorname{tg} \alpha = a, \quad \operatorname{tg} \delta = b,$$

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{a+b}{1+a^2}\right) \left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^2,$$

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2.$$

Bei dem Gebrauche dieser Tabelle hat man selbstverständlich, insoferne hierin die Werthe von $\operatorname{tg}\alpha$ oder $\operatorname{tg}\delta$ nicht genau enthalten sind, das bekannte Interpolationsverfahren einzuschlagen.

Auch hier kann man zur Controle untersuchen, ob in der Formel (161) die Resultate für die zwei einfacheren Fälle enthalten sind, indem nämlich die Oberfläche des Erdreichs in dem einen Falle horizontal ist, in dem anderen Falle aber nach der natürlichen Böschung ansteigt.

In der That findet man für diesen, wegen $\delta = 0$, übereinstimmend mit der Gleichung (146):

$$\frac{w}{g} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin^2\alpha;$$

für jenen aber, wegen $\delta = (90^0 - \alpha)$, zunächst:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{cotg}\alpha}\right)^2,$$

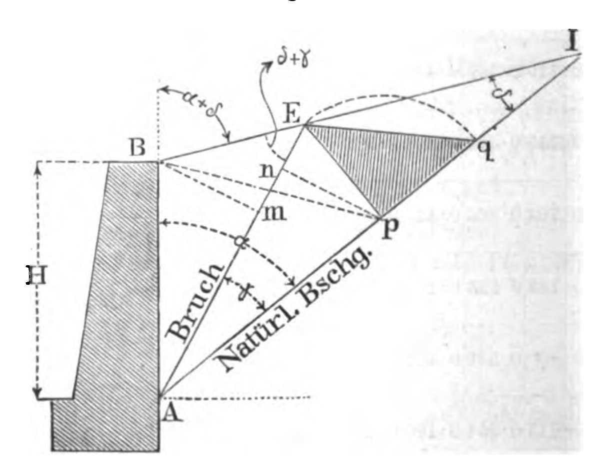
und nach durchgeführter Reduction:

$$w = g \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

also so, wie in der Formel (96).

Die in der Formel (159) dargestellte Grösse des Erddruckes kann man auch grafisch finden, und zwar durch das Gewicht

Fig. 65.



des Erdprisma's Epq (Fig. 65), welches in folgender Weise construirt wird.

Man suche die Bruchebene $\overline{AE}$, wie in Fig. 64, fälle von E aus auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$ das Perpendikel $\overline{Ep}$, mache $\overline{pq} = \overline{Ep}$, und ziehe $\overline{Eq}$; das schraffirte Dreieck Epq gibt sodann das Profil eines Erdprisma's, dessen Gewicht so gross ist, wie die Intension des Erddruckes D.

Beweis.

Vorerst wird behauptet, dass die beiden Dreiecke ABE und AEp einander gleich sind. Denn man hat, wenn $\overline{Bm}$ und $\overline{np}$ die Dreieckshöhen sind:

$$\triangle ABE : \triangle AEp = \overline{Bm} : \overline{np}$$
$$= H \sin(\alpha - \gamma) : \overline{Ap} \,.\, \sin\gamma.$$

Nun ist aber:

$$\overline{Ap} = \overline{AE} \cos\gamma = H \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\delta + \gamma)} \cos\gamma,$$

daher auch:

$$\triangle ABE : \triangle AEp = \sin(\alpha - \gamma)\sin(\delta + \gamma) : \sin\gamma\cos\gamma\sin(\alpha + \delta)$$
$$= (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\gamma) : \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta)$$
$$= (a - x')(b + x') : x'(a + b),$$

indem man wieder die früheren Abkürzungswerthe: $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\delta = b$ und $\operatorname{tg}\gamma = x'$ einführt.

Berücksichtigt man jetzt den für x' gefundenen Werth in der Gleichung (155), so ergibt sich, dass in der vorstehenden Proportion das dritte und das vierte Glied einander gleich sind, somit haben auch die ersten zwei Glieder einerlei Werth, d. h.:

$$\triangle ABE = \triangle AEp,$$

was zunächst zu beweisen war.

Weiter erhält man:

$$\triangle Epq : \triangle AEp = \overline{pq} : \overline{Ap}$$
$$= \overline{Ep} : \overline{Ap}$$
$$= \operatorname{tg}\gamma : 1.$$

Nach der Gleichung (152) ist aber:

$$D = \max \varDelta = \max(X \operatorname{tg}\varphi),$$

oder, da dieses Maximum für $\varphi = \gamma$ und $X = G$ entsteht, auch:

$$D = G \operatorname{tg} \gamma,$$

d. h.:

$$D : G = \operatorname{tg} \gamma : 1;$$

wonach sich ergibt:

$$\begin{aligned} D : G &= \triangle Epq : \triangle AEp \\ &= g.\triangle Epq : g.\triangle AEp \\ &= g.\triangle Epq : g.\triangle ABE. \end{aligned}$$

Indem nun G das Gewicht des Bruchprisma's bedeutet, also:

$$G = g.\triangle ABE$$

zu setzen ist, folgt schliesslich:

$$D = g.\triangle Epq,$$

welcher Werth in der That das Gewicht des schraffirten Erdkörpers repräsentirt, somit die Richtigkeit der obigen Construction dargethan ist.

Zugleich geht aus dieser Untersuchung hervor, dass die beiden Dreieckshöhen $\overline{Bm}$ und $\overline{np}$ gleich gross sein müssen, welche Eigenschaft zugleich zur Controle für die richtige Lage der Bruchfläche $\overline{AE}$ benützt werden kann. Hiebei ist übrigens nicht nothwendig, diese Höhen thatsächlich zu zeichnen; es genügt offenbar, blos die Vierecksdiagonale $\overline{Bp}$ zu ziehen und nachzusehen, ob diese durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ (zweite Vierecksdiagonale) halbirt wird.

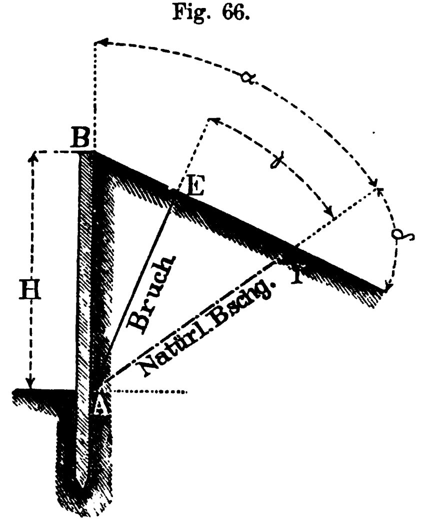
Was endlich den Mittelpunkt des Druckes betrifft, so muss derselbe, weil die Gleichung für die Grösse des Erddruckes unter der Form $D = kH^2$ erscheint, wobei k ein von der Druckhöhe H unabhängiger Coefficient ist, ebenfalls, wie in den Fällen der vorhergehenden zwei Capitel, insoferne die Erdcohäsion überall gleich Null angenommen wird, in dem dritten Theile der Druckhöhe, von unten an gerechnet, liegen.

§. 41.

Uebergang auf den Fall, wenn die Oberfläche des Erdreiches, von der Wandkrone angefangen, nach

rückwärts abfällt. Dieser in der Fig. 66 dargestellte Fall entsteht für $\delta > (90^0 - \alpha)$, wobei δ so lange zunehmen kann, bis die Böschung $\overline{BI}$ zur natürlichen wird, für welchen Grenzfall das $\triangle ABI$ die gleichen Schenkel $\overline{AI}$ und $\overline{BI}$ erhält, und hiernach der $\measuredangle\ \delta = (180^0 - 2\alpha) = 2(90^0 - \alpha)$ ist.

Fig. 66.



Die in dem vorhergehenden §. enthaltenen Formeln und Constructionsregeln finden auch gegenwärtig Anwendung, wie dies die folgende Figur 67 zeigt, in welcher — wie in den Figuren 64 und 65 — einerseits der Bruchwinkel γ, und andererseits der Erddruck D (dargestellt durch das Gewicht eines Erdprismas) construirt erscheint. Es ist nämlich:

$$\measuredangle\ dAa = \text{Bruchwinkel } \gamma,$$

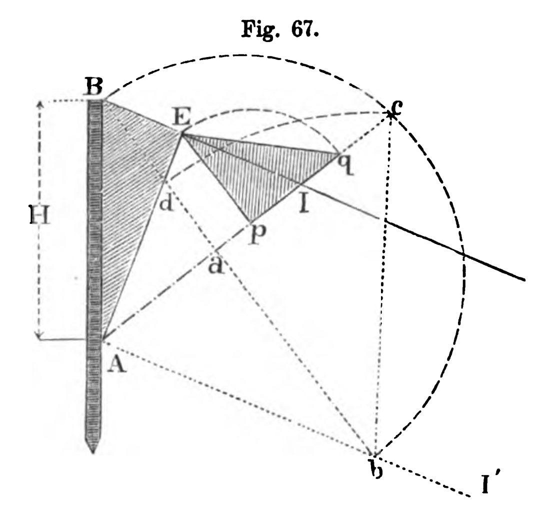
$$\left.\begin{array}{r}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } Epq\end{array}\right\} = g \cdot \triangle Epq = \text{Erddruck } D.$$

Der Bruchwinkel γ ist, wie man durch eine nähere Untersuchung findet, dermalen — im Gegensatze zu dem Resultate im vorigen §. — grösser, als $\frac{\alpha}{2}$.

Für den obbezeichneten Grenzfall, in welchem $\delta = (180^0 - 2\alpha)$ ist, hat man insbesondere nach der Gleichung (156), indem man dort $\operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg} 2\alpha$ substituirt:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha + \sqrt{-\operatorname{tg} 2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)}$$
$$= \operatorname{tg} 2\alpha - \sqrt{\operatorname{tg} 2\alpha\,(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}$$
$$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$
$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{2}}{\cos 2\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha\,(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2})}{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}}, \text{ oder:}$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 45^\circ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (162).$$

Fig. 67.



Um $\operatorname{tg}\gamma$ als Function von $\operatorname{tg}\alpha$ darzustellen, kann man schreiben:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (163).$$

Die Grösse des bezüglichen Erddruckes erhält man aus den Gleichungen (160) und (161), wenn man in letzterer ebenfalls $\operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg} 2\alpha$ substituirt. Geschieht dieses, so findet man nach durchgeführter Reduction:

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\gamma, \text{ also: } w = \frac{1}{2} g \operatorname{tg}^2\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (164^*),$$

*) Allgemein ist nach der Relation (156):

$$[\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta} - \sqrt{\operatorname{tg}\delta}]^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\operatorname{tg}\delta},$$

und hiernach:

$$D = \frac{1}{2} w H^2 = \frac{1}{4} g H^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (165).$$

Ex. Für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ (also $\alpha = 50° 12'$), $H = 10$ Fuss und $g = 80$ Pfd. findet man:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{6}{11} (\sqrt{122} - 10) = 0 \cdot 570, \text{ somit:}$$

$$\gamma = 29° 41' > \frac{\alpha}{2} = 25° 6'; \text{ ferner:}$$

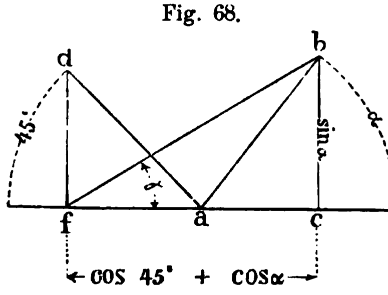
$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 162, \; w = 0 \cdot 162 \, g = 12 \cdot 96 \text{ Pfd.,}$$

und:

$$D = \frac{1}{2} w H^2 = 6 \cdot 48 \text{ Ctr.}$$

Der in der Formel (162) dargestellte Bruchwinkel γ kann entweder nach der allgemeinen Regel, wie in der Figur 67, oder aber, insoferne jetzt ein besonderer Fall vorliegt, einfacher gefunden werden, wie folgt:

Fig. 68.



Man zeichne nämlich die zwei Winkel α und 45^0 so neben einander auf, wie es in der Figur 68 ersichtlich ist, und construire unter Zugrundelegung irgend eines als Masseinheit geltenden Halbmessers $(\overline{ab} = \overline{ad})$ sowol den Sinus als auch den Cosinus beider Winkel, so dass man erhält:

$$\overline{bc} = \sin \alpha \qquad \overline{df} = \sin 45^0$$
$$\overline{ac} = \cos \alpha \qquad \overline{af} = \cos 45^0.$$

---

daher zu Folge der Gleichung (161):

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{\operatorname{tg} \delta},$$

und, indem man jetzt $\operatorname{tg} \delta = - \operatorname{tg} 2 \alpha$ setzt, insbesondere:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\operatorname{tg} 2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{\operatorname{tg} 2 \alpha} = \cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \cos 2 \alpha} \cdot \frac{\cos 2 \alpha}{\sin 2 \alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma$$
$$= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2 \alpha} \operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Hiernach folgt:

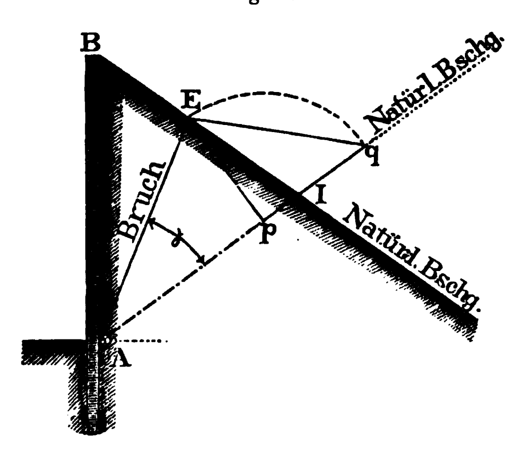
$$\operatorname{tg} \measuredangle bfc = \frac{\overline{bc}}{\overline{cf}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 45^0},$$

also, indem man die Relation (162) beachtet:

$$\measuredangle bfc = \text{Bruchwinkel } \gamma.$$

Wird der so gefundene Bruchwinkel (Fig. 69) gehörig aufgetragen, nämlich $\measuredangle EAI = \gamma$ gemacht, so erhält man zunächst die Bruchfläche $\overline{AE}$; und, indem man noch $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$, ferner $\overline{pq} = \overline{Ep}$ zeichnet, ergibt sich sofort das $\triangle Epq$, als das Profil

Fig. 69.



desjenigen Prismas, welchem, aus dem betreffenden Erdmateriale bestehend gedacht, ein Gewicht zukommt, eben so gross, wie die Intension des Erddruckes an die Stützwand $\overline{AB}$, so dass man setzen kann: $D = g \cdot \triangle Epq$.

§. 42.

Vergleichung zwischen den Werthen für den Erddruck an eine verticale Stützwand bei verschiedenen Richtungen der Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales. Behufs einer solchen Vergleichung braucht man nur den Winkel δ, beziehungsweise α', in der Figur 63 variiren zu lassen, während alles Uebrige unverändert bleibt.

Die Grenzen, innerhalb welchen sich der Winkel δ bewegen kann, sind 0 und $(180^0 - 2\alpha)$, jene für die Veränderung des Winkels α' aber, wegen $\alpha' = (\alpha + \delta)$, einerseits α und andererseits $(180^0 - \alpha)$, wobei die obere Grenze entsteht, wenn von der Stützwandkrone angefangen das Erdreich nach der natürlichen Böschung ansteigt, die untere dagegen, wenn es von dort nach derselben Böschung abfällt. Die horizontale Begrenzung der Erdmasse liegt in der Mitte zwischen beiden Grenzen, und es ist hiefür $\delta = (90^0 - \alpha)$ und $\alpha' = 90^0$.

Man findet leicht, dass mit der Zuname von δ, beziehungsweise von α' der Erddruck unter sonst gleichen Umständen abnimmt.

Um dies beispielsweise zu erläutern, setze man $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, und betrachte folgende fünf Fälle:

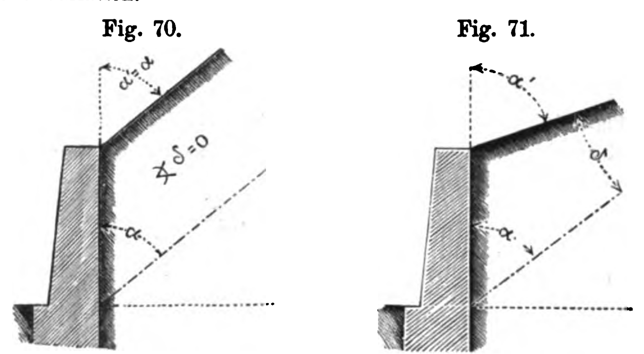
I.

(Fig. 70.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt nach der natürlichen Böschung an. Hier ist nach der Tabelle X (für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \delta = 0$) oder auch nach der Tabelle IX (für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$):

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 590.$$

Dieser Fall bezeichnet die Eine (obere) Grenze in Bezug auf die vorbemerkte Variation.

Fig. 70. Fig. 71.



II.

(Fig. 71.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt etwas sanfter an, so dass das Verhältniss zwischen der Anlage und Höhe der bezüglichen Böschung, das Doppelte von jenem des I. Falles (also $\operatorname{tg} \alpha' = 2 \operatorname{tg} \alpha$) beträgt.

Hier ist $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, $\operatorname{tg} \alpha' = 2 \cdot 4$, und wegen

$\delta = (\alpha' - \alpha)$, $\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{30}{97}$, somit erhält man entweder auf Grundlage der Tabelle X im Wege des Interpolirens, oder nach Formel (161):

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 280.$$

III.

(Fig. 72.) Die Oberfläche des Erdreiches ist horizontal. Jetzt ist $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{5}{6}$, und man kann entweder, wie vorhin, oder, was bequemer ist, so verfahren, dass man auf das erste Capitel des laufenden Abschnittes zurückblickt, und die dortige Formel (98) oder die Tabelle VI, für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$, berücksichtiget. Hiernach findet man:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 219.$$

Fig. 72.

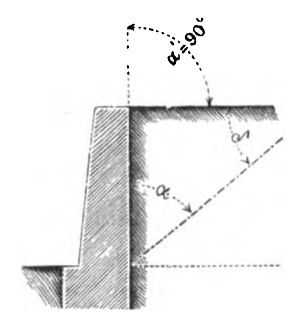
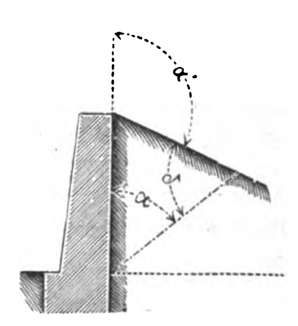


Fig. 73.



IV.

(Fig. 73.) Die Oberfläche des Erdreiches ist nach rückwärts abfallend, und zwar soll das Gefälle eben so gross sein, wie die ~~Neigung~~ Steigung in der Figur 71. Nunmehr hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2, \ \operatorname{tg} \alpha' = -2 \cdot 4 \text{ und } \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{90}{47},$$

also, indem man die Rechnung nach der Formel (161) durchführt:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 186.$$

V.

(Fig. 74). Die Oberfläche des Erdreiches fällt nach der natürlichen Böschung ab. Dann ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2, \ \operatorname{tg} \alpha' = -1 \cdot 2 \text{ und } \operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{60}{11} = 5^{5}/_{11},$$

und man kann entweder wieder nach der Formel (161), oder, was hier vorzuziehen ist, nach den Gleichungen (163) und (164) die Berechnung vornehmen. Auf die letztere Art wurde dasselbe Beispiel bereits vor dem Schlusse des §. 41 durchgeführt, daher hat man, wie dort, auch hier:

Fig. 74.

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 162.$$

Dieser Fall bezeichnet die zweite (untere) Grenze in Bezug auf die vorbesprochene Variation.

Ueberall ist g das Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches, und w zeigt dasjenige Einheitsgewicht an, welches einer tropfbaren Flüssigkeit zukommen müsste, die auf die Stützwand denselben Druck ausüben würde, wie das Erdreich unter den jedesmaligen Umständen, wobei natürlicher Weise die Oberfläche der eingebildeten Flüssigkeit stets horizontal sich vorzustellen ist.

Da der Erddruck in den verglichenen Fällen immer durch die Formel $D = \frac{1}{2} w H^2$ ausgedrückt erscheint, so verändert sich die Grösse desselben geradezu in demselben Verhältnisse, wie jenes Einheitsgewicht w. Man wird daher schliessen, dass die Grösse des Erddrucks in den verglichenen fünf Fällen in folgender Weise abnimmt:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
590	:	280	:	219	:	186	:	162.

Stellt man das dritte Glied, welches auf die horizontale Oberfläche des Erdreichs Bezug nimmt, als Einheit dar, indem man nämlich durchgehends durch 219 dividirt, so erhält man folgendes Verhältniss:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
2·69	:	1·28	:	1	:	0·85	:	0·74,

wodurch zugleich eine bessere Uebersicht insoferne geboten ist, als man jetzt den Percenten-Antheil erkennt, um welchen der Druck zunimmt oder abnimmt, wenn die Oberfläche des Erdreiches, von der Wandkrone an, über den dortigen Horizont sich erhebt, oder unter demselben abfällt.

Viertes Capitel.

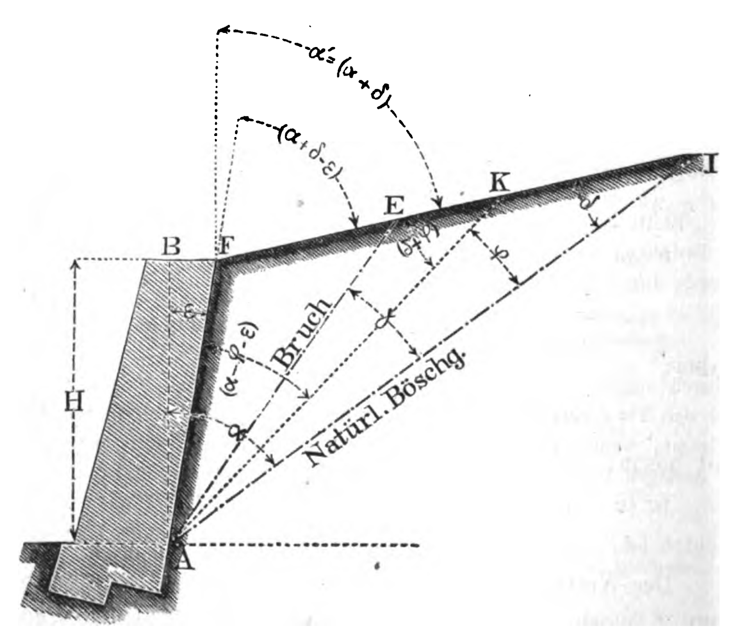
Erddruck an eine um den Winkel ε geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich, von der Wandkrone an, nach einer beliebigen Richtung ansteigt, welche mit der natürlichen Böschung den Winkel δ einschliesst.

§. 43.

Grösse des Erddruckes und Mittelpunkt desselben in diesem Falle. Um die Grösse des bezüglichen Erddruckes an die Stützwand aufzufinden, und zwar wieder mit Beiseitelassung der Cohäsion des Erdreiches, hat man die Formel (78) für $c = 0$ zu benützen, und hiernach zu setzen:

$$D = \max \Delta = \max \left[\frac{X \sin \varphi}{\cos (\varepsilon + \varphi)}\right] \ldots\ldots\ldots (166),$$

Fig. 75.



worin mit Bezug auf die Figur 75:

$$X = \left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } AFK\end{matrix}\right\} = g \cdot \triangle AFK$$

zu substituiren ist.

Es ist aber:

$$\triangle AFK = \tfrac{1}{2}\overline{AF}\,.\,\overline{AK}\,.\sin(\alpha - \varepsilon - \varphi),$$

also wegen:

$$\overline{AF} = \frac{H}{\cos\varepsilon},\quad \overline{AK} = \overline{AF}\,.\,\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)}{\sin(\delta+\varphi)} = H\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)}{\cos\varepsilon\sin(\delta+\varphi)}$$

insbesondere:

$$\triangle AFK = \tfrac{1}{2}\frac{H^2}{\cos^2\varepsilon}\,.\,\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)},$$

$$X = \tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos^2\varepsilon}\,.\,\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)},$$

und:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos^2\varepsilon}\,.\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)\frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}\;\ldots\ldots\;(167).$$

Der variable Theil dieses Ausdruckes heisst:

$$F(\varphi) = \frac{\sin\varphi\sin(\alpha-\varepsilon-\varphi)}{\sin(\delta+\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)}$$

$$= \frac{\sin\varphi\,[\sin(\alpha-\varepsilon)\cos\varphi - \cos(\alpha-\varepsilon)\sin\varphi]}{[\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi]\,[\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon]}$$

daher, indem man, um auf die Tangentenwerthe der Winkel zu gelangen, im Zähler $\cos(\alpha-\varepsilon)\cos^2\varphi$ und im Nenner $\cos\delta\sin\varepsilon$ $\cos^2\varphi$ als Factoren heraushebt, und zugleich abkürzt:

$$F(\varphi) = \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\delta}\,.\,\frac{\operatorname{tg}\varphi\,[\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon) - \operatorname{tg}\varphi]}{(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\varphi)(\operatorname{cotg}\varepsilon - \operatorname{tg}\varphi)}$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\delta}\,.\,\frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)} = \frac{\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\delta}\,.\,f(x),$$

wobei:

$$f(x) = \frac{x(a-x)}{(b+x)(c-x)} = \frac{ax - x^2}{bc + (c-b)x - x^2}\;\ldots\;(168),$$

und hierin:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon) = a,\ \operatorname{tg}\delta = b,\ \operatorname{cotg}\varepsilon = c \text{ und } \operatorname{tg}\varphi = x$$

gesetzt ist.

Der Werth von Δ soll ein Maximum werden, dies geschieht, wenn $f(x)$ ein solches wird; somit hat man zu diesem Zwecke den Differential-Quotienten:

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{a b c - 2 b c x - (c - a - b) x^2}{[b c + (c - b) x - x^2]^2}$$

für den Fall seines Nullwerdens zu untersuchen.

Hieraus folgt, wenn der diesfällige Werth von x mit x' bezeichnet wird:

$$(c - a - b) x'^2 + 2 b c x' - a b c = 0,$$

also:

$$x' = \frac{- b c \pm \sqrt{b^2 c^2 + a b c (c - a - b)}}{(c - a - b)}.$$

Augenscheinlich kann von dem Doppelzeichen der Wurzelgrösse nur das obere gelten, weil x' jedenfalls positiv werden muss, somit ist:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{- b c + \sqrt{b^2 c^2 + a b c (c - a - b)}}{(c - a - b)} \\ &= \frac{- b c + \sqrt{b c (a + b)(c - a)}}{(c - a - b)} \\ &= \frac{\sqrt{b c}}{(c - a - b)} \left[- \sqrt{b c} + \sqrt{(a + b)(c - a)} \right] \\ &= \operatorname{tg} \gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (169), \end{aligned}$$

weil allgemein $x = \operatorname{tg} \varphi$, für das Maximum von Δ aber insbesondere $x = x'$ und $\varphi =$ Bruchwinkel γ, also $x' = \operatorname{tg} \gamma$ sein muss.

Dass man es hier in der That mit einem Maximum von Δ zu thun hat, davon kann man sich durch die Aufsuchung des zweiten Differential-Quotienten von Δ nach φ überzeugen; indessen ist es gerade nicht nothwendig, auf diesem etwas umständlichen Wege vorzugehen; es genügt nämlich die Betrachtung, dass für jeden der beiden Grenzwerthe von φ ($\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha - \varepsilon$), innerhalb welchen alle übrigen Winkel für die möglicher Weise in Betracht kommenden Erdprismen liegen müssen, der Werth von Δ gleich Null wird, dass aber dieses verschwindende Resultat für einen Zwischenwinkel nicht eintreten kann: woraus folgt, dass der für den obigen Winkel $\varphi = \gamma$ resultirende Werth von Δ einen von Null verschiedenen, und zwar positiven Werth haben muss, weil der Erddruck überhaupt nicht negativ werden kann; so dass dieser Werth von Δ in der That ein Maximum vorstellt.

Um sogleich auf die Berechnung dieses Maximums überzugehen, welches jetzt unmittelbar gleich D zu setzen ist, beachte man, dass man für $x = x'$ zunächst erhält:

$$x' = \frac{\sqrt{bc}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}\right]$$

$$(a - x') = \frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}\right]$$

$$(b + x') = \frac{\sqrt{b(a+b)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}\right]$$

$$(c - x') = \frac{\sqrt{c(c-a)}}{(c-a-b)}\left[\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}\right],$$

also nach der Gleichung (168):

$$f(x') = \left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}}\right]^2,$$

sofort aber wegen:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha + \delta - \varepsilon)\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2\varepsilon \sin\varepsilon \cos\delta} f(x)$$

und:

$$D = \max \varDelta$$

insbesondere:

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin(\alpha + \delta - \varepsilon)\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2\varepsilon \sin\varepsilon \cos\delta}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos\varepsilon},$$

wobei zu setzen ist:

$$w = g \frac{\sin(\alpha + \delta - \varepsilon)\cos(\alpha - \varepsilon)}{\sin\varepsilon \cos\varepsilon \cos\delta}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}}\right]^2,$$

und w wieder das Gewicht per Cubikeinheit derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, die den gleichen Druck, wie das Erdreich, ausüben würde.

Die Formel für w kann so umgestaltet werden, dass man deren Berechnung ohne Zuhilfename trigonometrischer Tafeln vornehmen kann, insoferne die Tangentenwerthe der Winkel α, ε und δ, also auch die Grössen a, b und c bekannt sind.

Denn man hat:

$$\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\delta}=\frac{\sin[(\alpha-\varepsilon)+\delta]\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\delta}$$

$$=\frac{[\sin(\alpha-\varepsilon)\cos\delta+\cos(\alpha-\varepsilon)\sin\delta]\cos(\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\delta}$$

$$=\frac{\cos^2(\alpha-\varepsilon)[\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)+\operatorname{tg}\delta]}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)+\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha-\varepsilon)}\cdot\frac{1+\operatorname{cotg}^2\varepsilon}{\operatorname{cotg}\varepsilon}$$

$$=\frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}.$$

Hiernach ist:

$$\frac{w}{g}=\frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right]^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (170),$$

und hierin, wie oben angenommen ward:

$$a=\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon),\ b=\operatorname{tg}\delta \text{ und } c=\operatorname{cotg}\varepsilon=\frac{1}{\operatorname{tg}\varepsilon}$$

zu substituiren.

Insoferne $a=\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)$ nicht unmittelbar gegeben ist, hat man den Werth hiefür durch $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\varepsilon$ auszudrücken, indem man setzt:

$$a=\operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varepsilon}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}.$$

Eben so, wie in dem Falle des vorigen Capitels, wird auch $\operatorname{tg}\delta$ in der Regel nicht als direct gegebene Grösse erscheinen, sondern man wird den Werth hiefür mit Rücksicht auf die Richtung der Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales, nämlich nach Massgabe des Böschungsverhältnisses $\operatorname{tg}\alpha'$ (Fig. 75) erst ausmitteln müssen, was dadurch geschieht, dass man setzt:

$$\delta=(\alpha'-\alpha),$$

also:

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\operatorname{tg}\alpha'-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}.$$

Ex. $\operatorname{tg}\alpha=1{\cdot}2$, $\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha'=4\frac{1}{4}$, $H=30'$, $g=75$ Pfd.
Zunächst ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\varepsilon}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}=\frac{19}{26}\\ b&=\frac{\operatorname{tg}\alpha'-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\},\quad c=\frac{1}{\operatorname{tg}\varepsilon}=4,$$

sofort aber:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-bc + \sqrt{bc(a+b)(c-a)}}{(c-a-b)} = \frac{\sqrt{85} - 6 \cdot 5}{9} = 0 \cdot 302,$$

$$\frac{w}{g} = \frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)} \left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} \qquad - \sqrt{b(a+b)}} \right]^2$$

$$= \frac{1088}{1037} \left[\frac{\sqrt{85} - 6 \cdot 5}{\sqrt{85} - 2} \right]^2 = 0 \cdot 148,$$

$$w = 0 \cdot 148\, g = 11 \cdot 1 \text{ Pfd.},$$

endlich, wegen $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 \cdot 0308$ nach Tabelle III (pag. 19):

$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 5149 \text{ Pfd.} = 51 \cdot 49 \text{ Ctr.}$$

Dasselbe Beispiel, nur unter der Voraussetzung einer verticalen Stützwand, hat man im vorigen Capitel (pag 156) der Berechnung unterzogen, und dort für den Erddruck $D = 83 \cdot 7$ Ctr. gefunden, während gegenwärtig ein kleineres Resultat hiefür zum Vorschein kommt, was dem zuzuschreiben ist, weil unter sonst gleichen Umständen liegende Stützwände jedenfalls besser, als verticale widerstehen.

Was die Lage des Mittelpunktes vom Erddrucke anbelangt, so gilt hier wieder dasselbe, was am Schlusse des §. 40 gesagt wurde, so dass auch jetzt der gedachte Mittelpunkt in dem dritten Theile der Druckhöhe H angenommen werden darf.

§. 44.

Besondere Bemerkungen zu den Resultaten des vorigen §.

1. Der eben untersuchte Fall ist insoferne als ein allgemeiner anzusehen, als hierin die besonderen Fälle, um welche es sich in den vorhergehenden Capiteln des laufenden Abschnittes handelt, enthalten sind; welche Bemerkung zur Controle der Richtigkeit der Formeln (169) und (170) benützt werden kann.

Setzt man nämlich, um

a) sogleich auf die horizontale Begrenzung des Hinterfüllungsmateriales überzugehen, $\alpha' = 90^0$, daher $\delta = (\alpha' - \alpha) = (90^0 - \alpha)$, so erhält man: $a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon)$, $b = \operatorname{cotg} \alpha$ und $c = \operatorname{cotg} \varepsilon$, und hiermit nach durchgeführter Reduction:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)\\ \gamma = \left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)\end{array}\right\}, \quad \frac{w}{g} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}\right]^2;$$

also die bekannten Resultate (87) und (95) im ersten Capitel.

b) Steigt das Erdreich rückwärts nach der natürlichen Böschung an, so hat man zunächst wegen $\delta = 0$, anstatt a, b und c die Werthe zu setzen:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon),\quad b = o,\quad c = \operatorname{cotg}\varepsilon,$$

wodurch man findet:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{tg}\gamma = 0\\ \gamma = 0\end{array}\right\}, \quad \frac{w}{g} = \left[\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos\varepsilon}\right]^2,$$

übereinstimmend mit den Ergebnissen des zweiten Capitels (pag. 141).

c) Steigt das Erdreich rückwärts nach einer beliebigen Richtung an, ist aber die Stützwand vertical, so ergibt sich zunächst: $\varepsilon = 0$, weiter aber:

$$a = \operatorname{tg}\alpha,\quad b = \operatorname{tg}\delta \text{ und } c = \infty,$$

und hiernach:

$$\operatorname{tg}\gamma = -b + \sqrt{b(a+b)},$$

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{a+b}{1+a^2}\right)\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^2,$$

was, wie die Relationen (156) und (161) zeigen, wieder den angenommenen Umständen entspricht.

2. Für eine um den Winkel ε gegen das Loth überhängende Stützwand hat man in den Formeln (169) und (170) das algebraische Zeichen von ε in das entgegengesetzte umzuwandeln, somit zu setzen:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon),\quad b = \operatorname{tg}\delta \text{ und } c = -\operatorname{cotg}\varepsilon.$$

Eben so, wie in den früher behandelten Fällen, ergibt sich, dass der Erddruck an eine überhängende Stützwand unter sonst gleichen Umständen desto grösser wird, je schiefer die Wand steht. Zu gross darf übrigens der Ueberhängungswinkel ε nicht angenommen werden, weil sonst das auf Seite 63 (bezüglich der Fig. 29) Gesagte auch rücksichtlich der Figur 75 in Betracht käme, was offenbar zur Folge hätte, dass die oben erwähnten

Formeln nicht mehr zur Anwendung zugelassen werden dürften. Indessen kommen in der Praxis so bedeutende Ueberhängungswinkel nicht vor; überhaupt pflegt man die Anordnung von überhängenden Stützwänden, eben darum, weil dann der Erddruck mit der Wandschiefe zunimmt, zu vermeiden.

3. Um die Grösse des Erddruckes nach der Formel (170) bequemer zu finden, kann man, ähnlich wie in den Fällen der vorhergehenden Capitel, vorausberechnete Resultate tabellarisch zusammenstellen, doch wird man jetzt nicht mehr mit Einer Tabelle das Auslangen finden, sondern es muss eine gewisse Anzahl solcher Tabellen aufgestellt werden. Die Ursache davon liegt einfach darin, weil in dem jetzt betrachteten allgemeineren Falle der fragliche Erddruck D, beziehungsweise der Werth von $\frac{w}{g}$, eine Function von drei Grössen (a, b, c) ist, während Resultate nur dann in eine einzige Tabelle gebracht werden können. wenn dieselben blos von zwei Grössen abhängen.

Man wird daher im vorliegenden Falle am besten thun, eine praktisch ausreichende Reihe von Werthen für $b = \operatorname{tg} \delta$, z. B. 0, 0·1, 0·2, 0·3, ... 0·9, 1·0 im Auge zu behalten, und für jeden einzelnen davon eine Tabelle zusammenzustellen, worin nach Massgabe verschiedener Werthe der beiden anderen Einfluss nehmenden Grössen a und c, oder was schliesslich auf dasselbe hinauskommt, der Grössen $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \varepsilon$ die bezüglichen Resultate eingetragen erscheinen. Auf diese Weise wären 11 oder eigentlich nur 10 verschiedene Tabellen zu berechnen, weil man nämlich die zu $b = 0$ gehörigen Resultate bereits in der Tabelle IX zusammengestellt findet.

4. Wenn die Oberfläche des Erdreiches, von der Mauerkrone angefangen, nicht ansteigt, sondern abfällt, so können auch hiefür die Berechnungsformeln (169) und (170) angewendet werden, wenn man nur jedesmal den dazu gehörigen Werth für δ, beziehungsweise $b = \operatorname{tg} \delta$, berücksichtigt.

Ueberhaupt kann der $\measuredangle \delta$, eben so wie in dem Falle des vorigen Capitels, zwischen den Grenzen $\delta = 0$ und $\delta = (180^{0} - 2\alpha)$

variiren, diese Grenzen aber auch erreichen, je nachdem nämlich die Oberfläche des Erdreiches rückwärts nach der natürlichen Böschung ansteigt oder abfällt.

Was insbesondere die Lage der Bruchfläche betrifft, so verändert sich diese innerhalb der angedeuteten Grenzen derart, dass sie anfänglich mit der natürlichen Böschung zusammenfällt, also $\gamma = 0$ wird, und hierauf immer steiler ansteigt, so dass für eine horizontale Oberfläche der Erdmasse der Winkel zwischen der natürlichen Böschung und der Stützwand halbirt $[\gamma = \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)]$, endlich aber γ grösser als diese Winkelhälfte wird.

5. Um einerseits den Bruchwinkel, und andererseits die Grösse des Erddruckes zu finden, kann man sich auch in dem in Rede stehenden allgemeineren Falle grafischer Constructionen bedienen. Schon jetzt auf dieselben einzugehen, und solche auf Grund der aufgestellten Berechnungsformeln aufzusuchen, würde indessen zu umständlich sein, daher es vorgezogen wird, das Nöthige hierüber erst im nächsten Capitel mitzutheilen, wo, die Betrachtung von einem anderen Standpunkte ausgehend, die diesfälligen Resultate, wie man sehen wird, weit einfacher und übersichtlicher sich gestalten.

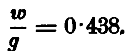
§. 45.

Vergleichung zwischen den Werthen für den Erddruck an eine um den Winkel ε gegen das Loth geneigte Stützwand bei verschiedenen Richtungen des Hinterfüllungsmateriales. Je mehr die von der Wandkrone an aufsteigende oder abfallende Oberfläche des Erdreiches sich der natürlichen Böschung nähert, desto grösser oder kleiner ist der bezügliche Erddruck an die Stützwand. Dieser Erddruck ist daher für den oberen Grenzwerth von α', d. i. für $\alpha' = \alpha$, am grössten, und nimmt allmälig ab mit der Zuname des $\measuredangle\, \alpha'$, welcher nämlich anfänglich ein spitzer, dann ein rechter und schliesslich ein stumpfer wird, bis er seinen unteren Grenzwerth $\alpha' = (180^0 - \alpha)$ erreicht, wofür der fragliche Erddruck am kleinsten ausfällt.

Um dies beispielsweise zur Anschauung zu bringen, untersuche man dieselben fünf Fälle, wie im §. 42, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt die Stützwand schief gestellt ist, während solche dort lothrecht stand. Für die Wandschiefe sei $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$.

I.

(Fig. 76.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt nach der natürlichen Böschung an. Hier ist nach der Tabelle IX (für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$):



$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 438.$$

Fig. 76.

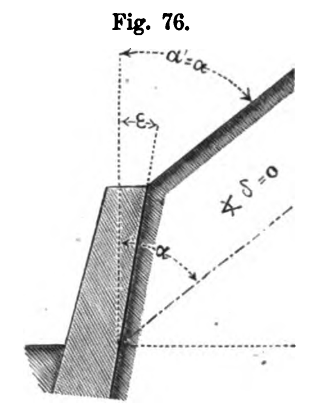
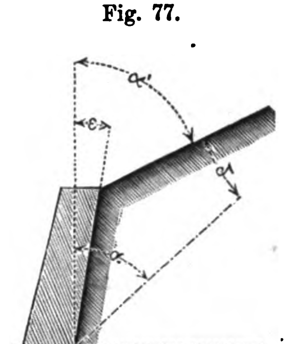


Fig. 77.



II.

(Fig. 77.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt etwas sanfter an, und das Verhältniss zwischen der Anlage und Höhe der bezüglichen Böschung soll das Doppelte von jenem im I. Falle (also $\operatorname{tg} \alpha' = 2 \operatorname{tg} \alpha$) betragen.

Hier ist zunächst: $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, $\operatorname{tg} \alpha' = 2 \cdot 4$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$, daher:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \ldots\ldots = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{31}{36}$$

$$b = \operatorname{tg}[\delta = (\alpha' - \alpha)] = \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} = \frac{30}{97}$$

$$c = \operatorname{cotg} \varepsilon \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon} = 6,$$

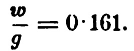
und nach der Formel (170):

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 201.$$

III.

(Fig. 78.) Die Oberfläche des Erdreiches ist horizontal. Jetzt ist $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$ und $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{5}{6}$ und man kann entweder, wie

vorhin, oder, was diesfalls vorzuziehen ist, so verfahren, dass man auf die Tabelle VI im ersten Capitel zurückgeht, wodurch man findet:



$$\frac{w}{g} = 0\cdot161.$$

Fig. 78.

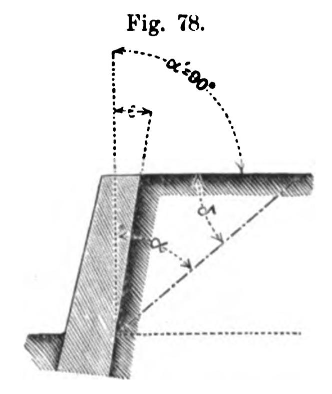
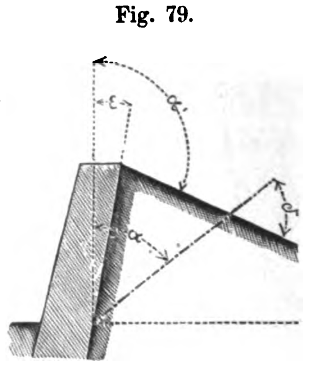


Fig. 79.



IV.

(Fig. 79.) Die Oberfläche des Erdreiches ist nach rückwärts abfallend, und zwar soll das Gefälle eben so gross sein, wie die Steigung in der Figur 77. Nunmehr hat man: $\operatorname{tg}\alpha = 1\cdot2$, $\operatorname{tg}\alpha' = -2\cdot4$ und $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$, daher:

$$a \ldots\ldots \text{(wie oben)} = \frac{31}{36}$$

$$b = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{90}{47}$$

$$c \ldots \text{(auch wie oben)} = 6,$$

und hiernach aus der Gleichung (170):

$$\frac{w}{g} = 0\cdot140.$$

V.

(Fig. 80.) Die Oberfläche des Erdreiches fällt rückwärts nach der natürlichen Böschung ab. Dann ist $\operatorname{tg}\alpha = 1\cdot2$, $\operatorname{tg}\alpha = -1\cdot2$, und $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$, somit:

$$a \ldots\ldots \text{(wie früher)} = \frac{31}{36}$$

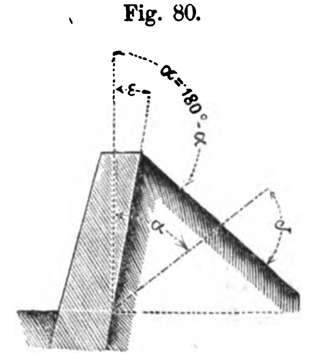
$$b = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{60}{11}$$

$$c \ldots\ldots \text{(wie zuvor)} = 6,$$

wornach auf Grund der Relation (170) sich ergibt:

$$\frac{w}{g} = 0\cdot127.$$

Fig. 80.



Ueberall ist w wieder das Gewicht per Cubikeinheit derjenigen eingebildeten tropfbaren Flüssigkeit, welche denselben Druck, wie das Erdreich, hervorbringen könnte.

Die Grösse des Erddruckes an die Stützwand in den verglichenen fünf Fällen wird daher in dem Verhältnisse abnehmen, wie die Zahlenreihe:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
438	:	201	:	161	:	140	:	127

oder, indem man, der besseren Uebersichtlichkeit halber, das auf die horizontale Oberfläche des Erdreiches bezügliche Glied durch die Einheit darstellt, also überall durch 161 dividirt, wie:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
2·72	:	1·25	:	1	:	0·87	:	0·79,

wobei bemerkenswerth ist, dass diese Verhältnisszahlen mit dem analogen Ergebnisse am Schlusse des vorigen Capitels, obwohl dort von lothrechten Stützwänden die Rede war, ziemlich nahe übereinstimmt.

§. 46.

Sicherheits-Coefficient für Wandmauern. Der in dem gegenwärtigen Capitel behandelte allgemeinere Fall, welcher zugleich die in den vorhergehenden zwei Capiteln untersuchten besonderen Fälle in sich begreift, kommt namentlich vor, wenn an eingeschnittenen Berglehnen Wandmauern aufgeführt werden. Da in diesem Falle eine zufällige Belastung des Erdreiches nicht in Rechnung zu bringen ist, genügt es, den zur Bestimmung der Mauerstabilität nöthigen Sicherheits-Coefficienten blos mit circa $s = 1\frac{1}{4}$ einzuführen, d. h. die Wandmauern derart zu construiren, dass diese dem $1\frac{1}{4}$fachen des berechneten Erddruckes D noch das Gleichgewicht zu bieten vermögen.

Hiebei ist der fragliche Druck D wieder, wie im §. 37 bemerkt, unter der Voraussetzung eines lockeren und cohäsionslosen Materiales zu berechnen. Dass man bei der Ausführung für eine den Umständen entsprechende Ableitung des hinter den Wand-

mauern sich ansammelnden Wassers Sorge zu tragen hat, ist nach dem bereits vorne Gesagten selbstverständlich.

Fünftes Capitel.

Allgemeine Regeln zur Bestimmung der gefährlichen oder Bruchböschung und des Druckes eines gestützten Erdreiches bei einer beliebigen Gestalt der Oberfläche desselben. Grafische Auflösung.

§. 47.

Eigenthümliche Untersuchungsmethode. Anknüpfend an die Bemerkungen im §. 26, wo die allgemeine Gleichung (78) für den Erddruck aufgestellt ist, soll nun — anstatt, wie es in den vorhergehenden vier Capiteln geschehen, zuerst auf die besonderen Fälle einzugehen, und nachträglich das Maximum des jedesmaligen Werthes von $\varDelta$ aufzusuchen — umgekehrt verfahren werden, indem man nämlich zunächst auf das Maximum des allgemein dargestellten Ausdruckes von $\varDelta$ eingeht, und erst dann die besonderen Fälle in's Auge fasst.

Hiebei wird der Einfluss der etwaigen Erdcohäsion vernachlässiget, also $c = 0$ gesetzt, somit die vereinfachte Gleichung für den Erddruck:

$$D = \max \varDelta = \max \left[\frac{X \sin \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)}\right]$$
$$= \frac{G \sin \gamma}{\cos(\gamma + \varepsilon)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (171),$$

und zwar in ihrer allgemeinen Form, sogleich näher untersucht, ohne schon von vorne herein bezüglich der Stellung der Stützwand und der Gestalt der Oberfläche der rückwärtigen Erdmasse besondere Voraussetzungen zu machen.

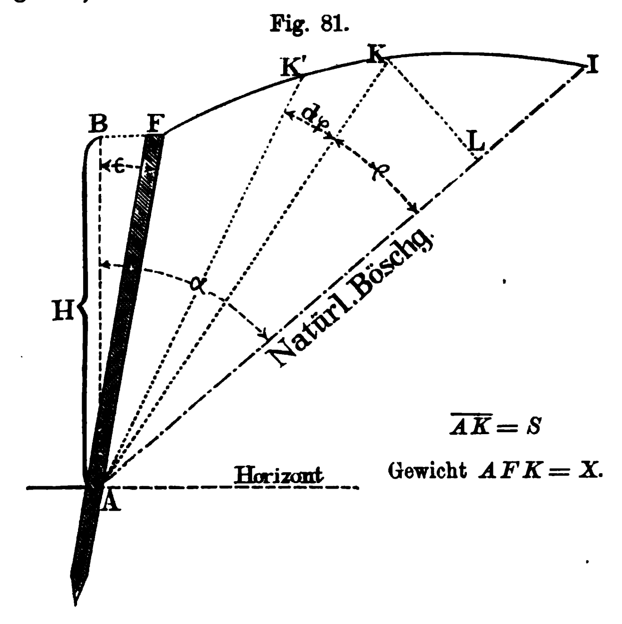
Zu diesem Behufe drücke man den variablen Werth:

$$\varDelta = \frac{X \sin \varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)}$$

als eine Function von Polar-Coordinaten aus, wobei der Fusspunkt A der Stützwand als Pol angenommen wird, die natürliche

Böschung $\overline{AI}$ die Polarachse, somit φ den jeweiligen Polarwinkel vorstellt, die Gerade $\overline{AK} = S$ aber der dazu gehörige Leitstrahl ist. (Fig. 81.)

Fig. 81.



Je nach der Gestalt der Oberfläche des Erdreiches wird zwischen S und φ eine Relation existiren, welche im Allgemeinen durch die Formel:

$$S = \text{Function}\,(\varphi) = F(\varphi) \qquad (172)$$

dargestellt werden kann, worin der Winkel φ innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = (\alpha - \varepsilon)$ veränderlich ist.

Für den unteren Grenzwerth $\varphi = 0$ fällt der Leitstrahl $(S = \overline{AI})$ in die natürliche Erdböschung, für den oberen Grenzwerth $\varphi = (\alpha - \varepsilon)$ aber in die Stützwand, und erhält dort die Länge: $S = \overline{AF} = \frac{H}{\cos \varepsilon}$.

X bedeutet das Gewicht des Erdprismas AFK, und lässt man jetzt φ um $d\varphi$ zunehmen, wodurch der Leitstrahl $\overline{AK}$ nach $\overline{AK'}$ vorrückt, also das Erdprisma AFK in das kleinere AFK' übergeht, so hat man offenbar:

$$dX = -\left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } AKK'\end{matrix}\right\}$$
$$= -g \,.\, \triangle AKK',$$

während anstatt X zu setzen ist:

$$X = \left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } AFK\end{matrix}\right\}$$
$$= g \,.\, \text{area } AFK.$$

Nun ist aber:

$$\triangle AKK' = \tfrac{1}{2}\,\overline{AK}\,.\,\overline{AK'}\,.\sin(d\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,S^2\,d\varphi,$$

weil die benachbarten Leitstrahlen $\overline{AK}$ und $\overline{AK'}$ nur um unendlich wenig von einander differiren, also als gleich gross gelten, und weiter $\sin(d\varphi) = d\varphi$ zu setzen ist.

Hiernach ergibt sich:

$$dX = -\tfrac{1}{2}\,g\,S^2\,d\varphi,\quad \frac{dX}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2}\,g\,S^2 \ldots\ldots (173).$$

Dies vorausgeschickt, gehe man daran, das Maximum von $\varDelta$ aufzusuchen, also den ersten Differential-Quotienten von $\varDelta$ nach φ zu bestimmen.

Nach dem Obigen ist:

$$\varDelta = \frac{X \sin\varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)} = X\,.\left[\frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\right],$$

somit findet man:

$$d\varDelta = \frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\,dX + X d\left[\frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\right]$$
$$= \frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\,dX + \frac{X\cos\varepsilon}{\cos^2(\varphi+\varepsilon)}\,d\varphi,$$

also:

$$\frac{d\varDelta}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\,\frac{dX}{d\varphi} + \frac{X\cos\varepsilon}{\cos^2(\varphi+\varepsilon)},$$

und, wenn man die Gleichung (173) berücksichtiget, auch:

$$\frac{d\varDelta}{d\varphi} = \frac{X\cos\varepsilon}{\cos^2(\varphi+\varepsilon)} - \tfrac{1}{2}\,g\,S^2\,\frac{\sin\varphi}{\cos(\varphi+\varepsilon)}$$
$$= \frac{X\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\,g\,S^2 \sin\varphi\cos(\varphi+\varepsilon)}{\cos^2(\varphi+\varepsilon)} \ldots\ldots\ldots (174).$$

Für das Maximum muss bekanntlich dieser Differential-Quotient verschwinden, und der Winkel φ, bei welchem dies ge-

schieht, ist der Bruchwinkel γ. Man hat daher in dem Ausdrucke (174) den Zähler gleich Null, gleichzeitig aber $\varphi = \gamma$ zu setzen, und auch die entsprechenden Werthe von S und X, nämlich übereinstimmend mit den hiefür gewählten Bezeichnungen $S = A$ und $X = G$, zu substituiren.

Hiernach erhält man als Bedingungsgleichung:

$$G \cos \varepsilon - \tfrac{1}{2} g A^2 \sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon) = 0$$

oder:

$$G = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots (175).$$

Wird dieser Werth in die Gleichung (171) eingeführt, so ergibt sich als Grösse des Erddruckes:

$$D = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots (176).$$

Diese Gleichungen (175) und (176) enthalten zwei ebenso einfache, wie merkwürdige Hauptregeln, welche man leicht erkennt, wenn man die geometrische Bedeutung jener Gleichungen in's Auge fasst.

Ist nämlich (Fig. 82) das punktirte Erdprisma AFE das Bruchprisma, also $\overline{AE} = A$ die Bruchlinie und γ der Bruchwinkel, und fällt man von E ein Perpendikel auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$, ist somit $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$, setzt man ferner den Neigungswinkel der Stützwand ε an das gedachte Perpendikel so an, wie es in der Figur ersichtlich ist, so dass $\measuredangle pEr = \varepsilon$ ist, zeichnet man endlich das schraffirte Dreieck Eqr mit den gleichen Schenkeln $\overline{Er} = \overline{qr}$; so sind die bezüglichen Hauptregeln folgende:

Erste Hauptregel.

Durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ wird die Fläche $AFEr$ halbirt, es ist somit:

$$\text{area } AFE = \triangle AEr \ldots\ldots\ldots\ldots (177).$$

Auf Grund dieser Eigenschaft kann die Lage der Bruchlinie construirt werden.

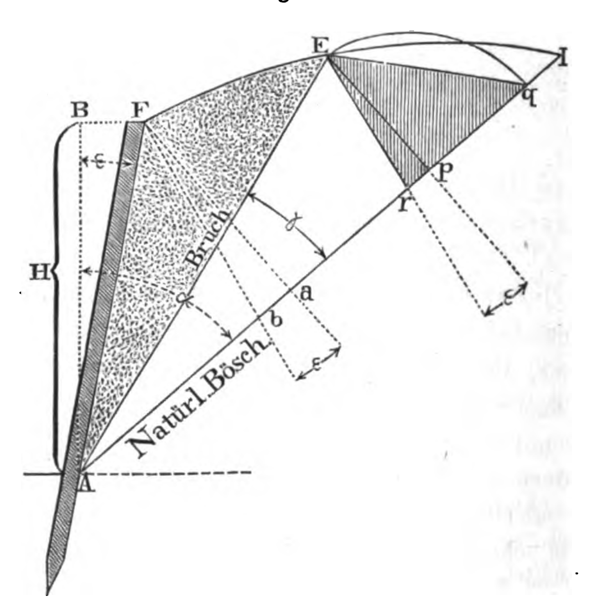
Zweite Hauptregel.

Das Gewicht des Erdprismas mit dem schraffirten Profile Eqr ist gleich der Grösse des Erddruckes D an die Stützwand, es ergibt sich daher:

$$D = g \,.\, \triangle Eqr \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178).$$

Hiernach ist man im Stande, diesen Erddruck ebenfalls grafisch darzustellen.

Fig. 82.



Beweis ad I.

Nachdem G das Gewicht des Bruchprismas bezeichnet, so hat man zunächst:

$$G = g \,.\, \text{area}\ AFE,$$

also:

$$\text{area}\ AFE = \frac{G}{g} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

Ferner ist:

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2}\, \overline{AE} \,.\, \overline{Er} \,.\, \sin \measuredangle AEr,$$

oder wegen:

$$\overline{AE} = A,\ \overline{Er} = \frac{\overline{Ep}}{\cos \varepsilon} = \frac{\overline{AE} \sin \gamma}{\cos \varepsilon} = \frac{A \sin \gamma}{\cos \varepsilon}$$

$$\text{und } \measuredangle \overline{AEr} = \measuredangle AEp - \varepsilon = 90^0 - (\gamma + \varepsilon),$$

auch:

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$

$$= \frac{G}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180),$$

wenn man die Relation (175) berücksichtigt.

Aus der Vergleichung der Resultate (179) und (180) folgt:

$$\text{area } AFE = \triangle AEr,$$

wodurch die Richtigkeit der ersten Hauptregel nachgewiesen ist.

Beweis ad II.

$$\triangle Eqr = \tfrac{1}{2} \overline{Ep} \cdot \overline{qr} = \tfrac{1}{2} \overline{Ep} \cdot \overline{Er}$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\overline{Ep}^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} \frac{\overline{AE}^2 \sin^2 \gamma}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} \frac{A^2 \sin^2 \gamma}{\cos \varepsilon},$$

somit ist das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile Eqr, indem man den Flächeninhalt dieses letzteren mit dem Einheitsgewichte des Erdreiches (g) multiplizirt:

$$g \cdot \triangle Eqr = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \varepsilon} = D,$$

wenn man nämlich zugleich auf die Relation (176) Rücksicht nimmt, wodurch die Statthaftigkeit der zweiten Hauptregel gleichfalls einleuchtet.

Hiebei soll die durch die Wandkrone F gehende Linie $\overline{Fb}$, welche mit dem dortigen Perpendikel $\overline{Fa}$ auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$ den Neigungswinkel ε einschliesst, „Orientirungslinie" heissen, insoferne nämlich zu dieser Linie die Abschlussgerade $\overline{Er}$ des Dreieckes AFr parallel ist, also gleichsam als Orientirung für die Richtung dieser Abschlussgeraden dienen kann.

Man wird später sehen, dass man oft in die Lage kommt, in einer und derselben Figur eine Reihe von verschiedenen Geraden zu ziehen, welche alle mit der Orientirungslinie parallel

laufen; deshalb ist es gut, schon von vorne herein diese letztere zu fixiren, um dann die allfälligen Parallelen dazu sogleich zeichnen zu können.

Oben hat man blos den ersten Differential-Quotienten von Δ nach φ gesucht, doch ist es eigentlich in aller Strenge nothwendig, auch auf den zweiten Differential-Quotienten einzugehen, um aus dem algebraischen Zeichen desselben ganz sicher zu erkennen, ob man es im vorliegenden Falle wirklich mit einem Maximum von Δ zu thun hat. Obgleich dies unmittelbar bejaht werden kann, weil für jeden der beiden Grenzwerthe des Winkels φ (nämlich einerseits für $\varphi = 0$, wegen $\sin\varphi = 0$, und andererseits für $\varphi = \alpha - \varepsilon$, wegen $X = 0$) der Werth von $\Delta = 0$ wird, somit dazwischen irgendwo, da ja schliesslich von einem negativen Resultate keine Rede sein kann, ein grösster positiver Werth von Δ gelegen sein muss; so soll dennoch der Vollständigkeit der wissenschaftlichen Beweisführung halber nicht unterlassen werden, die angedeutete Ergänzung beizufügen.

Zu diesem Behufe erscheint es, anstatt von dem obigen ersten Differential-Quotienten von Δ nach φ unmittelbar auf den zweiten überzugehen, jedenfalls bequemer, die ursprüngliche Gleichung für Δ unter Beseitigung der Bruchform auf die Gestalt:

$$\Delta \cos(\varphi + \varepsilon) = X \sin\varphi$$

zu bringen, in Beziehung auf φ zweimal nach einander zu differenziren, und hieraus den fraglichen zweiten Differential-Quotienten zu bestimmen.

In Folge der ersten Differentiation findet man:

$$\frac{d\Delta}{d\varphi}\cos(\varphi+\varepsilon) - \Delta\sin(\varphi+\varepsilon) = X\cos\varphi + \frac{dX}{d\varphi}\sin\varphi,$$

und, wenn neuerdings differenzirt wird:

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}\cos(\varphi+\varepsilon) - 2\frac{d\Delta}{d\varphi}\sin(\varphi+\varepsilon) - \Delta\cos(\varphi+\varepsilon) =$$
$$\frac{d^2X}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{dX}{d\varphi}\cos\varphi - X\sin\varphi.$$

Indem nun $\Delta\cos(\varphi+\varepsilon) = X\sin\varphi$ ist, fällt zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens das letzte Glied weg, und man erhält:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} \cos(\varphi + \varepsilon) - 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) = \frac{d^2 X}{d\varphi^2} \sin\varphi + 2 \frac{dX}{d\varphi} \cos\varphi,$$

hieraus aber:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} \cos(\varphi + \varepsilon) = \frac{d^2 X}{d\varphi^2} \sin\varphi + 2 \frac{dX}{d\varphi} \cos\varphi + 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon)$$

Berücksichtiget man jetzt für $\frac{dX}{d\varphi}$ den Werth aus (173), setzt man also:

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2} g S^2 \text{ und } \frac{d^2 X}{d\varphi^2} = -g S \frac{dS}{d\varphi},$$

so findet man:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} \cos(\varphi + \varepsilon) = 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S^2 \cos\varphi - g S \sin\varphi \frac{dS}{d\varphi}.$$

$$= 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S \left[S \cos\varphi + \frac{dS}{d\varphi} \sin\varphi \right],$$

somit wegen:

$$S \cos\varphi + \frac{dS}{d\varphi} \sin\varphi = \frac{d(S \sin\varphi)}{d\varphi}$$

auch:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} \cos(\varphi + \varepsilon) = 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S \frac{d[S \sin\alpha]}{d\varphi}.$$

Blickt man in die Figur 81 zurück, so bemerkt man, dass, indem man von K das Loth $\overline{KL}$ auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$ fällt, und die Grösse dieses Lothes mit Z bezeichnet, die Relation besteht:

$$\overline{KL} = Z = \overline{AK} \sin\varphi = S \sin\varphi,$$

folglich die vorgefundene Gleichung übergeht in:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} \cos(\varphi + \varepsilon) = 2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S \frac{dZ}{d\varphi},$$

woraus erhalten wird:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} = \frac{1}{\cos(\varphi + \varepsilon)} \left[2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S \cdot \frac{dZ}{d\varphi} \right],$$

oder endlich:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d\varphi^2} = \frac{1}{\cos(\varphi + \varepsilon)} \left[2 \frac{d\varDelta}{d\varphi} \sin(\varphi + \varepsilon) - g S \cdot f(\varphi) \right],$$

wenn man nämlich, da Z eine Function von φ sein wird, den ersten Differential-Quotienten davon:

$$\frac{dZ}{d\varphi} = f(\varphi)$$

setzt, wobei f das betreffende Functionszeichen bedeutet.

Für den in Betracht stehenden Fall, in welchem das Maximum Gegenstand der Untersuchung ist, hat man $\frac{d\Delta}{d\varphi} = 0$, und damit im Zusammenhange $\varphi = \gamma$ und $S = A$; also geht die vorgefundene Gleichung insbesondere in folgende über:

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2} = -\frac{gA}{\cos(\gamma+\varepsilon)} . f(\gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots (181),$$

und es wird jetzt darauf ankommen, ausfindig zu machen, ob und unter welchen Verhältnissen dieser Werth positiv oder negativ ausfällt, was, wie man sogleich erkennt, lediglich durch das Verhalten von $f(\gamma)$ bedingt ist.

Wendet man zunächst die Aufmerksamkeit dem allgemeinen Ausdrucke: $f(\varphi)$, woraus eben der besondere Werth: $f(\gamma)$ entstanden ist, zu, so lässt sich hierüber Folgendes sagen:

$$f(\varphi) = \frac{dZ}{d\varphi}$$

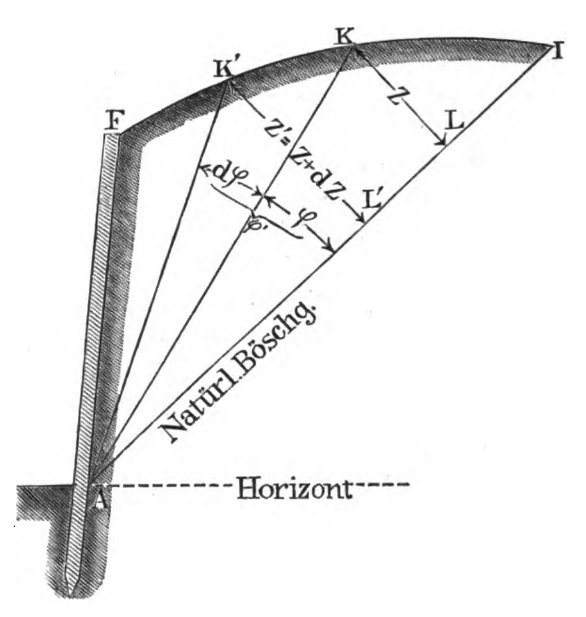
zeigt offenbar an, in welcher Weise die Grösse des Perpendikels Z mit jener des Winkels φ sich verändert. Nimmt nämlich der Winkel φ zu oder ab, und es befolgt hiebei das Perpendikel das gleiche Verhalten, so ist $f(\varphi)$ positiv; im Gegenfalle aber muss $f(\varphi)$ negativ werden.

Man hat daher nur mit Rücksicht auf die Form der oberen Begrenzung der Erdmasse nachzusehen, ob, wenn man (Fig. 83) den Winkel φ in $\varphi' = (\varphi + d\varphi)$ und hiernach das Perpendikel $\overline{KL} = Z$ in $\overline{K'L'} = Z' = (Z + dZ)$ übergehen lässt, der Werth für $dZ = (Z' - Z)$ positiv oder negativ, d. h. Z' grösser oder kleiner als Z, ausfällt.

Die einfache Betrachtung der Figur 83 zeigt, dass das Erstere eintritt, nämlich Z mit φ gleichzeitig zunimmt, weil ja selbstverständlich bei dem cohäsionslos angenommenen Erdreiche das Oberflächenelement $\overline{KK'}$ im Allgemeinen minder steil ansteigen wird, als das Element der natürlichen Böschung $\overline{LL'}$. Nur in dem Einen noch möglichen Falle, wenn diese beiden Elemente zu einander parallel sind, wird $Z' = Z$, also $dZ = 0$; ein negativer Werth von dZ jedoch ist füglich ausgeschlossen, weil

sonst das Oberflächenelement steiler, als nach der natürlichen Böschung ansteigen müsste.

Fig. 83.



Indem diese Bemerkungen offenbar auch für den speciellen Werth: $f(\gamma)$ gelten, so erkennt man, dass der Ausdruck (181) im Allgemeinen negativ sein muss, und nur manchmal gleich Null werden kann, dass man somit erhält:

$$\frac{d^2 \varDelta}{d \varphi^2} \leqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (182),$$

was anzeigt, dass man es im Allgemeinen in der That mit einem Maximum von $\varDelta$ zu thun hat.

Der Fall $\frac{d^2 \varDelta}{d \varphi^2} = 0$ enthält scheinbar eine gewisse Unbestimmtheit, welche beispielsweise eintreten wird, wenn es überhaupt ein analytisches Maximum, das nämlich auf dem Wege der Differentiation gefunden werden soll, nicht gibt, sondern vielmehr blos ein numerisches, welches zwischen den Grenzwerthen von $\varphi = 0$ und $\varphi = (\alpha - \varepsilon)$ sich befindet; ein Fall, auf welchen

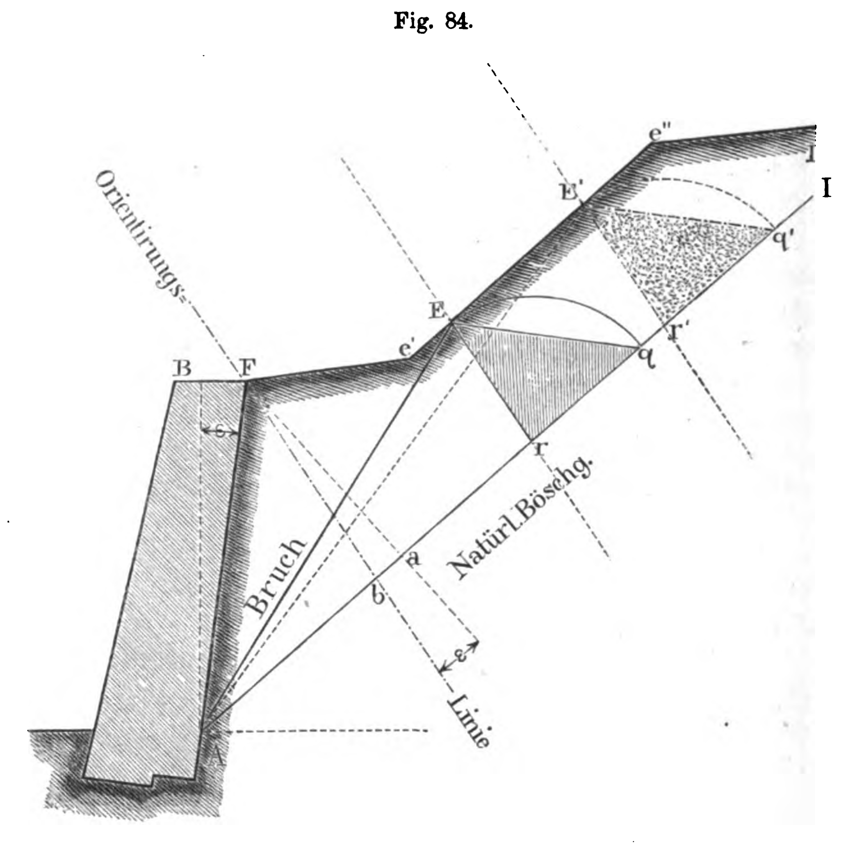
man zuerst allgemein schon im §. 13 unter Punkt 4, dann aber insbesondere im §. 38, pag. 142, hingedeutet hat.

Gleichwol behalten hiebei die oben aufgestellten zwei Hauptregeln (177) und (178) noch immer ihre allgemeine Giltigkeit, wenn man erwägt, dass der besondere Fall, in welchem die Oberfläche der Erdmasse ganz oder theilweise nach der natürlichen Böschung ansteigt, nicht eigentlich als eine Ausname betrachtet werden darf, sondern vielmehr nur auf die Grenze hindeutet, bis zu welcher das Ansteigen des Erdreiches überhaupt in Betracht zu kommen hat, und hiedurch gewissermassen der Schlusspunkt gekennzeichnet ist, bis wohin die gedachten Hauptregeln beibehalten werden können. Denn man braucht sich nur einfach vorzustellen, dass die Oberfläche des Erdreiches in der betreffenden Strecke nach einer Böschung ansteigt, welche blos unendlich wenig sanfter geneigt ist, als die natürliche. Dann aber ist bezüglich des zweiten Differentialquotienten von Δ nach φ augenscheinlich die Tendenz zu seinem Negativwerden vorhanden, was eben dafür spricht, dass ohne Ueberschreitung der gedachten Grenze für die Oberflächenböschung kein Motiv besteht, an den allgemein gefundenen Gesetzen etwas zu modificiren.

Bemerkungswerth ist, dass, wenn die Bruchfläche $\overline{AE}$ (Fig. 84) an eine solche Stelle E der Oberfläche des Erdreiches trifft, wo diese letztere innerhalb einer gewissen Strecke (etwa zwischen e' und e'') nach der natürlichen Böschung ansteigt, es nicht mehr unumgänglich nothwendig erscheint, bei der Zeichnung des Erdprismas, dessen Gewicht die Grösse des Erddruckes vorstellt, unmittelbar von dem Bruchpunkte E auszugehen, sondern hiezu offenbar ein ganz beliebiger Punkt E', falls dieser nur nicht ausserhalb der gedachten Strecke $\overline{e'e''}$ liegt, gewählt werden kann, weil, wie man sogleich erkennt, das auf Grundlage der zweiten Hauptregel construirte (schraffirte) Dreieck Eqr mit der Spitze in E, dem Flächenraume nach, mit demjenigen (punktirten) Dreiecke $E'q'r'$ verwechselt werden kann, welches die Spitze in E' hat, sonst aber ebenso wie das erstbezeichnete con-

struirt wird, d. h. man hat $\overline{E'r'}$ || zur Orientirungslinie $\overline{Fb}$, und $\overline{q'r'} = \overline{E'r'}$ zu machen.

Fig. 84.



Zu Folge der ersten in der Gleichung (177) ausgesprochenen Hauptregel, die auf die Grösse des Bruchprismas Bezug nimmt, soll nämlich allerdings der Bruchpunkt E so liegen, dass

$$\text{area } AFe'E = \triangle\, AEr \text{ wird.}$$

Bei Benützung der zweiten durch die Gleichung (178) versinnlichten Hauptregel aber kann in dem betrachteten speciellen Falle wo $\overline{e'e''} \parallel \overline{AI}$ ist, offenbar die weitere Construction, durch welche der Erddruck grafisch dargestellt wird, ganz ohne Rücksicht auf jene Bruchlinie $\overline{AE}$ durchgeführt werden, oder, was auf das-

selbe hinauskommt, man kann hiezu irgend eine andere zwischen e' und e'' ausmündende Richtungslinie $\overline{AE'}$ ebenfalls als Bruchlinie betrachten, ohne die Richtigkeit des Resultates für die Grösse des Erddruckes zu beeinträchtigen.

Noch auf eine merkwürdige Eigenschaft, und zwar ganz im Allgemeinen, ist hinzuweisen. Setzt man nämlich die Grösse des Perpendikels Ep (Fig. 82) $= P$, so erhält man wegen:

$$P = \overline{Ep} = \overline{AE} \sin \gamma = A \sin \gamma,$$

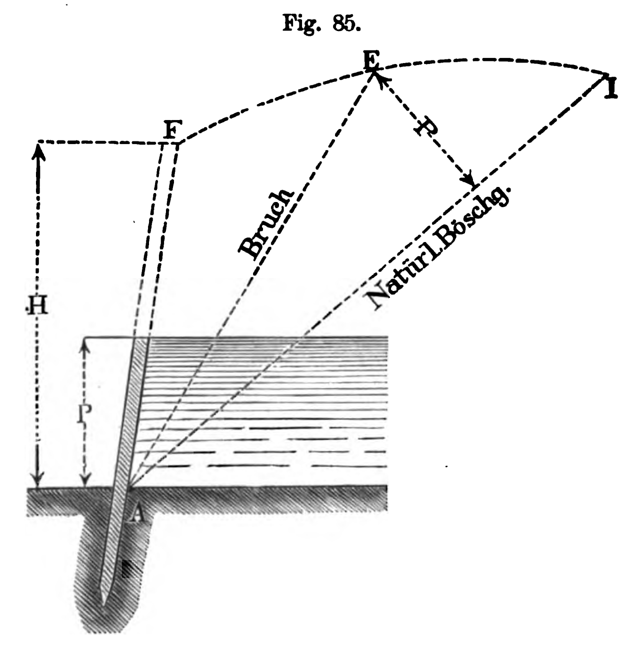
aus der Gleichung (176) für den Erddruck:

$$D = \frac{1}{2} g \frac{P^2}{\cos \varepsilon} \qquad (183),$$

also unmittelbar die hydrostatische Formel.

Der Erddruck auf die Wandhöhe H (Fig. 85) ist daher eben so gross, wie der Druck einer tropfbaren

Fig. 85.



Flüssigkeit, deren Gewicht per Cubikeinheit gleich jenem der Erde ist, wenn die Druckhöhe hiebei nur mit der Grösse desjenigen Perpendikels P bemessen

wird, welches von dem Bruchpunkte E bis zur natürlichen Böschung $\overline{AI}$ reicht.

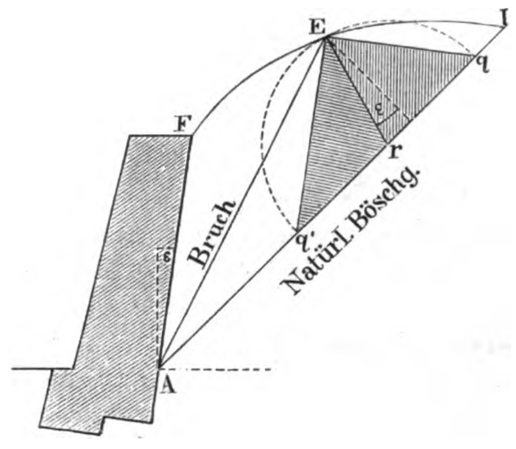
§. 48.

Erläuterungen zu den im vorigen §. entwickelten Gesetzen.

A.

Bei der Construction des Erdprismas, dessen Gewicht eben so gross wird, wie der Erddruck an die Stützwand, ist es gleichgiltig, ob das Ausmass der Linie $\overline{Er}$, von r aus, auf die natürliche Böschung nach aufwärts, wie in der Figur 82, oder aber nach abwärts aufgetragen wird. Man kann das Eine oder das Andere thun, je nachdem es als bequemer erachtet wird; die diesfälligen zwei Dreiecke werden zwar nicht congruent oder ähnlich, wohl aber dem Flächenraume nach gleich gross. Ist nämlich (Fig. 86) einerseits $\overline{Er} = \overline{qr}$ und andererseits $\overline{Er} = \overline{q'r}$, so hat

Fig. 86.



man $\triangle Erq = \triangle Erq'$, und man kann jedes dieser beiden Dreiecke der Betrachtung zu Grunde legen.

Es ist also der Erddruck:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gewicht des Erdprismas} \\ Erq \text{ oder } Erq'. \end{array} \right.$$

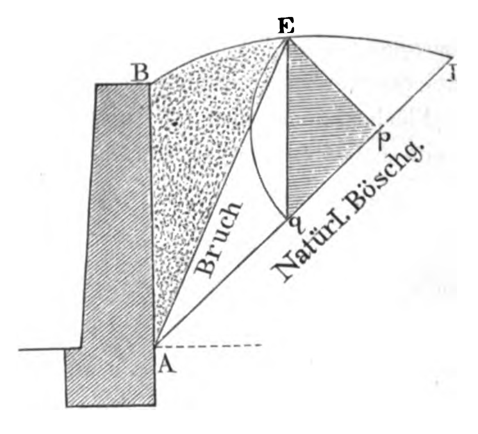
B.

Ist die Stützwand vertical, so vereinfachen sich die durch die Gleichungen (177) und (178) ausgedrückten Hauptregeln insofern, als (wegen $\varepsilon = 0$) die in der Figur 82 construirten Linien $\overline{Ep}$ und $\overline{Er}$ zusammenfallen, also lediglich das Perpendikel $\overline{Ep}$ auf die natürliche Erdböschung zu zeichnen ist.

Ist daher (Fig. 87) $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$, und der punktirte Erdkörper das Bruchprisma, so besteht die Relation:

$$\text{area } ABE = \triangle\, AEp;$$

Fig. 87.



ferner ist, wenn $\overline{pq} = \overline{Ep}$ gemacht wird, das schraffirt angezeigte Erdprisma Epq dasjenige, dessen Gewicht der Grösse des Erddruckes an der Stützwand gleich ist. Also:

$$D = g \cdot \triangle\, Epq = \tfrac{1}{2}\, g \cdot \overline{Ep}^2 = \tfrac{1}{2}\, g P^2,$$

weil früher das Perpendikel $\overline{Ep} = P$ gesetzt ward; was auch mit der Gleichung (183) übereinstimmt, wenn dort $\varepsilon = 0$ wird.

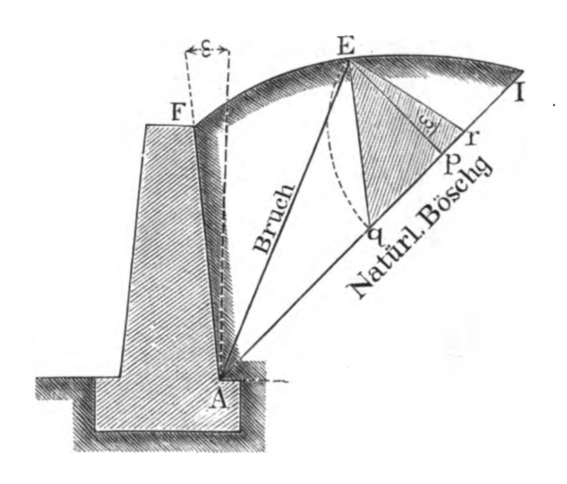
C.

Ist die Stützwand um den Winkel ε überhängend, so bleiben die gegebenen Regeln dieselben, nur hat man sodann den Neigungswinkel ε negativ zu nehmen, also diesen letzteren, anstatt wie in der Fig. 82 diesseits des Lothes $\overline{Ep}$, jenseits desselben auf-

zutragen, was selbstverständlich auch für die bezügliche Orientirungslinie gilt. (Siehe die Fig. 88.) In dieser ist: $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ $\measuredangle\, pEr = \varepsilon$, $\overline{qr} = \overline{Er}$, area $AFE = \triangle\, AEr$, endlich:

$$D = \left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } Eqr\end{matrix}\right\} = g \cdot \triangle\, Eqr.$$

Fig. 88.



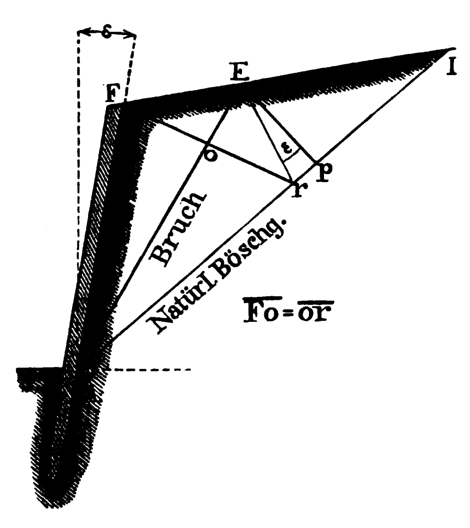
D.

Ist die Oberfläche des Erdreiches eben, wenn auch schief, wie in der Fig. 89, so entsteht laut der in der Gleichung (177) ausgedrückten ersten Hauptregel die weitere Eigenschaft, dass in dem Vierecke $AFEr$ die eine Diagonale $\overline{Fr}$ durch die andere (Bruchlinie) $\overline{AE}$ im Kreuzungspunkte o halbirt wird.

Es muss nämlich, da $\triangle\, AFE = \triangle\, AEr$ ist, $\overline{Fo} = \overline{or}$ sein. Diese Eigenschaft kann als Anhaltspunkt benützt werden, in einem derartigen Falle die Bruchlinie in directer Weise geometrisch zu construiren, wovon im nächsten §. die Rede sein wird; gleichzeitig aber kann sie dazu dienen, die Richtigkeit der construirten Lage der Bruchlinie zu prüfen, indem man nur nachzusehen braucht, ob die erwähnte Halbirung der Diagonale $\overline{Fr}$ durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ wirklich stattfindet.

Die in einem solchen Falle entstehende Figur $AFEr$ soll „Constructions-Viereck", und hierin die Bruchlinie $\overline{AE}$ die erste, die Gerade $\overline{Fr}$ aber die zweite Diagonale heissen.

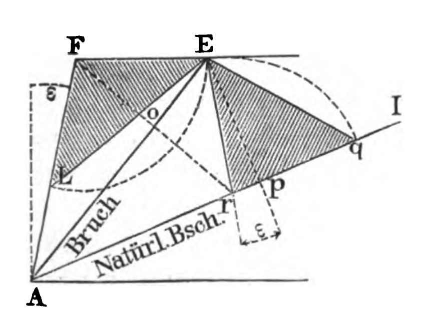
Fig. 89.



E.

Um zu untersuchen, ob die neuerlich gefundenen Regeln und Eigenschaften in denjenigen Resultaten wirklich enthalten sind, welche bei der in den früheren Capiteln des laufenden Abschnittes besonders behandelten Fällen sich ergeben haben, gehe man

Fig. 90.



a) zunächst auf den Fall (Fig. 90) über, in welchem die hinter der Stützwand aufgeschichtete Erde obenauf horizontal begrenzt ist.

Nach dem Resultate (87) halbirt die Bruchlinie $\overline{AE}$ den Winkel FAI, es ist somit $\measuredangle FAE = \measuredangle EaI$.

Macht man nun $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ und $\sphericalangle pEr = \varepsilon$, so erhält man das dazu gehörige Constructions-Viereck $AFEr$, welches in der That, wie es die erste Hauptregel (177) verlangt, durch die diagonale Bruchlinie $\overline{AE}$ in zwei gleich grosse, jetzt ausnamsweise auch congruente Dreiecke getheilt wird, so dass man schreiben kann:

$$\triangle AFE \cong \triangle AFr.$$

Dass die zweite Vierecks-Diagonale in o halbirt wird, wie dies zu Folge der unter lit. D erörterten Eigenschaft geschehen soll, ist wohl auf den ersten Anblick der Figur einleuchtend; zudem ergibt sich hier die weitere Eigenschaft, dass die beiden Diagonalen $\overline{AE}$ und $\overline{Fr}$ sich unter einem rechten Winkel kreuzen.

Es ist daher:

$$\overline{Fo} = \overline{or} \text{ und } \overline{Fr} \perp \overline{AE}.$$

Zu Folge der zweiten Hauptregel (178) ist $\overline{rq} = \overline{Er}$ zu construiren, um das Erdprisma Eqr zu erhalten, dessen Gewicht der Grösse des Erddruckes D gleich ist. In der Figur 37 hat man ebenfalls ein solches Erdprisma construirt, welches dort mit LFE bezeichnet ist. Uebertrāgt man dieses Erdprisma in die jetzt in Betracht stehende Figur, so ist leicht zu erkennen, dass die Körpergrösse desselben genau mit jener des Erdprismas Eqr übereinstimmt.

Denn es ist:

$$\overline{FL} = \overline{FE} = \overline{Er} = \overline{qr},$$

$$\sphericalangle LFE = (90^\circ + \varepsilon),\ \sphericalangle Erq = (90^\circ - \varepsilon);$$

somit haben die beiden Körperprofile LFE und Eqr gleiche Grundlinien (nämlich $\overline{FE}$ und $\overline{qr}$), ferner auch gleiche Höhen, da das Loth $\overline{Ep}$ offenbar eben so gross ist, wie jenes, welches von L auf die Verlängerung von $\overline{FE}$ gefällt wird.

Man hat daher:

$$\triangle LFE = \triangle Eqr,$$

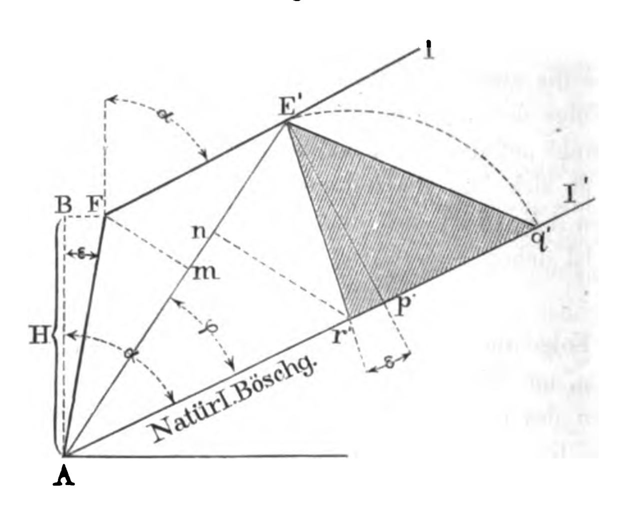
und für den Erddruck:

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \text{Gewicht des Erdprimas} \\ LFE \text{ oder } Eqr. \end{array} \right.$$

Wendet man

b) die Aufmerksamkeit dem Falle des zweiten Capitels zu, wo die Oberfläche des Erdreiches hinter der Stützwand nach der natürlichen Böschung fort ansteigt (Fig. 91), so ziehe man,

Fig. 91.



um auf die erste Hauptregel (177) näher einzugehen, vorerst eine beliebige Böschungslinie $\overline{AE'}$, welche mit der natürlichen Böschung $\overline{AI'}$ den Winkel φ einschliesst. Construirt man hiezu das Viereck $AFE'r'$ in der Art, wie wenn $\overline{AE'}$ die Bruchlinie vorstellen würde, so ist zunächst zu untersuchen, wie gross man den Winkel φ anzunehmen hat, damit zu Folge der ersten Hauptregel (177) $\triangle AFE' = \triangle AE'r'$, daher die Böschungslinie $\overline{AE'}$ wirklich zur Bruchlinie wird.

Da beide Dreiecke die gleiche Basis $\overline{AE'}$ haben, so wird es nur darauf ankommen, ihre Höhen $\overline{Fm}$ und $\overline{nr'}$ zu vergleichen.

Nun ist aber einerseits:

$$\overline{Fm} = \overline{AF} \,.\, \sin\,(\alpha - \varepsilon - \varphi),$$

und wegen:

$$\overline{AE'} = \overline{AF} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sin \varphi},$$

$$\overline{Ar'} = \overline{AE'} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon - \varphi)}{\sin(90^\circ + \varepsilon)} = \overline{AE'} \frac{\cos(\varepsilon + \varphi)}{\cos \varepsilon},$$

andererseits:

$$\overline{nr'} = \overline{Ar'} \cdot \sin \varphi = \overline{AF} \frac{\sin(\alpha - \varepsilon)\cos(\varepsilon + \varphi)}{\cos \varepsilon},$$

daher:

$$\overline{Fm} : \overline{nr'} = \sin(\alpha - \varepsilon - \varphi) \cos \varepsilon : \sin(\alpha - \varepsilon) \cos(\varepsilon + \varphi)$$
$$= [\sin(\alpha - \varphi) + \sin(\alpha - 2\varepsilon - \varphi)] : [\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha - 2\varepsilon - \varphi)].$$

So lange φ einen von Null verschiedenen, positiven Werth hat, können, wie aus dieser Proportion ersichtlich ist, die beiden Dreieckshöhen nicht einerlei Ausmass haben, sondern es wird vielmehr stets $\overline{Fm} < \overline{nr'}$ sein; nur für $\varphi = 0$ entfällt diese Ungleichheit, so dass dann die beiden Dreiecke AFE' und $AE'r'$ gleich gross werden.

Indem nun dieses letzte Resultat zur Erfüllung der obenerwähnten ersten Hauptregel gefordert wird, so folgt, dass die Bruchfläche nur bei dem das gedachte Resultat bedingenden Winkel $\varphi = 0$, also ebenso anzunehmen ist, wie dies die im zweiten Capitel enthaltene besondere Untersuchung des in Rede stehenden Falles ergab.

Was das Erdprisma, dessen Gewicht der Intension des Erddruckes gleich ist, betrifft, so kommt in dem vorliegenden Falle mit Rücksicht auf das zur Figur 84 Gesagte zu bemerken, dass die Stelle, wo dieses Prisma zwischen die beiden natürlichen Böschungen $\overline{AI'}$ und $\overline{FI}$ eingezeichnet wird, ganz beliebig gewählt, also hiezu auch von dem Punkte E' ausgegangen werden kann.

Macht man daher mit Bedachtname auf die zweite Hauptregel (178) $\overline{q'r'} = \overline{E'r'}$, so stellt das so erhaltene, gleichschenklige, in der Figur schraffirte Dreieck $E'q'r'$ das Profil des fraglichen Erdprismas dar, und es ist:

$$D = \left\{ \begin{array}{c} \text{Gewicht des Erd-} \\ \text{prismas } E'q'r' \end{array} \right\} = g \cdot \triangle E'q'r'.$$

Man findet leicht, dass der Flächeninhalt des erwähnten Profiles $E'q'r'$ eben so gross ist, wie jener des zu dem gleichen Zwecke construirten Profiles AFf in der Figur 55, falls hier, wie dort, die sonstigen Verhältnisse dieselben sind.

Durch die Anwendung der beiden Hauptregeln (177) und (178) auf den besprochenen Fall wird man daher in der That auf die im zweiten Capitel entwickelten Resultate geleitet.

c) Ueber den im dritten Capitel behandelten Fall, wo die Stützwand vertical steht und das dahinter aufgeschichtete Erdreich nach einer beliebigen Böschung ansteigt oder abfällt, ist eine Erläuterung nicht mehr hinzuzufügen nöthig, indem aus den dortigen Untersuchungen, welche auf die Figuren 65, 67 und 69 Bezug nehmen, unmittelbar ersichtlich ist, dass hierin die beiden Hauptregeln (177) und (178) enthalten sind.

d) Endlich den im vierten Capitel behandelten allgemeineren Fall betreffend, wo die Stützwand eine Neigung hat, und das Erdreich nach einer beliebigen Böschung ansteigt, so soll zunächst der Bruchwinkel $EAI = \gamma$ (Fig. 92) aus

Fig. 92.

der Eigenschaft (177) abgeleitet werden, wonach nämlich $\triangle AFE = \triangle AFr$ wird, wenn $AFEr$ das Constructions-Viereck bedeutet, also $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ und $\sphericalangle pEr = \varepsilon$ ist.

Indem man unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus dem vierten Capitel sogleich auf die Dreieckshöhen $\overline{Fm}$ und $\overline{nr}$ übergeht, welche einander gleich sein müssen, hat man einerseits:

$$\overline{Fm} = \overline{AF} . \sin(\alpha - \varepsilon - \gamma),$$

und wegen:

$$\overline{AE} = \overline{AF} . \frac{\sin(\alpha - \varepsilon + \delta)}{\sin(\delta + \gamma)},$$

$$\overline{Ar} = \overline{AE} . \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon - \gamma)}{\sin(90^\circ + \varepsilon)} = \overline{AE}\frac{\cos(\varepsilon + \gamma)}{\cos \varepsilon}$$

$$= \overline{AF} . \frac{\sin(\alpha - \varepsilon + \delta)\cos(\varepsilon + \gamma)}{\cos \varepsilon \sin(\delta + \gamma)},$$

andererseits:

$$\overline{nr} = \overline{Ar} . \sin\gamma = \overline{AF} . \frac{\sin(\alpha - \varepsilon + \delta)\cos(\varepsilon + \gamma)\sin\gamma}{\cos\varepsilon \sin(\delta + \gamma)},$$

daher, weil $\overline{Fm} = \overline{nr}$ sein soll:

$$\cos\varepsilon \sin(\delta + \gamma)\sin(\alpha - \varepsilon - \gamma) = \sin\gamma\cos(\varepsilon + \gamma)\sin(\alpha - \varepsilon + \delta)$$

Nun ist aber, wenn man unter Einem überstimmend mit den abkürzenden Bezeichnungen im §. 43:

$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = a$, $\operatorname{tg}\delta = b$, $\operatorname{cotg}\varepsilon = c$ und $\operatorname{tg}\gamma = x'$ setzt:

$$\begin{aligned}
\sin(\delta + \gamma) &= \cos\delta\cos\gamma\,[\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\gamma] \\
&= \cos\delta\cos\gamma\,(b + x'), \\
\sin(\alpha - \varepsilon - \gamma) &= \cos(\alpha - \varepsilon)\cos\gamma\,[\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) - \operatorname{tg}\gamma] \\
&= \cos(\alpha - \varepsilon)\cos\gamma\,(a - x'), \\
\cos(\varepsilon + \gamma) &= \sin\varepsilon\cos\gamma\,[\operatorname{cotg}\varepsilon - \operatorname{tg}\gamma] \\
&= \sin\varepsilon\cos\gamma\,(c - x'), \\
\sin(\alpha - \varepsilon + \delta) &= \cos(\alpha - \varepsilon)\cos\delta\,[\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) + \operatorname{tg}\delta] \\
&= \cos(\alpha - \varepsilon)\cos\delta\,(a + b);
\end{aligned}$$

somit erhält man:

$$\cos\varepsilon\cos\gamma\,(b + x')(a - x') = \sin\varepsilon\sin\gamma\,(c - x')(a + b),$$

und, wenn man beiderseits durch $\sin\varepsilon\cos\gamma$ dividirt:

$$c\,(b + x')(a - x') = x'\,(c - x')(a + b),$$

welche Relation, nach x' geordnet, auf die quadratische Gleichung führt:

$$(c - a - b)\, x'^2 + 2\, b c x' - a b c = 0,$$

deren sofortige Auflösung offenbar denselben Werth von $x' = \operatorname{tg} \gamma$ ergibt, der vorne in der Formel (169) aufgestellt ist, so dass in dieser wirklich die erste Hauptregel (177) enthalten erscheint.

Construirt man nun, der zweiten Hauptregel (178) entsprechend, $\overline{qr} = \overline{Er}$, und berechnet den Flächeninhalt des $\triangle qEr$, so ist zu setzen:

$$\triangle qEr = \tfrac{1}{2}\, \overline{Ep} \cdot \overline{qr} = \tfrac{1}{2}\, \overline{Er} \cdot \overline{qr} \cos \varepsilon = \tfrac{1}{2}\, \overline{Er}^2 \cdot \cos \varepsilon,$$

$$\overline{Er} = \overline{AE} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon} = \overline{AF} \cdot \frac{\sin \gamma \sin (\alpha - \varepsilon + \delta)}{\cos \varepsilon \sin (\delta + \gamma)}$$

$$= H \frac{\sin \gamma \sin (\alpha - \varepsilon + \delta)}{\cos^2 \varepsilon \sin (\delta + \gamma)},$$

daher auch:

$$\triangle qEr = \tfrac{1}{2} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \gamma \sin (\alpha - \varepsilon + \delta)}{\cos \varepsilon \sin (\delta + \gamma)}\right]^2.$$

Hiernach erhält man für den Erddruck:

$$D = g \cdot \triangle qEr = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},$$

wenn man hiebei setzt:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\sin \gamma \sin (\alpha - \varepsilon + \delta)}{\cos \varepsilon \sin (\delta + \gamma)}\right]^2.$$

Nun ist aber:

$$\sin \gamma \sin (\alpha - \varepsilon + \delta) = \sin \gamma \cos (\alpha - \varepsilon) \cos \delta\, (a + b)$$

$$\cos \varepsilon \sin (\delta + \gamma) = \cos \varepsilon \cos \gamma \cos \delta\, (b + x'),$$

folglich:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\operatorname{tg} \gamma \cos (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \left(\frac{a + b}{b + x'}\right)\right]^2$$

$$= \frac{\cos^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon} \left[\frac{x' (a + b)}{(b + x')}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 (\alpha - \varepsilon)}\right] \left[\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \varepsilon}{\operatorname{cotg}^2 \varepsilon}\right] \left[\frac{x' (a + b)}{(b + x')}\right]^2$$

$$= \frac{(1 + c^2)}{c^2 (1 + a^2)} \left[\frac{x' (a + b)}{(b + x')}\right]^2,$$

und, indem man hierin den für x' entsprechenden Werth substituirt, endlich:

$$\frac{w}{g} = \frac{(a+b)(1+c^2)}{c(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)}-\sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)}-\sqrt{b(a+b)}}\right]^2,$$

welche Relation mit jener unter (170) gegebenen vollkommen übereinstimmt, so dass auch die zweite Hauptregel (178) diesfalls thatsächlich Platz greift.

§. 49.

Directe geometrische Construction des Bruchwinkels, wenn die Stützwand schief steht und die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales von einer Ebene begrenzt ist. Nachdem zur grafischen Darstellung der Grösse des Erddruckes es nothwendig ist, den bezüglichen Bruchwinkel γ zu kennen, die geometrische Construction dieses letzteren aber für den in der Ueberschrift angedeuteten Fall noch nicht mitgetheilt wurde, so erübrigt nunmehr (in Erfüllung der Zusage im §. 44 unter Punkt 5) hierauf näher einzugehen.

Zu diesem Behufe ist es nöthig, einen Satz vorauszuschicken, welcher eine neue Eigenschaft des Bruchwinkels kennen lehrt.

Stellt nämlich (Fig. 93) $\overline{Fb}$ die Orientirungslinie und $AFEr$ das diesfällige Constructions-Viereck vor, so hat man:

$$\overline{Ep} \parallel \overline{Fa} \perp \overline{AI}, \quad \sphericalangle pEr = \sphericalangle aFb = \varepsilon,$$

und es besteht die Proportion:

$$\overline{Ab} : \overline{Ar} = \overline{Ar} : \overline{AI} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (184),$$

somit ist $\overline{Ar}$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\overline{Ab}$ und $\overline{AI}$.

Denn es ist nach der Figur:

$$\triangle AFI = \triangle AFE + \triangle AEr + \triangle EIr,$$

oder, da die Construction des Bruchwinkels die Bedingung erfordert:

$$\triangle AFE = \triangle AEr,$$

auch:

$$\triangle AFI = 2 \, . \, \triangle AEr + \triangle EIr.$$

Wegen

$$\triangle AFI = \tfrac{1}{2}\, \overline{AI} \, . \, \overline{Fa},$$
$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2}\, \overline{Ar} \, . \, \overline{Ep},$$
$$\triangle EIr = \tfrac{1}{2}\, \overline{Ir} \, . \, \overline{Ep},$$

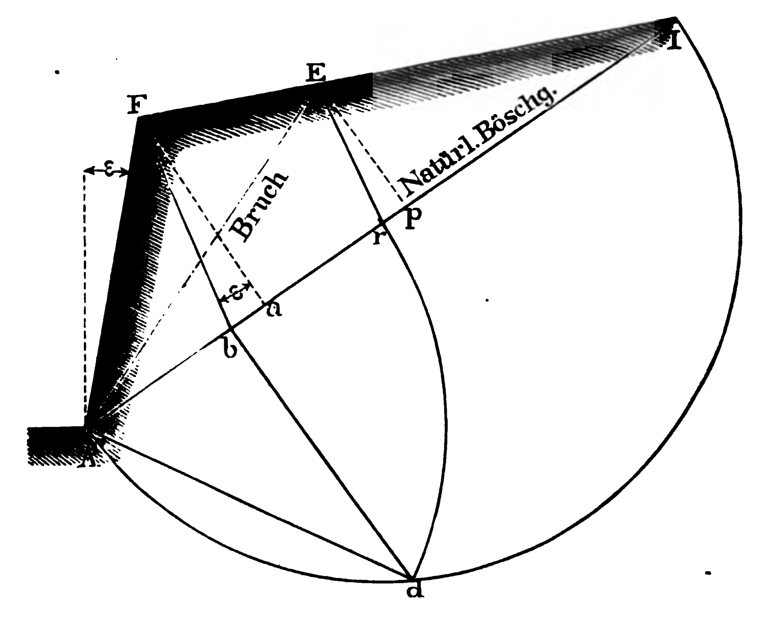
ist aber:

$$\overline{AI} \, . \, \overline{Fa} = 2 \, . \, \overline{Ar} \, . \, \overline{Ep} + \overline{Ir} \, . \, \overline{Ep}$$
$$= \overline{Ep} \, (2 \, \overline{Ar} + \overline{Ir})$$
$$= \overline{Ep} \, (\overline{Ar} + \overline{Ar} + \overline{Ir})$$
$$= \overline{Ep} \, (\overline{Ar} + \overline{AI}),$$

woraus die Proportion sich ergibt:

$$\overline{AI} : (\overline{Ar} + \overline{AI}) = \overline{Ep} : \overline{Fa} \, ... \, (185).$$

Fig. 93.



Da sowol die beiden kleinen Dreiecke *Fab* und *Epr*, als auch die beiden grossen Dreiecke *FIb* und *EIr* unter einander ähnlich sind, so folgt einerseits:

$$\overline{Er} : \overline{Fb} = \overline{Ep} : \overline{Fa},$$

und andererseits:

$$\overline{Er} : \overline{Fb} = \overline{Ir} : \overline{Ib},$$

somit durch Vergleichung:

$$\overline{Ep} : \overline{Fa} = \overline{Ir} : \overline{Ib}.$$

Berücksichtigt man diese Relation in der vorigen Proportion (185), so findet man:

$$\overline{AI} : (\overline{Ar} + \overline{AI}) = \overline{Ir} : \overline{Ib},$$

hieraus aber die Gleichung:

$$\overline{AI} \,.\, \overline{Ib} = \overline{Ir}\,(\overline{Ar} + \overline{AI}),$$

somit auch:

$$\overline{AI}\,(\overline{AI} - \overline{Ab}) = (\overline{AI} - \overline{Ar})\,(\overline{AI} + \overline{Ar}),$$

und:

$$\overline{AI}^2 - \overline{AI} \,.\, \overline{Ab} = \overline{AI}^2 - \overline{Ar}^2,$$

woraus endlich wegen $\overline{AI} \,.\, \overline{Ab} = \overline{Ar}^2$ die unter (184) behauptete Proportion folgt:

$$\overline{Ab} : \overline{Ar} = \overline{Ar} : \overline{AI}.$$

Auf Grundlage dieser Eigenschaft kann man nun zur grafischen Aufsuchung der Linie $\overline{AE}$, beziehungsweise des Punktes E schreiten, wie folgt:

Man zeichne zunächst die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ und über $\overline{AI}$ als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in b ein Perpendikel auf die natürliche Böschung, bis jener Halbkreis in d getroffen wird, mache $\overline{Ar} = \overline{Ad}$ und ziehe schliesslich $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$.

Beweis.

Der Construction zu Folge ist:

$$\overline{Ar}^2 = \overline{Ad}^2 = \overline{Ab} \,.\, \overline{AI},$$

oder:

$$\overline{Ab} : \overline{Ar} = \overline{Ar} : \overline{AI},$$

daher in der That so, wie es die Relation (184) fordert, wonach die Richtigkeit der angegebenen Construction einleuchtet.

Wenn man den Fusspunkt der Orientirungslinie (b) nach der Richtung der Oberfläche des Erdreiches $\overline{FI}$ auf die Stützwand $\overline{AF}$ projicirt, so kann man ein anderes, jedoch dem vorigen ähnliches Verfahren anwenden, wobei der zu zeichnende Halbkreis auf die Wandböschung $\overline{AF}$ aufzusetzen ist. Hiedurch erhält man die Figur 94, worin Folgendes angeordnet ist:

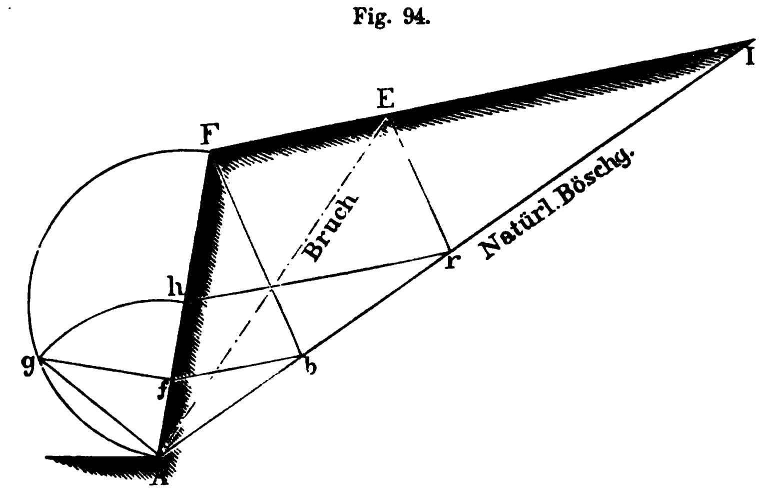
$\overline{bf} \parallel \overline{FI}$, Halbkreis über $\overline{AF}$, $\overline{fg} \perp \overline{AF}$, $\overline{Ah} = \overline{Ag}$, $\overline{hr} \parallel \overline{FI}$, $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$.

Jetzt ist, analog wie in der früheren Figur, die Proportion vorhanden:

$$\overline{Af} : \overline{Ah} = \overline{Ah} : \overline{AF} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (186),$$

deren Existenz nothwendig mit jener der zuerst aufgestellten Proportion (184) verbunden ist.

Fig. 94.



Eine dritte ähnliche Constructionsart ergibt sich endlich, wie die Fig. 95 zeigt, dadurch, dass man den gedachten Fusspunkt der Orientirungslinie (b) nach der Richtung der Stützwand $\overline{AF}$ auf die Oberfläche des Erdreiches projiicirt, und das bezügliche grafische Verfahren auf die in der jetzt stattfindenden Proportion:

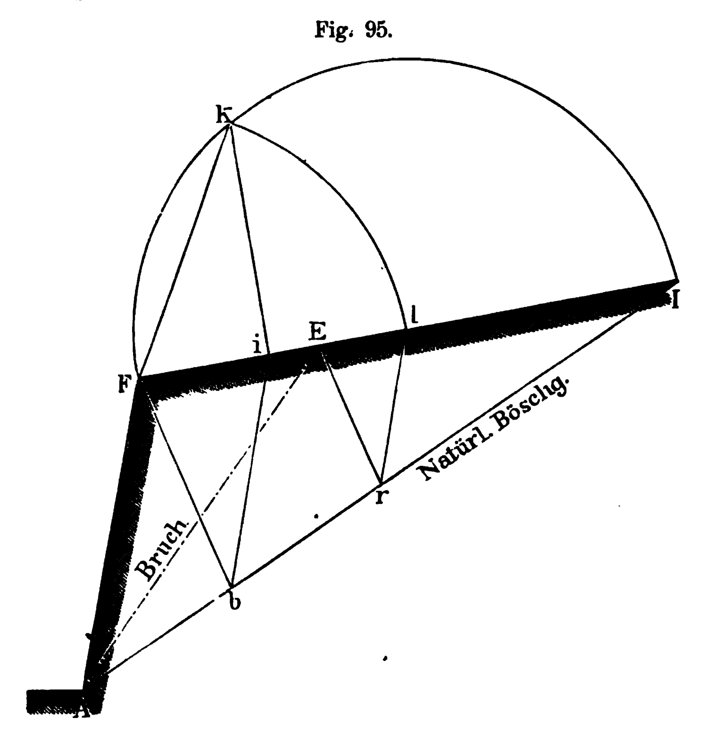
$$\overline{Fi} : \overline{Fl} = \overline{Fl} : \overline{FI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (187)$$

ersichtliche Eigenschaft gründet, so dass man in diesem Falle den Halbkreis auf $\overline{FI}$ als Durchmesser aufzusetzen, im Uebrigen aber $\overline{bi} \parallel \overline{AF}$, $\overline{ki} \perp \overline{FI}$, $\overline{Fk} = \overline{Fl}$, $\overline{lr} \parallel \overline{AF}$ und $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$ zu machen hat.

Durch die Anwendung jeder dieser drei Methoden, bei denen der betreffende Halbkreis aufeinanderfolgend auf jede der einzelnen

Seiten des Dreieckes AFI zu stehen kommt, erhält man den zu suchenden Bruchpunkt E und die Bruchlinie $\overline{AE}$ unter Aufrechthaltung der Eigenschaft (177), wonach $\triangle AEF = \triangle AEr$ sein muss.

Fig. 95.



Welche von den besprochenen drei Constructionsarten die zweckmässigste Anwendung bietet, dies hängt einerseits von der besonderen Form des Dreieckes AFI, und andererseits von der Grösse des Platzes ab, welcher zur Ausführung der Zeichnung zu Gebote steht.

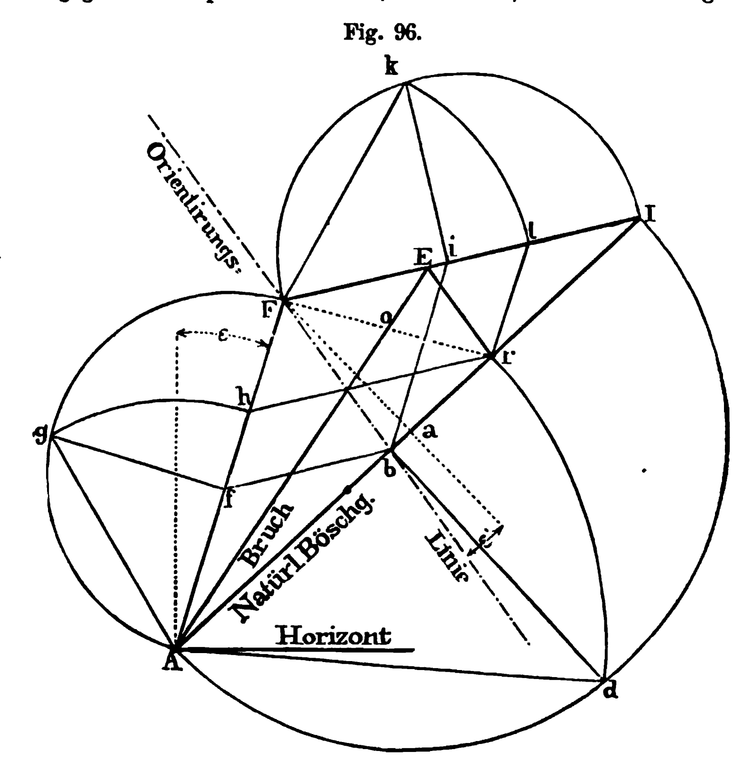
Anmerkung.

Es ist wohl nicht schwer einzusehen, dass, wenn die Orientirungslinie $\overline{Fb}$, wozu $\overline{Er}$ parallel läuft, nach einer anderen Richtung gezogen werden würde, also die beiden Winkel aFb und ε nicht einander gleich wären, durch die angegebenen Constructionen dennoch schliesslich die beiden Dreiecke AFE und AEr der Grösse nach einander gleich werden müssten.

Denkt man sich nämlich die ganze Figur um den Punkt A gedreht, so dass der Neigungswinkel der Wand gegen das Loth nicht mehr ε, sondern ε' wird, während der Winkel ε für die Orientirungslinie, so wie alles Uebrige, insofern es lediglich vom geometrischen Standpunkte aus betrachtet wird, unverändert bleibt; so ist augenscheinlich das Schlussergebniss dasselbe.

Verwechselt man nun die ganz willkührlichen Bezeichnungen ε und ε' mit einander, so kann man dann den Fall derart ansehen, wie wenn die Stützwand den Neigungswinkel ε gegen das Loth hätte, während die fragliche Orientirungslinie um den Winkel ε' von dem auf die natürliche Böschung gefällten Perpendikel abweicht, also eben so, wie dies in der Figur 96

Fig. 96.



dargestellt ist, wo man nach Durchführung jeder der angegebenen drei Constructionsmethoden schliesslich ebenfalls erhält:

$$\triangle AFE = \triangle AEr \text{ und } \overline{Fo} = \overline{or},$$

wenn auch an und für sich diese Dreiecke andere werden, als mit Zugrundelegung derjenigen Orientirungslinie, welche um den $\measuredangle\ \varepsilon$ gegen das Loth $\overline{Fa}$ geneigt ist.

Es ist nöthig, dies hervorzuheben, weil man später auch auf solche Fälle kommen wird, wo eine Verschiedenheit zwischen den hier mit ε und ε' bezeichneten Winkeln thatsächlich stattfindet.

Die gedachten drei Constructionsmethoden sind in der Figur 96 durchgeführt, wie folgt:

1. Halbkreis über $\overline{AI}$, $\overline{bd} \perp \overline{AI}$, $\overline{Ar} = \overline{Ad}$ und $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$.

2. $\overline{fb} \parallel \overline{FI}$, Halbkreis über $\overline{AF}$, $\overline{fg} \perp \overline{AF}$, $\overline{Ah} = \overline{Ag}$, $\overline{hr} \parallel \overline{FI}$ und $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$.

3. $\overline{bi} \parallel \overline{AF}$, Halbkreis über $\overline{FI}$, $\overline{ik} \perp \overline{FI}$, $\overline{Fl} = \overline{Fk}$, $\overline{lr} \parallel \overline{AF}$ und $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$.

Für alle aber ist $\overline{Fa} \perp \overline{AI}$ und $\measuredangle\, aFb = \varepsilon'$, nämlich verschieden von dem Neigungswinkel der Stützwand ε*).

§. 50.

Annäherungs-Methoden zur Construction des Bruchwinkels für den im vorigen §. behandelten Fall. Eine Methode dieser Art besteht darin, dass man zunächst nach dem Augenmasse eine Böschungslinie $\overline{AE'}$ (Fig. 97) zieht, von der man glaubt, dass sie die Bruchlinie vorstellen könnte, sodann hinterher untersucht, wie gross der hiemit begangene Fehler sich herausstellt, endlich aber zur Corrigirung dieses Fehlers schreitet.

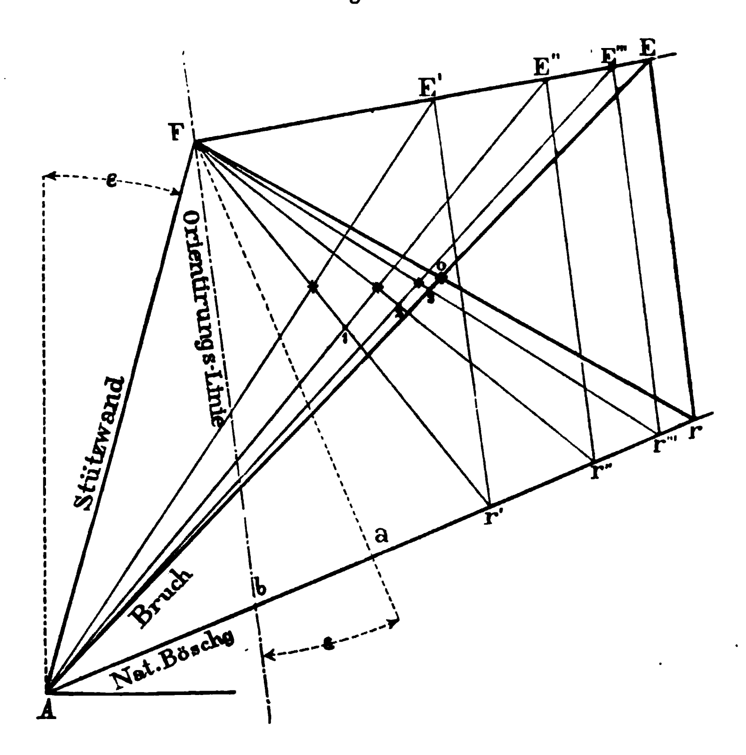
Bei der diesfälligen Controle benützt man die im §. 48 (Absatz lit. D) angedeutete Eigenschaft, wonach in dem Constructions-Vierecke durch die als erste Diagonale fungirende Bruchlinie die zweite Diagonale halbirt werden soll, so dass man in Bezug auf dasjenige Viereck, welches der oben angenommenen Böschungslinie $\overline{AE'}$ entspricht, blos nachzusehen hat, ob die erwähnte Eigenschaft wirklich stattfindet oder nicht.

---

*) Auf diese bemerkenswerthen Constructionen ist der Verfasser im Jahre 1867 durch die Mithilfe seiner ehemaligen Schüler, der Herren Johann Brik und Johann Buberl (damals Assistenten am hiesigen k. k. Polytechnicum, jetzt Eisenbahn-Ingenieure) gelangt, welche er nämlich mit der Aufgabe betraute, unter Zugrundelegung der Gleichung (177) ebenfalls darüber Studien anzustellen, in welcher Weise die hiedurch bestimmte Bruchrichtung im Erdkörper auf rein grafischem Wege directe aufgefunden werden kann.

Das fragliche Constructions-Viereck ist in der Figur mit $AFE'r'$ bezeichnet, worin bekanntlich die Seite $\overline{Er'}$ parallel zur Orientirungslinie $\overline{Fb}$, diese aber so zu zeichnen ist, dass ihre linksseitige Abweichung von dem Perpendikel $\overline{Fa}$ auf die natürliche Böschung $\overline{Aa}$ geradezu dem $\measuredangle\, \varepsilon$ gleich kommt.

Fig. 97.



Hierin ist $\overline{AE'}$ die erste und $\overline{Fr'}$ die zweite Diagonale; beide kreuzen sich in dem Punkte, welcher in der Figur mit dem ersten links gelegenen Sternchen (*) angezeigt ist, und, wie gesagt, der Halbirungspunkt der zweiten Diagonale sein müsste, wenn $\overline{AE'}$ wirklich die Bruchlinie wäre.

Bei der blos nach dem Augenmasse angenommenen Richtung der Linie $\overline{AE'}$ würde es lediglich ein Zufall sein, wenn die

gewünschte Eigenschaft sofort zutreffen möchte; in der Regel wird es sich ergeben, dass jener Kreuzungspunkt die gedachte Diagonale nicht halbirt. So z. B. liegt in der betrachteten Figur der Halbirungspunkt der Diagonale $\overline{Fr'}$ in 1, somit muss die anfänglich gezogene Böschungslinie, um die Bruchlinie zu bekommen, corrigirt werden.

Eine solche Correction kann am einfachsten dadurch ausgeführt werden, wenn man die durch den factischen Halbirungspunkt 1 zu ziehende Richtungslinie $\overline{AE''}$ anstatt der vorigen Böschung $\overline{AE'}$ substituirt.

Nun wiederhole man das vorige Controls-Verfahren, indem man $\overline{E''r''} \parallel \overline{Fb}$ zeichnet, in dem hiedurch erhaltenen neuerlichen Constructions-Vierecke $AFE''r''$ die zweite Diagonale $\overline{Fr''}$ zieht, von dieser den Halbirungspunkt (in der Figur mit 2 bezeichnet) aufsucht, endlich aber beobachtet, ob und inwiefern derselbe von dem Kreuzungspunkte der beiden Vierecks-Diagonalen (welcher wieder mit einem Sternchen, dem zweiten von der linken Seite her, bezeichnet erscheint) abweicht.

Wenn eine solche Abweichung, wie es in der betrachteten Figur wirklich der Fall ist, vorkommt, so muss man abermals eine Correction in ähnlicher Weise vornehmen, und dieses Verfahren noch weiter, und zwar so lange wiederholen, bis in dem letztcorrigirten Constructions-Vierecke die zweite Diagonale durch die erste halbirt wird, wenigstens so nahe, dass die allfällige Abweichung als verschwindend betrachtet werden kann.

In der hieher gehörigen Figur ist, wie zu ersehen, ein drittes und ein viertes Mal die Correctur in der angedeuteten Weise vorgenommen, und es sind hiernach aufeinanderfolgend die weiteren Böschungen $\overline{AE'''}$ und $\overline{AE}$, die fraglichen Abweichungen aber allmälig kleiner erhalten worden, so dass die letzte Böschung bereits die geforderte Eigenschaft ($\overline{Fo} = \overline{or}$) mit hinlänglicher Genauigkeit zeigt. Somit kann $\overline{AE}$ als die Bruchlinie, beziehungsweise Bruchfläche gelten.

Bei einiger Uebung kann man es dahin bringen, dass man schon mit der ersten, allenfalls mit der zweiten Correctur zum

Ziele gelangt; wobei man insbesondere mit Rücksicht auf die Bemerkung im §. 44 (Punkt 4) die erste angenäherte Wahl für die Bruchböschung so zu treffen hat, dass der Bruchwinkel kleiner oder grösser, als die Hälfte des zwischen der Stützwand und der natürlichen Erdböschung gelegenen Winkels, ausfällt, je nachdem die Oberfläche des Erdreiches, von der Stützwandkrone angefangen, ansteigt oder abfällt.

In der obigen Figur 95 hat man auf diese Regel keine Rücksicht genommen, vielmehr die erste Böschungslinie $\overline{AE'}$, von welcher die Untersuchung ausging, mit Absicht unrichtiger angenommen, als es voraussichtlich nothwendig gewesen wäre, und zwar deshalb, um die durch die Correcturen entstandenen Constructionslinien nicht gar zu nahe an einander zu bringen und hiedurch die ganze Zeichnung möglichst deutlich zu machen. Dieserwegen hat man daselbst bis zur vierten Correctur gehen müssen, ein Fall, der sonst wohl nicht leicht vorkommt.

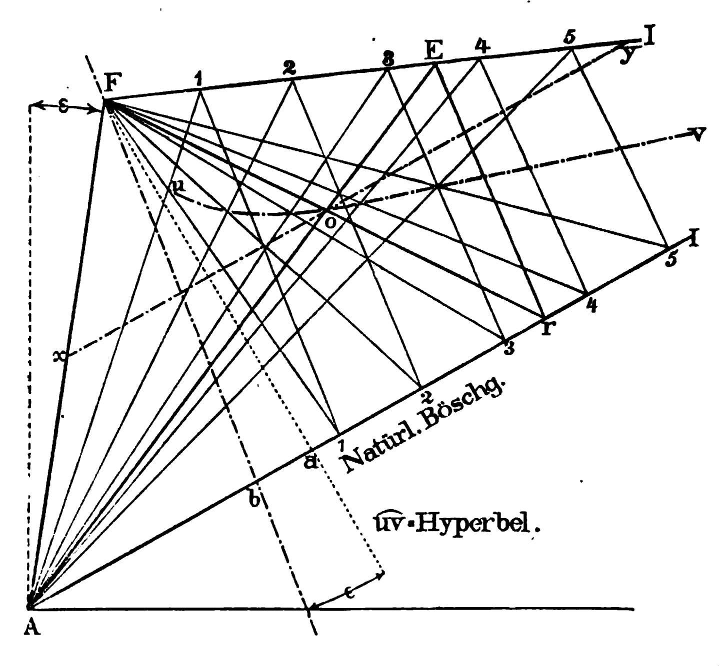
Eine z w e i t e Annäherungs-Methode zur Construction des fraglichen Bruchwinkels besteht darin, dass man in dem Querprofile des Erdkörpers zwei Linien ($\overline{xy}$ und $\overline{uv}$, Fig. 98), wovon jede den Durchschnittspunkt der richtigen Vierecks-Diagonalen, nämlich den Punkt o, enthalten muss, aufsucht, und auf solche Weise die Lage dieses Punktes ermittelt, mit dessen Benützung sodann das der Bruchfläche zugehörige Constructions-Viereck $AFEr$ und die Richtung der Bruchfläche $\overline{AE}$ selbst sich ergibt.

Die erste jener beiden Linien ist, wie bereits angedeutet, die Gerade $\overline{xy}$, welche insbesondere durch den Halbirungspunkt x der Stützwand $\overline{AF}$ geht und zur natürlichen Böschung $\overline{AI}$ parallel läuft. Es ist also zunächst $\overline{Ax} = \overline{Fx} = \frac{1}{2}\overline{AF}$ und $\overline{xy} \parallel \overline{AI}$ zu machen. Dass der Durchschnittspunkt o der beiden Diagonalen $\overline{Fr}$ und $\overline{AE}$ von dem zu suchenden Constructions-Vierecke $AFEr$ in der Geraden $\overline{xy}$ liegen muss, ist — weil man schliesslich $\overline{Fo} = \overline{or}$ erhalten soll — aus der Aehnlichkeit der zwei Dreiecke AFr und xFo unmittelbar einzusehen.

Die zweite massgebende Linie ist die Curve $\widehat{uv}$, gezogen durch diejenigen Kreuzungspunkte, welche in Folge des Durch-

schnittes von je zwei zusammengehörigen Diagonalen in dem Falle entstehen, wenn man eine Reihe von verschiedenen Vierecken $AF\,11$, $AF\,22$, $AF\,33$, $AF\,44$, $AF\,55$, u. s. w. zeichnet, innerhalb welchen das zur Bruchebene $\overline{AE}$ gehörige Constructions-Viereck $AFEr$ gelegen ist und welche sämmtlich so geformt sind, dass die Vierecksseiten $\overline{1,1}$, $\overline{2,2}$, $\overline{3,3}$, $\overline{4,4}$, $\overline{5,5}$ parallel zur Orientirungslinie $\overline{Fb}$ laufen. Dass der fragliche Punkt o in

Fig. 98.



der auf eine solche Art ermittelten Curve liegen muss, ist mit Rücksicht auf das Entstehen dieser Curve selbstverständlich. Wo die Vierecksseiten $\overline{1,1}$, $\overline{2,2}$, $\overline{3,3}$, u. s. w. gezogen werden, ist übrigens beliebig; je mehr man solche Seiten zieht, desto mehr Curvenpunkte ergeben sich und desto genauer wird man die Curve $\widehat{uv}$ selbst zeichnen können. Nur wird man, wie schon angedeutet, die Wahl so treffen, dass man — so weit dies von vorne herein nach dem Augenmasse sich beurtheilen lässt —

einige Curvenpunkte rechts und einige links von dem zu suchenden Punkte o erhält, um nämlich in dessen Nähe die Curve mit ausreichender Schärfe zeichnen zu können.

Hat man auf diese Weise einerseits die Gerade $\overline{xy}$, und andererseits die Curve $\widehat{uv}$ construirt, so ist der Durchschnittspunkt beider Linien (nämlich der Punkt o) gefunden.

Die Gerade $\overline{AoE}$ ist sodann die fragliche Bruchlinie, von deren richtigen Lage man sich sofort dadurch überzeugen wird, dass man $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$ macht, in dem so erhaltenen Vierecke $AFEr$ die zweite Diagonale $\overline{Fr}$ zieht und beobachtet, ob diese Diagonale durch den Punkt o geht und zudem durch diesen halbirt wird, indem ja schliesslich $\overline{Fo} = \overline{or}$ erhalten werden muss.

Was die Natur der besprochenen Curve betrifft, so bildet die Aufsuchung ihrer Gleichung ein interessantes Problem der Geometrie, deren Ausführung als mathematische Uebung dem studirenden Leser überlassen wird.

Fig. 99.

$\overline{AF}$ = Stützwand,
$\overline{AI}$ = nat. Böschung,
$\overline{AE}$ = Bruchböschung,
$\overline{FoI}$ = Hyperbel.

Hier soll nur in Kürze bemerkt werden, dass die fragliche Curve eine Hyperbel ist, wovon der in Betracht kommende Ast einerseits durch die Stützwandkrone F, und andererseits

durch die Stelle I geht, wo sich die natürliche Böschung $\overline{AI}$ mit der Erdreich-Oberfläche schneidet, wie dies beispielsweise in der Figur 99 angedeutet ist.

Bei nur einiger Uebung wird man auch mittelst dieser Methode schnell zum Ziele gelangen, zumal man hiezu nicht die ganze innerhalb des Erdprofiles fallende Curve, sondern blos einige Punkte davon, welche in der Nähe der muthmasslich richtigen Kreuzungsstelle o liegen, aufzusuchen nöthig hat, überdies die einzelnen Constructions-Vierecke nicht vollständig auszuzeichnen braucht, sondern — indem die allen gemeinschaftlichen Ecken A und F gegeben sind — nur die jedesmal in Betracht kommenden zwei neuen Ecken, so wie den Durchschnitt der jeweiligen zwei Diagonalen, ohne auch diese in der ganzen Länge zu ziehen, markiren wird.

§. 51.

Genaue geometrische Construction des Bruchwinkels und der Grösse des Erddruckes, wenn die Oberfläche des Erdreiches nach einem geradlinigen Polygone profilirt ist.

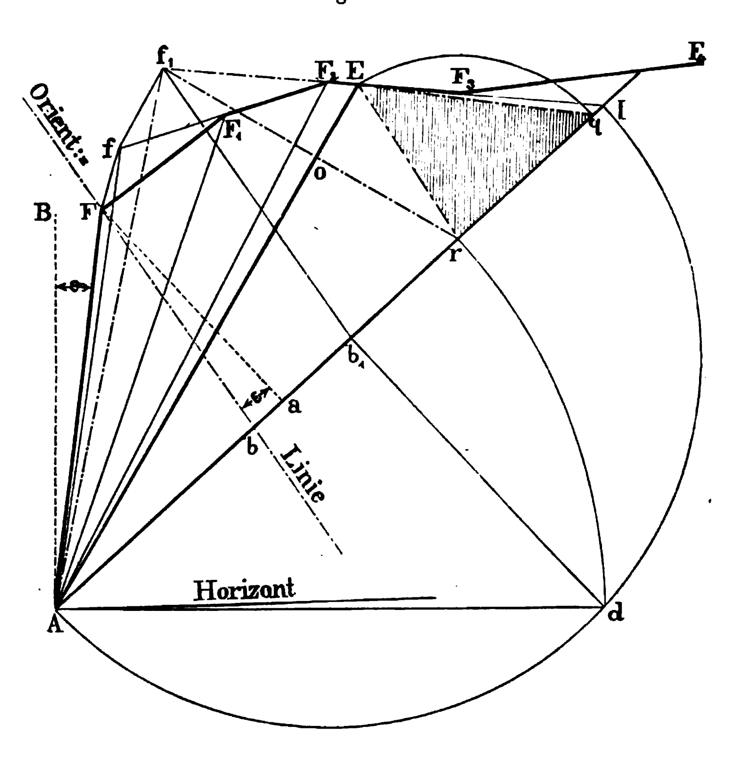
In der Figur 100 stellt $\overline{AF}$ die Stützwand und die gebrochene Linie $FF_1F_2F_3F_4$ die Oberfläche des Erdreiches vor. Die nächste Aufgabe soll nun sein, die bezügliche Bruchlinie $\overline{AE}$ in Hinblick auf die Eigenschaft (177) zu finden, wonach nämlich die Construction so anzuordnen ist, dass man erhält:

$$\text{area } AFF_1F_2E = \triangle\, AEr,$$

wenn $\overline{Er}$ parallel zur Orientirungslinie $\overline{Fb}$ gezogen wird.

Zu diesem Behufe beurtheile man entweder unmittelbar nach dem Augenmasse, oder, wenn nöthig, mittelst eines vorläufigen Versuches, in welche Polygonsseite die Bruchlinie $\overline{AE}$ treffen dürfte. So z. B. ist in der angenommenen Figur zu erwarten, dass die fragliche Polygonsseite jene mit F_2F_3 bezeichnete sei, dass also der Bruchpunkt E zwischen die zwei Polygonsecken F_2 und F_3 hineinfallen werde.

Fig. 100.



Von diesen zwei Polygonsecken fasse man insbesondere diejenige (F_2) in's Auge, welche näher bei der Stützwand liegt, ziehe von dem Fusspunkte der letzteren die Diagonale zu jener Polygonsecke (also die Gerade $\overline{AF_2}$), und verwandle das Erdprofil AFF_1F_2, welches zwischen der eben gezogenen Diagonalen $\overline{AF_2}$ und der Stützwand $\overline{AF}$ liegt, in ein Dreieck Af_1F_2 von der Art, dass $\overline{AF_2}$ die Eine Dreiecksseite bildet, in die verlängerte Richtung der obbemerkten Polygonsseite $\overline{F_2F_3}$ die zweite Dreiecksseite $\overline{f_1F_2}$ zu liegen kommt, die dritte Dreiecksseite $\overline{Af_1}$ aber aus der Bedingung sich ergibt, dass das Dreieck denselben Flächenraum, wie das zu verwandelnde Erdprofil erhält, also:

$$\text{area } AFF_1F_2 = \triangle Af_1F_2$$

wird.

Bei dieser Figurenverwandlung wird man, von der Wandkrone beginnend und von einer Polygonsecke zur nächsten vorschreitend, zuerst $\triangle AFF_1 = \triangle AfF_1$ construiren, wobei $\overline{Ff} \parallel \overline{AF_1}$ ist und $\overline{fF_1}$ die Verlängerung von $\overline{F_1F_2}$ bildet, sodann $\triangle AfF_2 = \triangle Af_1F_2$ machen, indem man hiebei $\overline{ff_1} \parallel \overline{AF_2}$ zieht und $\overline{F_2F_3}$ bis f_1 verlängert, u. s. w.; bis man diejenige Polygonsseite erreicht hat, wohin die Bruchlinie ausmündet.

Auf diese Weise wurde in der Figur 100 der Punkt f_1 gefunden, und es ist nunmehr daselbst:

$$\triangle AFF_1 = \triangle AfF_1$$
$$\triangle AfF_2 = \triangle Af_1F_2,$$

also auch der oben gestellten Anforderung gemäss:

$$\text{area } AFF_1F_2 = \triangle Af_1F_2.$$

Verlängert man jetzt die vorgedachte Polygonsseite $\overline{F_2F_3}$ auch nach rückwärts bis I, wo die natürliche Böschung $\overline{AI}$ getroffen wird, so vereinfacht sich die gestellte Aufgabe dahin, in dem Dreicke Af_1I die Bruchlinie $\overline{AE}$ derart zu ziehen, dass man erhält:

$$\triangle Af_1E = \triangle AEr,$$

so dass dann Af_1Er das dazu gehörige Constructions-Viereck bildet, in welchem $\overline{AE}$ und $\overline{f_1r}$ die beiden Diagonalen sind, wovon diese durch jene in dem Punkte o halbirt werden soll.

Es ist also gerade so, wie wenn ein neuer Fall vorliegen würde, in welchem $\overline{Af_1}$ die Stützwand bedeutet, und hinter derselben das Erdprofil nach der geraden Linie $\overline{f_1I}$ begrenzt ist; nur hat man dabei zu beachten, dass die bezügliche Orientirungslinie $\overline{f_1b_1}$ nicht nach dem neuen Wandneigungswinkel BAf_1, sondern nach dem ursprünglichen $\sphericalangle\, \varepsilon$ (also $\overline{f_1b_1} \parallel \overline{Fb}$) zu ziehen, und hiernach das Constructions-Viereck Af_1Er ausfindig zu machen ist.

Hieraus ist zu entnehmen, dass die im §. 49 erläuterten grafischen Methoden auch gegenwärtig in Anwendung kommen können. Macht man z. B. gleich von der auf die Figur 93 Bezug nehmenden Methode, mit Berücksichtigung der Schluss-

Anmerkung im §. 49, den entsprechenden Gebrauch, so wird man die Zeichnung anordnen, wie folgt:

Halbkreis über den Durchmesser $\overline{AI}$; $\overline{b_1 d} \perp \overline{AI}$; $\overline{Ad} = \overline{Ar}$; $\overline{Er} \parallel \overline{f_1 b_1} \parallel \overline{Fb}$.

Jetzt ist $\overline{f_1 o} = \overline{or}$, daher der Bruchpunkt E, die Bruchlinie $\overline{AE}$ und das Bruchprisma $Af_1E = AFF_1F_2E$ gefunden.

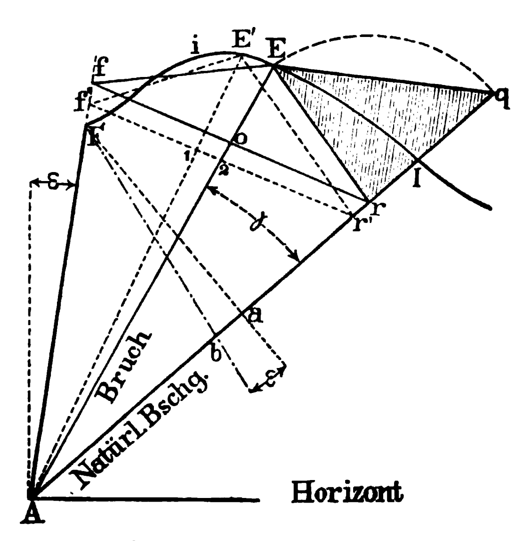
Construirt man endlich das (schraffirt angezeigte) gleichschenkelige Dreieck, indem man $\overline{Er} = \overline{qr}$ macht, so stellt dieses das Profil desjenigen Erdprismas vor, dessen Gewicht gleich der Intension des Druckes ist, so dass man hat:

$$\text{Erddruck } D = \left\{\begin{matrix}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } Erq\end{matrix}\right\}.$$

§. 52.

Annäherungsmethode zur Construction des Bruchwinkels und des Erddruckes bei beliebig gestalteter Oberfläche des Erdreiches hinter der Stützwand.

Fig. 101.



Ist (Fig. 101) $\overline{AF}$ die um den Winkel ε geneigte Stützwand, $\overparen{FiEI}$ die obere Begrenzung des aufgeschichteten Erd-

reichs, $\overline{AI}$ die natürliche Böschung desselben, so handelt es sich zu Folge der Eigenschaft (177) zunächst darum, die Bruchlinie $\overline{AE}$ derart zu bestimmen, dass man erhält:

$$\text{area } AFiE = \triangle AEr,$$

wenn $\overline{Er}$ parallel zu Orientirungslinie $\overline{Fb}$, diese aber bekanntlich so gezogen wird, dass $\overline{Fa} \perp \overline{AI}$ und $\sphericalangle aFb = \varepsilon$ ist.

Zu diesem Behufe gehe man in der Hauptsache nach der im §. 50 erläuterten ersten Annäherungs-Methode vor.

Man ziehe nämlich zunächst nach dem Augenmasse eine Böschungslinie $\overline{AE'}$, von der man glaubt, sie könnte ungefähr die Bruchlinie sein, und untersuche nun hinterher, inwieferne hiefür die in der ersten Hauptregel (177) enthaltene Eigenschaft zutrifft. Hiernach hat man die zwei Flächenräume $AFiE'$ und $AE'r'$ (wobei $\overline{E'r'} \parallel \overline{Fb}$ gezogen ist) zu vergleichen, was am besten dadurch geschieht, dass man die erstgenannte Fläche in ein geradliniges Dreieck verwandelt, welches die Böschungslinie $\overline{AE'}$ als Basis erhält, und worin der vorhandene Winkel bei A (nämlich $\sphericalangle E'AF$) gegeben ist, so dass es sich eigentlich blos darum handelt, die krumme Linie $\widehat{FiE'}$ durch eine Gerade zu ersetzen. Dieses in Folge der gedachten Umstaltung entstehende geradlinige Dreieck ist in der Figur mit $Af'E'$ bezeichnet, so dass man hat:

$$\text{area } AFiE' = \triangle Af'E'.$$

Jetzt ziehe man in dem so gefundenen Constructions-Vierecke $Af'E'r'$ die zweite Diagonale $\overline{f'r'}$ und sehe nach, ob der Durchschnittspunkt 1 beider Vierecks-Diagonalen in der Mitte zwischen f' und r' liegt.

Ist dieses der Fall, so bedeutet $\overline{AE'}$ unmittelbar die Bruchlinie. Im Gegenfalle aber muss man zur Corrigirung der falschen Böschungslinie $\overline{AE'}$ schreiten. Zu diesem Ende halbire man die Diagonale $\overline{f'r'}$, wodurch sich der von dem Durchschnitte 1 verschiedene Punkt 2 ergibt, und ziehe durch letzteren die neue Böschungslinie $\overline{AE}$ in der Erwartung, diese werde der fraglichen Bruchlinie schon näher liegen, vielleicht so nahe, dass man eine weitere Correctur vorzunehmen nicht mehr nöthig hat.

Zur Untersuchung dieser Alternative zeichne man das dazu gehörige Constructions-Viereck, indem man nämlich zuerst die gemischtlinige Figur $AFiE$, ähnlich wie zuvor, in das geradlinige Dreieck AfE verwandelt, $\overline{Er} \parallel Fb$ zieht, die zweite Vierecks-Diagonale $\overline{fr}$ zeichnet, und sehe nach, ob diese letztere durch den Durchschnitt beider Vierecks-Diagonalen, der jetzt in o ist, halbirt wird, oder aber nicht.

Im Bejahungsfalle — wie er in der betrachteten Figur thatsächlich eintritt — liegt die Bruchlinie wirklich in der corrigirten Böschung $\overline{AE}$, es ist also der Winkel EAI der Bruchwinkel γ, und man hat jetzt:

$$\text{area } AFiE = \triangle AfE = \triangle AEr,$$

somit die oben verlangte Eigenschaft erreicht.

Nöthigenfalls wird man die Corrigirung neuerdings fortsetzen, und so oft wiederholen, bis das Resultat zufriedenstellend ausfällt.

Macht man endlich, nachdem die Bruchlinie $\overline{AE}$ gefunden ist, $\overline{qr} = \overline{Er}$, so hat man der zweiten Hauptregel (178) zu Folge:

$$\text{Erddruck } D = \text{Gewicht des Erdprismas } Eqr.$$

§. 53.

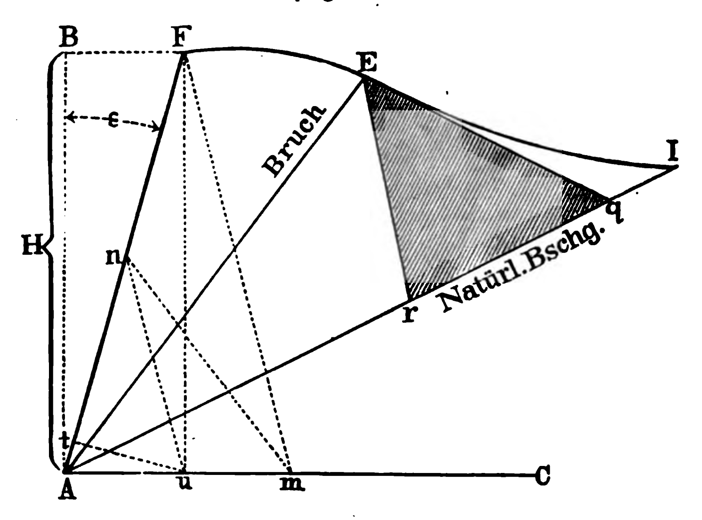
Grafische Darstellung des Werthes von $\frac{w}{g}$, wo, per Cubikeinheit verstanden, g das Gewicht des Erdreiches, w aber jenes der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit vorstellt, welche, der Grösse nach, denselben Druck, wie das Erdreich an die Stützwand ausüben würde.

Hat man in einem gegebenen Falle (Fig. 102) dasjenige Erdprisma Erq construirt, dessen Gewicht gleich der Intension des Erddruckes ist, so verfahre man, zur Erreichung der in der Ueberschrift bezeichneten Absicht, in folgender Art:

Zunächst übertrage man das Profil Erq auf den Platz Amn, indem man $(\overline{Er} \doteq \overline{qr}) = (\overline{An} = \overline{Am})$ construirt, so dass nunmehr $\triangle Amn \cong \triangle Erq$ wird, indem man nämlich beachtet, dass

die Dreieckswinkel bei A und r die gleiche Grösse $(90^0 - \varepsilon)$ haben. Hierauf verwandle man das $\triangle \overline{Amn}$ in das $\triangle \boldsymbol{AFu}$, welches die Höhe $\overline{AB} = H$ besitzt, wobei man den Punkt u für die Basis findet, wenn man $\overline{nu} \parallel \overline{Fm}$ zieht.

Fig. 102.



Wird endlich von u auf die Stützwand das Perpendikel $\overline{tu}$ gefällt, also $\overline{tu} \perp \overline{AF}$ gezogen, so lässt sich zeigen, dass jetzt die Relation existirt:

$$\frac{w}{g} = \frac{\overline{tu}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{tu}}{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (188).$$

Beweis.

Der Erddruck ist:

$$D = g \,.\, \triangle Eqr = g \,.\, \triangle AFu = \tfrac{1}{2} g \,.\, \overline{AF} \,.\, \overline{tu}.$$

$$= \tfrac{1}{2} g \,.\, \frac{\overline{AB}}{\cos \varepsilon} \,.\, \overline{tu} = \tfrac{1}{2} g \,.\, \frac{H}{\cos \varepsilon} \,.\, \overline{tu}.$$

Der eben so grosse hydrostatische Druck auf die Wand $\overline{AF}$, wenn an diese die tropfbare Flüssigkeit mit dem Einheitsgewichte w drücken würde, ist aber nach Gleichung (4):

$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon}.$$

Somit folgt durch Gleichsetzung der so erhaltenen zwei Werthe von D:

$$wH = g \,.\, \overline{tu},$$

und hieraus:

$$\frac{w}{g} = \frac{\overline{tu}}{H}, \text{ w. z. b. w.}$$

Beispiel.

Um das hier, so wie unter Einem das früher Gesagte durch ein besonderes Beispiel zu erläutern, nehme man als solches dasjenige an, welches im vierten Capitel vor Schluss des §. 43 rechnungsmässig behandelt wurde und nunmehr in grafischer Weise aufgelöset werden soll.

Diese Auflösung ist in der Figur 103 zu ersehen, wo zugleich der Massstab angegeben ist, nach welchem man die Zeichnung angefertiget hat.

Fig. 103.

Abmessungen:

$\overline{qr} = 11 \cdot 9'$,

$\overline{Ep} = 11 \cdot 5'$,

$\triangle Eqr = 6 \cdot 84 \square'$,

$\overline{tu} = 4 \cdot 4'$,

$\frac{\overline{tu}}{\overline{AB}} = 0 \cdot 147$

$= \frac{w}{g}$:

Es sind nämlich hiefür folgende Daten vorhanden:

Höhe der Stützwand .... $\overline{AB} = H = 30$ Fuss,
Neigungswinkel dieser letzteren gegen das Loth $= \varepsilon$,
und hiefür .... $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{4}$,
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe, und zwar einerseits für die natürliche Erdböschung .... $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{5}$,
andererseits aber für die von der Stützwandkrone ansteigende Erdreich-Oberfläche .... $\operatorname{tg} \alpha' = 4\frac{1}{4}$,
endlich
Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches .... $g = 75$ Pfd.

Das Erste ist, das in Betracht kommende Erdprofil AFI zu zeichnen.

Mit Rücksicht auf den angenommenen Massstab mache man daher $\overline{Aa}$ horizontal, $\overline{AB} \perp \overline{Aa}$, $\overline{AB} = 30'$, und (wegen $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{4}$) $\overline{BF} = \frac{1}{4}\overline{AB} = 7\frac{1}{2}'$, wodurch die Stützwand $\overline{AF}$ fixirt ist. Um die natürliche Böschung $\overline{AI}$ zu finden, kann man etwa $\overline{Aa} = 30'$ annehmen, und senkrecht hierauf $\overline{ab} = 25'$ stellen, weil ja $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{Aa}}{\overline{ab}} = \frac{6}{5}$ sein soll. Endlich ziehe man $\overline{Fc}$ lothrecht, nehme hiefür eine passende Grösse, etwa 8', an, und construire die Horizontale $\overline{cd} = 34'$, weil für die Oberflächenböschung $\overline{Fd}$, die man jetzt sucht, den vorigen Daten gemäss, $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\overline{cd}}{\overline{cF}} = 4\frac{1}{4}$ werden soll.

Das Zweite ist, dass man die Bruchfläche $\overline{AE}$ nach einer der früher angegebenen Zeichnungsregeln aufsucht, wobei man als Controle die in der Gleichung (177) enthaltene Eigenschaft benützen, nämlich nachsehen wird, ob in dem Constructions-Viereck $AFEr$ thatsächlich, wie verlangt, $\overline{Fo} = \overline{or}$ ist, wenn $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ steht, und $\measuredangle\, pEr = \measuredangle\, BAF = \varepsilon$ ist.

Als Drittes construire man das gleichschenkliche $\triangle\, Eqr$ (wobei $\overline{Er} = \overline{qr}$ ist), messe dessen Basis und Höhe auf dem Masstabe, und bestimme hiernach den Flächenraum dieses Dreieckes, wozu man nun allerdings den Weg der Rechnung, was übrigens höchst einfach ist, betreten wird. Geschieht dieses, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Basis } \overline{qr} = 11{\cdot}9' \\ \text{Höhe } \overline{Ep} = 11{\cdot}5'\end{array}\right\}, \; \triangle\, Eqr = \frac{11{\cdot}5 \times 11{\cdot}9}{2} = 6{\cdot}84\, \square'.$$

Multiplicirt man endlich diese Fläche mit der Erdkörperlänge 1 (normal auf die Zeichnungsebene verstanden), dann mit g, so ergibt sich die Grösse des Erddruckes, und zwar mit:

$$D = g\,.\,\triangle\, Eqr = 75 \times 6{\cdot}84 = 5130 \text{ Pfd.} = 51{\cdot}3 \text{ Ctr.}$$

Als Viertes kann man noch die Gleichung (688) durch Construction darstellen, zu welchem Behufe man $(\overline{An} = \overline{Am}) = (\overline{Er} = \overline{qr})$ aufzutragen,

$\overline{nu} \parallel \overline{Fm}$ zu ziehen, $\overline{tu} \perp \overline{AF}$ zu stellen, die Grösse des Lothes $\overline{tu}$ auf dem Massstab zu messen, und das Resultat durch die Wandhöhe $H = 30'$ zu dividiren hat.

In Ausführung dieser Absicht findet man:

$$\overline{tu} = 4 \cdot 4' \text{ und } \frac{w}{g} = \frac{\overline{tu}}{H} = \frac{4 \cdot 4}{30} = 0 \cdot 147,$$

wodurch also die tropfbare Flüssigkeit, welche an die Stützwand eben so stark, wie das Erdreich drücken würde, per Cubikeinheit das Gewicht:

$$w = 0 \cdot 147\, g = 11 \cdot 0 \text{ Pfd.},$$

erhält.

Vergleicht man diese auf dem constructiven Wege abgeleiteten Ergebnisse $\left[\frac{w'}{g} = 0 \cdot 147,\ w = 11 \cdot 0 \text{ Pfd.},\ D = 51 \cdot 3 \text{ Ctr.}\right]$ mit denjenigen, welche früher (Seite 173) durchgehends rechnungsmässig erhalten wurden $\left[\text{nämlich } \frac{w}{g} = 0 \cdot 148,\ w = 11 \cdot 1 \text{ Pfd.},\ D = 51 \cdot 49 \text{ Ctr.}\right]$, so erscheint die Uebereinstimmung derselben als eine befriedigende.

Die Ursache der obwaltenden Differenzen liegt offenbar in dem Umstande, dass Zeichnungen überhaupt auf mathematische Genauigkeit keinen Anspruch machen dürfen. Indessen wird man die Genauigkeit der Constructionen desto weiter treiben können, je grösser man den Massstab hiezu wählt auch wird man es nöthigen Falls vorziehen, einen Transversal-Massstab anzuwenden, um bei den Abmessungen auch Bruchtheile der Massstabs-Einheit besser ablesen zu können.

§. 54.

Allgemeine grafische Methode zur Bestimmung der Erddruckveränderungs-Curve, aus welcher die Zuname des Erddruckes von oben nach unten, so wie der Mittelpunkt des Druckes sich ergibt. (Figur 104.)

Man nenne:

- ε den Declinationswinkel der Stützwand $\overline{AF}$;
- H die ganze Wandhöhe $\overline{AB}$;
- D die Grösse des in dieser Höhe stattfindenden Erddruckes;
- x eine beliebig gewählte Druckhöhe;
- y den innerhalb derselben entstehenden Erddruck;

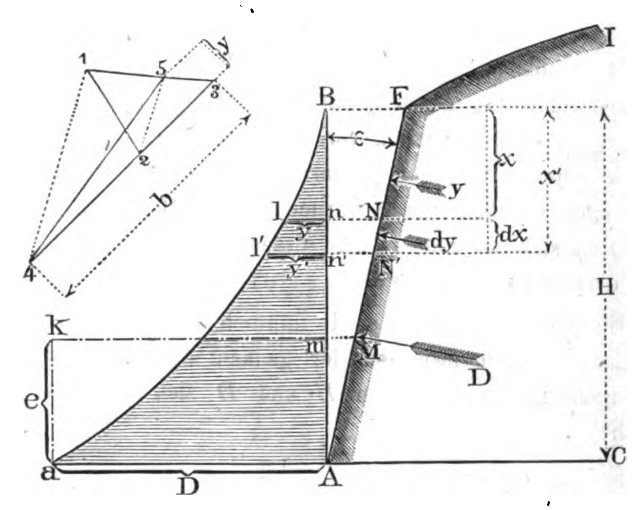
$dx = (x' - x)$ die unendlich kleine Vergrösserung der Druckhöhe x;

$dy = (y' - y)$ die unendlich kleine Zuname des Erddruckes, welche zugleich den Druck auf das Wandelement $\overline{NN'}$ darstellt;

e.... die Distanz des Druckmittelpunktes M (durch welchen die Resultirende des ganzen Druckes D geht) von dem durch den Fusspunkt A der Stützwand gelegten Horizont $\overline{AC}$;

und gehe sogleich, ähnlich wie auf Seite 108 und 116, auf die Gleichung der statischen Druckmomente über.

Fig. 104.



Hiernach ergibt sich:

$$D \, . \, \overline{AM} = \int_{x=0}^{x=H} \overline{AN} \, . \, dy \, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (189),$$

daher wegen:

$$\overline{AM} = \frac{e}{\cos \varepsilon} \text{ und } \overline{AN} = \left(\frac{H - x}{\cos \varepsilon}\right)$$

auch:

$$De = \int_{x=0}^{x=H} (H - x) \, dy = \Big[(H - x) \, y \Big]_{x=0}^{x=H} + \int_0^H y \, dx = \int_0^H y \, dx \ldots (190),$$

wenn man beachtet, dass bei dem in diesem Capitel vorausgesetzten Wegfalle der Erdcohäsionswirkung die Druckmomente in der ganzen Wandhöhe, also von $x = 0$ bis $x = H$, zu summiren sind, und das Glied $(H - x)\, y$, wenn es zwischen den angedeuteten Grenzen genommen wird, verschwindet.

Man kann nun x und y als rechtwinklige Coordinaten einer Curve $\widehat{Ba}$ betrachten, wobei in B der Coordinaten-Ursprung ist, die Abscissen x nach abwärts und die Ordinaten y horizontal angenommen werden, so dass man erhält:

$$\overline{Bn} = x, \quad \overline{nl} = y,$$
$$\overline{Bn'} = x', \quad \overline{n'l'} = y',$$
$$\overline{BA} = H, \quad \overline{Aa} = D.$$

Denkt man sich nun für alle möglichen Werthe von x die dazu gehörigen Ordinaten y aufgetragen, und die Endpunkte dieser letzteren continuirlich verbunden, so ergibt sich die zuvor erwähnte Curve, und es ist hiermit das Gesetz anschaulich gemacht, nach welchem der Erddruck auf die Stützwand von oben nach unten sich verändert. Aus diesem Grunde soll diese Curve die Erddruckveränderungs-Curve heissen.

Die Gleichung (190) stellt nunmehr offenbar den Flächenraum dar, welcher zwischen der gedachten Curve und den zusammengehörigen Coordinaten H und D sich befindet, es ist nämlich:

$$\text{area } ABa = \int_0^H y\, dx,$$

daher auch:

$$De = \text{area } ABa \text{ .... } (191).$$

Diese Relation sagt aus, dass e die Höhe eines Rechteckes bedeutet, welches die Basis $\overline{Aa} = D$ hat und dem Flächeninhalte nach eben so gross ist, wie die Figur ABa.

Verwandelt man die letztgenannte Figur in das gleich grosse Rechteck $Aakm$, so liegt der fragliche Erddruckmittelpunkt M

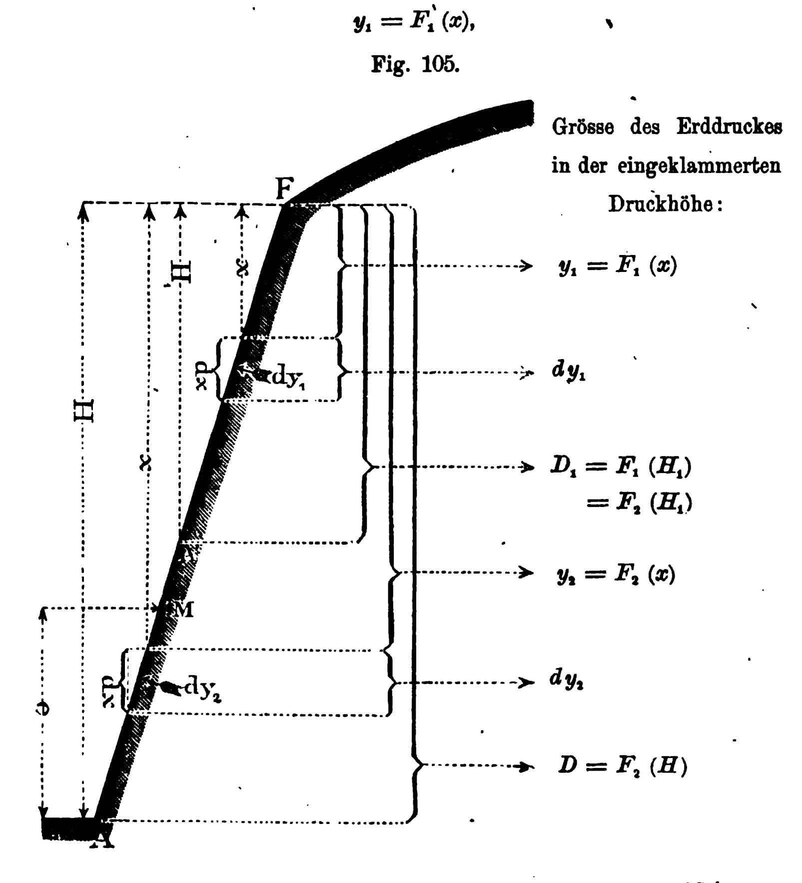
im Niveau der oberen Rechtecksseite $\overline{km}$, daher man diese nur zu verlängern hat, bis die Wandböschung getroffen wird.

Für die Statthaftigkeit dieser Regel ist es durchaus nicht nothwendig, dass das Gesetz für die Veränderung des Erddruckes mit der Zuname der Druckhöhe von oben nach unten innerhalb der ganzen Druckhöhe ein und dasselbe sei, das Vorgesagte gilt vielmehr im Allgemeinen.

Um hierüber eine nähere Aufklärung zu liefern, werde angenommen, es stehe in Figur 105 ein Fall in Betracht, wobei die Abhängigkeit zwischen der Grösse des Erddruckes und der Druckhöhe einmal wechselt, nämlich einerseits, insolange diese letztere nicht grösser als H_1 wird, durch die Gleichung:

$$y_1 = F_1(x),$$

Fig. 105.



andererseits aber, insolange die Druckhöhe x nicht kleiner als H_1 ist, durch die Gleichung

$$y_2 = F_2(x)$$

bezeichnet werden soll.

Für $x = 0$ ist jedenfalls auch der Erddruck $y_1 = 0$, somit hat man:

$$F_1(0) = 0.$$

Für die Uebergangshöhe H_1 müssen beide Functionen zu demselben Resultate führen, es ist daher, wenn der Erddruck auf die Wandfläche $\overline{FA'}$ mit D_1 bezeichnet wird:

$$D_1 = F_1(H_1) = F_2(H_1).$$

Der Erddruck D auf die ganze Wandfläche $\overline{AF}$ endlich ist:

$$D = F_2(H).$$

Die zur Bestimmung des Druckmittelpunktes M Bezug nehmende Momenten-Gleichung heisst jetzt offenbar:

$$De = \int_{x=0}^{x=H_1} (H - x)\, dy_1 + \int_{x=H_1}^{x=H} (H - x)\, dy_2.$$

Es ist aber wieder allgemein:

$$\int (H - x)\, dy_1 = (H - x)\, y_1 + \int y_1\, dx = (H - x)\, F_1(x) + \int y_1\, dx$$

$$\int (H - x)\, dy_2 = (H - x)\, y_2 + \int y_2\, dx = (H - x)\, F_2(x) + \int y_2\, dx$$

daher insbesondere:

$$\int_{x=0}^{x=H_1} (H - x)\, dy_1 = \Big[(H - H_1)\, F(H_1) - H F_1(0) \Big] + \int_0^{H_1} y_1\, dx$$

$$= (H - H_1)\, D_1 + \int_0^{H_1} y_1\, dx$$

$$\int_{x=H_1}^{x=H} (H - x)\, dy_2 = -(H - H_1)\, F_2(H_1) + \int_{H_1}^{H} y_2\, dx$$

$$= -(H - H_1)\, D_1 + \int_{H_1}^{H_1} y_2\, dx;$$

hiernach aber:

$$De = \int_0^{H_1} y_1\, dx + \int_{H_1}^{H} y_2\, dx,$$

welcher Ausdruck augenscheinlich wieder das in (191) aufgestellte Gesetz enthält, nämlich die Fläche bezeichnet, die zwischen der Erddruckveränderungs-Curve und den grössten Coordinaten $x = H$ und $y_2 = D$ gelegen ist.

In derselben Weise kann man vorgehen, wenn das Gesetz für die Veränderung des Erddruckes mit der Zuname der Druckhöhe von oben nach unten öfter, z. B. $n$mal wechselt, sodann wird man (unter Beibehaltung der vorigen und gleichzeitiger Fortsetzung der weiteren Bezeichnungen in analoger Weise) erhalten:

$$De = \int_0^{H_1} y_1\,dx + \int_{H_1}^{H_2} y_2\,dx + \ldots + \int_{H_n}^{H} y_{n+1}\,dx,$$

somit die Summe von $(n+1)$ Integralwerthen, welcher Summe aber demungeachtet keine andere Bedeutung, als die oben erwähnte, zukommt.

Dass in einem solchen Falle die Druckveränderungs-Curve innerhalb der ganzen Druckhöhe ihren Charakter nicht beibehält, sondern diesen stufenweise, und zwar ebenfalls $n$mal wechselt, und hiedurch eigentlich aus $(n+1)$ Segmenten zusammengesetzt wird, wovon jedem ein anderes Krümmungsgesetz zukommt, ist wohl selbstverständlich.

Was die grafische Durchführung anbelangt, so ist zunächst klar, dass man die Erddruckveränderungs-Curve desto genauer erhalten wird, je mehr Punkte von derselben aufgesucht werden.

Hiebei muss man in Ueberlegung nehmen, in welcher Weise vorzugehen ist, um für irgend eine Druckhöhe x den dazu gehörigen Erddruck y als Ordinate, somit mittelst einer geraden Linie, darzustellen, und wie schliesslich die Verwandlung der gemischtlinigen Figur ABa (Fig. 104) in das Rechteck von der Höhe e geschehen soll.

Um das einzuschlagende Verfahren zu erläutern, ist zu beachten, dass man den vorausgegangenen Lehren des laufenden Capitels gemäss jedenfalls im Stande ist, die jeweilige Grösse des Erddruckes durch das Gewicht eines Erdprismas darzustellen, welches zum Querprofile ein gleichschenkeliges Dreieck, und zur Länge (normal auf das Profil gerichtet) die Einheit hat.

Zeichnet man daher für verschiedene Druckhöhen (x, x', x'', ...) diese dazu gehörigen Erdprismen, so werden sich die

correspondirenden Erddruckgrössen (y, y', y'', . . .) geradezu verhalten, wie die Flächenmasse von den Querprofilen besagter Prismen, d. h. es kann jedes solche Querprofil als Repräsentant des betreffenden Erddruckes angesehen werden. Da man nun den Erddruck überall mittelst einer geraden Linie darstellen soll, die gedachten Querprofile aber unter einander verschiedene Grundlinien und Höhen haben, so erübriget noch, alle in neue Dreiecke mit constanter Basis zu verwandeln, so dass dann nur die einzelnen Dreieckshöhen unter einander verschieden sind, und diese letzteren unmittelbar als Repräsentanten der Erddruckgrössen benützt werden können.

Ist z. B. in der Fig. 104 das durch Construction gefundene Dreieck (1, 2, 3) das Querprofil desjenigen Erdprismas, dessen Gewicht dem in der Druckhöhe x stattfindenden Erddrucke gleich kommt, so nehme man als die überall constant bleibende Basis irgend eine Gerade, etwa $\overline{(3, 4)} = b$, an, und verwandle das Dreieck (1, 2, 3) in das neue (3, 4, 5) derart, dass beide gleiche Flächeninhalte haben, die neue Basis aber gleich b wird. Man verbinde somit die Punkte 1 und 4, ziehe die Gerade $\overline{(2, 5)} \parallel \overline{(1, 4)}$, und messe die neue Dreieckshöhe y, welche, weil als Repräsentant des Erddruckes für die Druckhöhe x geltend, nunmehr die Grösse der Ordinate $\overline{ln}$ bezeichnet, wozu eben x die Abscisse ist.

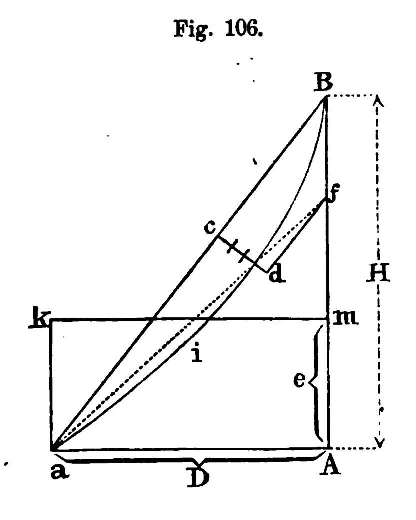
Ganz in derselben Weise wird man bei jeder anderen Druckhöhe (x', x'' . .) verfahren, überall hat man zunächst das Querprofil desjenigen Erdprismas, dessen Gewicht dem bezüglichen Erddrucke gleich ist, grafisch aufzusuchen, sodann die Figuren-Verwandlung unter Berücksichtigung der neu gewählten Dreiecksbasis mit dem constanten Ausmasse b vorzunehmen, und schliesslich die construirte neue Dreieckshöhe als die zu suchende Curven-Ordinate (y', y'' . .) zu benützen.

Auf diese Weise wird man eine Reihe von Curvenpunkten erhalten, welche schliesslich mit einander zu verbinden sind.

Was die zur Auffindung des Druckmittelpunktes M noch nothwendige Verwandlung der gemischtlinigen Figur $ABia$

(Fig. 106) in das Rechteck $Aakm$ betrifft, so kann man hiezu entweder ein Planimeter benützen, womit man den Flächeninhalt jener Figur misst, und die Ziffer desselben durch die Länge der Rechtecksbasis $\overline{Aa}$ dividirt, um nämlich so die Rechteckshöhe $\overline{ak} = e$ zu erhalten; oder aber man wird den rein grafischen Weg betreten, indem man nach den Lehren der Planimetrie die gemischtlinige Figur $ABia$ in eine geradlinige, und diese schliesslich in das verlangte Rechteck verwandelt.

Fig. 106.



In den meisten Fällen kann man das Segment, welches zwischen der Curve $\widehat{aiB}$ und der Sehne $\overline{aB}$ liegt, wie ein parabolisches behandeln, also dieses Segment in ein geradliniges Dreieck verwandeln, welches als Basis die Sehne $\overline{aB}$ und als Höhe die Gerade $\overline{cd} = \frac{4}{3}$ der grössten Segmenthöhe erhält. Zieht man hierauf $\overline{df} \parallel \overline{aB}$ und weiter die Gerade $\overline{af}$, so ist dann:

$$\text{area } ABia = \triangle Afa,$$

somit hat man jetzt nur mehr die Höhe des letztgenannten Dreiecks zu halbiren, also $\overline{Am} = \overline{mf}$ zu machen, um die fragliche Rechteckshöhe e zu finden; denn es ist:

$$\square Aakm = \triangle Afa = \text{area } ABia.$$

Dieses Verfahren ist zwar nur ein angenähertes, wird indessen in der Regel für den vorliegenden Zweck genau genug sein.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass man in ausnamsweisen Fällen, in welchen man genauer zu Werke gehen wollte, das ganze Curvensegment in mehrere kleinere Segmente, welche als parabolisch geformt gelten können, abzutheilen, und auf dieser Grundlage hin die weitere Figurenverwandlung vorzunehmen hätte.

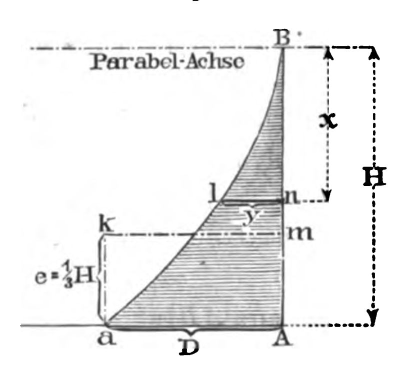
§. 55.

Besondere Eigenschaften in Bezug auf die Richtung der Bruchlinie im Erdkörper, auf die Zunahme des Erddruckes mit der Druckhöhe und auf die Lage des Druckmittelpunktes. In vielen Fällen ist die im vorigen §. besprochene Curve genau parabolisch geformt, nämlich die besondere Eigenschaft vorhanden, dass der Erddruck mit dem Quadrate der Druckhöhe sich verändert, also die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} y = k x^2 \\ D = k H^2 \end{array}\right\} \text{ und } y : D = x^2 : H^2$$

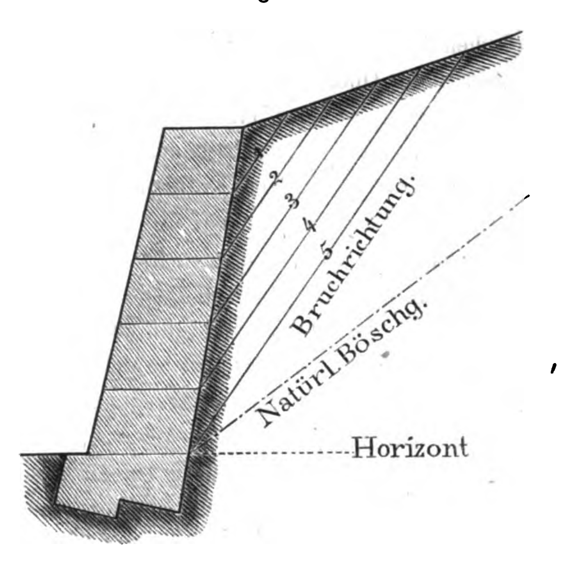
bestehen, wobei k nur von den sonstigen auf den Erddruck Einfluss nehmenden Grössen abhängig ist. Hiebei kommt der Parabelscheitel nach B und die Parabelachse horizontal zu liegen. (Fig. 107.) Soll jetzt das Rechteck $Aakm$ gleich sein der gemischtlinigen (schraffirt angezeigten) Figur ABa, so muss offenbar die Rechteckshöhe $\overline{ak} = e = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}H$ werden, also der Druckmittelpunkt in dem dritten Theil der Höhe liegen. Diese Eigenschaft tritt ein, wenn hinter der Stützwand eine tropfbare Flüssigkeit steht, oder ein cohäsionsloses Erdreich aufgeschichtet ist, wobei letzteres obenauf entweder horizontal abgegrenzt, oder aber überhaupt nach einer Ebene ansteigend oder abfallend sein kann; denn in allen diesen Fällen bestehen, wie die Untersuchungen im §. 7, dann in den vorhergehenden vier Capiteln des laufenden Abschnittes zeigen, die obigen Relationen, nur ist dabei der Werth von k überall ein anderer.

Fig. 107.



In den eben besprochenen Fällen ist überdies, wie die bezüglichen Resultate beweisen, die weitere Eigenschaft vorhanden, dass der Bruchwinkel von der Druckhöhe nicht abhängt, dass also (Fig. 108) die verschiedenen Bruchlinien (1, 2, 3, 4, 5), welche bei verschiedenen Druckhöhen entstehen, unter sonst glei-

Fig. 108.



chen Umständen unter sich parallel laufen. Die Ursache hievon ist leicht einzusehen, wenn erwogen wird, dass durch die Anwendung der im §. 49 gegebenen Regeln zur Construction des Bruchwinkels die Zeichnungen für verschiedene Druckhöhen unter einander ähnlich werden, also die Grösse des Bruchwinkels von der Druckhöhe nicht abhängt, sondern nur von den sonstigen Zeichnungsverhältnissen, nämlich von den einzelnen Richtungswinkeln für die natürliche Erdböschung, für die Stützwand und für die Erdreichoberfläche. Auch ersieht man aus den dortigen Constructionen, dass die Grösse der Dreiecksseiten in dem Profile desjenigen Erdprismas, dessen Gewicht die Intension des Erddruckes bezeichnet, mit der Grösse der ganzen Zeichnung, also auch mit jener der Druckhöhe im geraden und einfachen Verhältnisse zu-

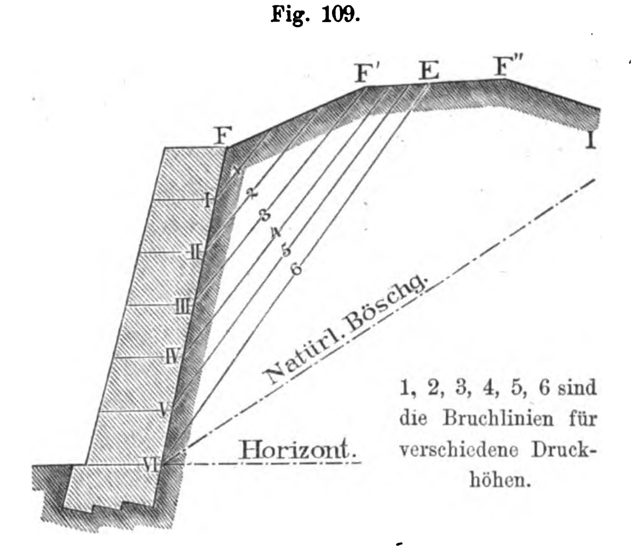
oder abnimmt, weshalb die Fläche jenes Profiles mit dem Quadrate der Druckhöhe veränderlich ist, und schliesslich die Grösse des Erddruckes selbst, welche mit der gedachten Profilfläche in directer Proportion steht, in Bezug auf die Druckhöhe nur von ihrem Quadrate abhängen kann. Hiedurch ist das Vorhandensein der Eigenschaften, auf welche im Eingange dieses §. unter Rückblick auf die früheren Rechnungsresultate hingedeutet wurde, auch aus den grafischen Constructionen einleuchtend.

Wenn jedoch die Oberfläche des Erdreichs nicht nach einer Ebene abgeböscht ist, sondern eine andere, gebrochene oder krumme Gestalt hat, so sind diese besonderen Eigenschaften, ungeachtet die Cohäsionslosigkeit des Erdreiches noch immer vorausgesetzt wird, nicht mehr vorhanden. Es laufen dann die den verschiedenen Druckhöhen entsprechenden Bruchflächen nicht, wenigstens nicht alle, mit einander parallel, und die Grösse des Erddruckes nimmt nicht, wenigstens nicht durchgehends, mit dem Quadrate der Druckhöhe zu, so dass auch nicht mehr behauptet werden kann, es falle der Mittelpunkt des ganzen Erddruckes in das Drittel der Druckhöhe.

Wenn man z. B. den in der Figur 109 dargestellten Fall, wo die Oberfläche des Erdreiches eine gebrochene Form $FF'F''$ I hat, untersucht, und für verschiedene Druckhöhen (von der Wandkrone F etwa bis zu dem Niveau der Fusspunkte I, II, III, IV, V, VI reichend) die dazu gehörigen Bruchlinien (1, 2, 3, 4, 5, 6) construirt, so findet man, dass anfänglich die Bruchlinien (1, 2, 3), zwar mit einander parallel laufen, weil nämlich für den Wandtheil $\overline{F\text{III}}$ nur die Erdreichoberfläche $\overline{FF'}$ in Betracht kommt, diese aber (wie in der Fig. 108) nach einer Ebene ansteigt, dass aber ein solcher Parallelismus bezüglich der tiefer gelegenen Bruchlinien (4, 5, 6) nicht mehr vorhanden ist, weil dann schon die Erdreichoberfläche von F über F' hinaus gegen F'' hin zu berücksichtigen, daher bei der diesfälligen Construction nach der im §. 51 gegebenen Anleitung vorzugehen ist, nach welcher man desto steilere Bruchlinien findet, je tiefer die hinabrückenden Höhenfusspunkte IV, V, VI gelegen sind.

Aus diesem Grunde wird der Erddruck nur innerhalb des Stützwandtheiles $\overline{F\,III}$ mit dem Quadrate der Druckhöhe, weiter

Fig. 109.



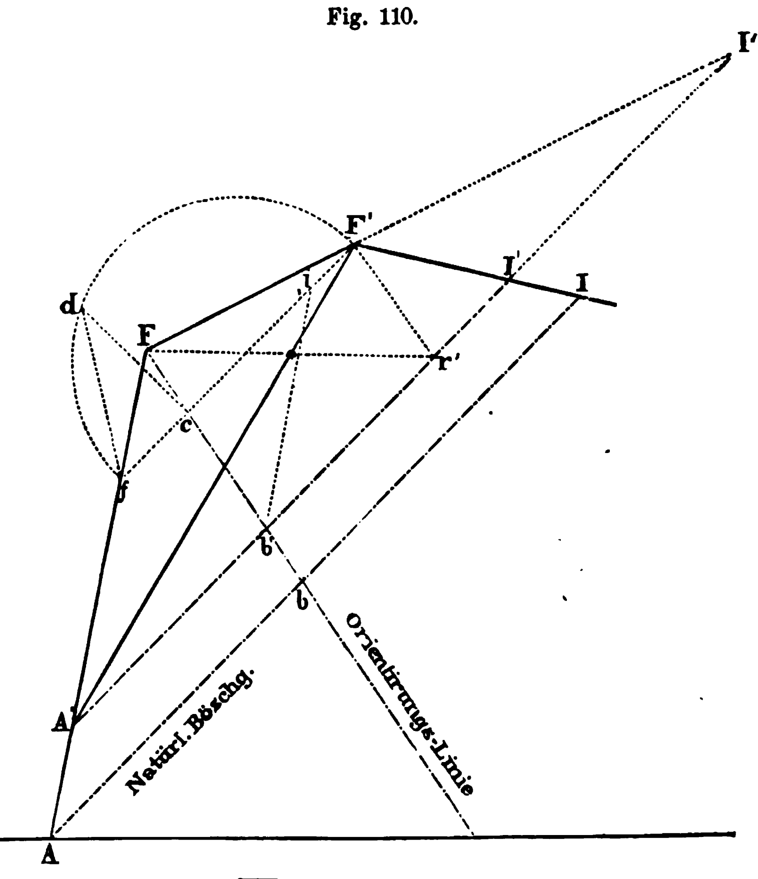
hinab aber in einer anderen Art zunehmen, und der Mittelpunkt des auf die ganze Stützwand $\overline{F\,VI}$ stattfindenden totalen Erddruckes nicht genau in das Drittel der Druckhöhe fallen.

Denkt man sich die Druckhöhe von F angefangen allmälig zunehmend, so dass, wenn man bei einer gewissen Druckhöhe angelangt ist, die nächst folgende nur um unendlich wenig von derselben differirt, so leuchtet aus dem Bestehen der Eigenschaft (177) ein, dass der Uebergang von einer Bruchlinie zur nächstfolgenden, stets der jeweiligen Druckhöhe entsprechend, ebenfalls nur ein allmäliger sein kann, so dass der Bruchwinkel, der sich für eine gewisse Druckhöhe ergibt, von dem darauf folgenden, welcher der um unendlich wenig zugenommenen Druckhöhe zukommt, entweder gar nicht, so lange nämlich die Bruchlinien zu einander parallel sind, oder aber nur um unendlich wenig abweicht. Wenn daher auch die Bruchlinien von 3 abwärts nicht die gleiche Richtung haben, so wird dennoch der von den parallelen Bruchlinien zwischen 1 und 2 dahin stattfindende Ueber-

gang und der fortan sich einstellende Wechsel in der Bruchneigung keineswegs sprungweise vor sich gehen.

Um in einem solchen Falle, wo bei der Zuname der Druckhöhe von oben nach unten die entsprechenden Bruchlinien mit einander zuerst parallel laufen, von einer gewissen Druckhöhe angefangen aber nach oben convergiren, diese gewisse Druckhöhe zu finden, wo der Wechsel des Gesetzes eintritt, kann man in folgender Weise verfahren:

Fig. 110.



Ist (Fig. 110) $\overline{AF}$ die Stützwand und $\overline{FF'I}$ die Begrenzung der Oberfläche des Erdreiches, so handelt es sich darum,

den Punkt A' zu suchen, von dem aus die Bruch- oder gefährliche Böschung geradezu durch die Kante F' geht. Zwischen F und A' laufen dann alle Bruchböschungen mit einander parallel, zwischen A' und A dagegen werden dieselben nach aufwärts convergiren, und $\overline{A'F'}$ bildet den Uebergang von dem einen zu dem anderen System dieser Bruchböschungen.

Um diese Uebergangslinie zu construiren, ziehe man zunächst die Orientirungslinie $\overline{Fb}$, sodann $\overline{F'f} \parallel \overline{AI}$, beschreibe über $\overline{F'f}$ als Diameter einen Halbkreis, mache $\overline{cd} \perp \overline{F'f}$, $\overline{ci} = \overline{df}$, $\overline{ib'} \parallel \overline{AF}$ und ziehe durch b' die Linie $\overline{A'I''}$, parallel zur natürlichen Böschung. Sodann ist A' der Punkt, bis zu welchem die Druckhöhe von oben her reichen muss, damit die Bruch- oder gefährliche Böschung $(\overline{A'F'})$ durch die Kante F' geht.

Zur Controle für die richtige Durchführung dieses Verfahrens kann man schliesslich das zu dieser Druckhöhe gehörige Constructions-Viereck $A'FF'r'$ durch die Hinzufügung der Abschlussgeraden $\overline{F'r'}$, welche parallel zur Orientirungslinie läuft, auszeichnen, und nachsehen, ob die zweite Vierecksdiagonale $\overline{Fr'}$ durch die als erste Diagonale fungirende Bruchlinie $\overline{A'F'}$ in der That, wie es zu Folge der Hauptregel (177) sein soll, halbirt wird. In der Figur 110 ist der fragliche Halbirungspunkt mit (*) bezeichnet.

Für die Statthaftigkeit des angegebenen Constructions-Verfahrens ergibt sich nachstehender

Beweis:

Mit Rücksicht auf die Hauptregel (177) soll construirt werden:

$$\triangle A'FF' = \triangle A'F'r',$$

und dies bedingt in Hinblick auf die damit zusammenhängende Eigenschaft (184) die Existenz der Proportion:

$$\overline{A'b'} : \overline{A'r'} = \overline{A'r'} : \overline{A'I'},$$

also auch der weiteren:

$$\overline{A'b'} : (\overline{A'b'} + \overline{b'r'}) = (\overline{A'b'} + \overline{b'r'}) : (\overline{A'b'} + \overline{b'I'}),$$

und hiernach der Gleichung:

$$(\overline{A'b'} + \overline{b'r'})^2 = \overline{A'b'}\,(\overline{A'b'} + \overline{b'I'}),$$

welche nach erfolgter Abkürzung übergeht in:

$$2\,\overline{A'b'}\,.\,\overline{b'r'} + \overline{b'r'}^2 = \overline{A'b'}\,.\,\overline{b'I'}.$$

Nun ist aber einerseits:

$$\overline{b'r'} = \overline{cF'},$$

und andererseits, wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke FfF' und $FA'I'$:

$$\overline{b'I'} = \overline{A'b'}\,.\,\frac{\overline{cF'}}{\overline{cf}},$$

somit ergibt sich aus der vorgefundenen Bedingungsgleichung:

$$2\,\overline{A'b'}\,.\,\overline{cF'} + \overline{cF'}^2 = \overline{A'b'}^2\,.\,\frac{\overline{cF'}}{\overline{cf}},$$

hieraus aber:

$$\overline{A'b'}^2 - 2\,\overline{A'b'}\,.\,\overline{cf} = \overline{cf}\,.\,\overline{cF'},$$

und durch Auflösnng nach der hierin erscheinenden Unbekannten

$$\overline{A'b'} = \overline{cf} + \sqrt{\overline{cf}\,(\overline{cf} + \overline{cF'})},$$
$$= \overline{cf} + \sqrt{\overline{cf}\,.\,\overline{fF'}},$$

wenn man in Ansehung des Doppelzeichens für die Wurzelgrösse beachtet, dass $\overline{A'b'}$ nicht kleiner als $\overline{fc}$ sein kann.

Diese Relation für $\overline{A'b'}$ ist es, welche durch die Construction hergestellt werden muss, und wie sogleich einleuchtet, in der Figur auch wirklich hergestellt wurde; denn nach derselben hat man offenbar:

$$\overline{A'b'} = \overline{fi} = \overline{fc} + \overline{ci} = \overline{fc} + \overline{fd}$$
$$= \overline{fc} + \sqrt{\overline{fc}\,.\,\overline{fF'}},$$

was geradezu der verlangten Bedingung entspricht.

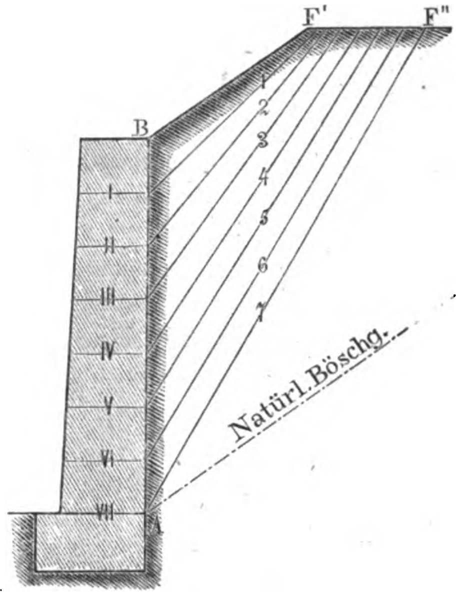
In dem besonderen Falle, wenn $\overline{FF'}$ nach der natürlichen Böschung ansteigt, verschwindet das in der vorigen Figur angedeutete Dreieck FfF', und es ist dann $\overline{fc} = 0$, daher zu Folge der zuletztgefundenen Bedingungsgleichung auch $\overline{A'b'} = 0$; d. h.

der Punkt A' fällt unmittelbar mit der Wandkrone F zusammen. Hiernach kann keine Bruchlinie, welcher Druckhöhe sie immer angehören mag, die Böschung $\overline{FF'}$ treffen, sondern es müssen alle Bruchlinien rechts von F' ausmünden, und durchgehends nach aufwärts convergiren.

In der Figur 111 ist ein solcher Fall, wobei $\overline{BF'}$ nach der natürlichen Böschung ansteigt, zur Anschauung gebracht, in welchem nämlich die Bruchlinien (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), die für

Fig. 111.





verschiedene Druckhöhen ($\overline{B\,\mathrm{I}}$, $\overline{B\,\mathrm{II}}$, ... $\overline{B\,\mathrm{VI}}$, $\overline{B\,\mathrm{VII}}$) gezeichnet werden, das Plateau $\overline{F'F''}$ treffen und dabei nach aufwärts zusammenlaufen. Die Stützwand daselbst ist zwar vertical und das Plateau horizontal angenommen, indessen ist die angedeutete Eigenschaft auch bei schief gestellter Stützwand und geneigtem Plateau vorhanden.

Sechstes Capitel.

Wirkung des Erddruckes an eine Stützwand, wenn das horizontale Plateau des Erdreiches höher liegt, als die Wandkrone.

§. 56.

Vorbemerkungen. Obwohl es nach den Erläuterungen im vorigen Capitel einem Anstande nicht unterliegt, auch in den in der Ueberschrift bezeichneten Fällen auf Grund der grafischen Methoden alle wünschenswerthen Resultate zu finden, so ist dennoch nöthig, hierüber, da derlei besondere Fälle öfter vorkommen, noch einige Untersuchungen anzustellen, um einerseits einen besseren Einblick in die Sache zu gewinnen, insbesondere neue Eigenschaften und Gesetze, die sich hiebei theils in analytischer, theils in grafischer Beziehung ergeben, kennen zu lernen, und um andererseits die nöthigen Berechnungsformeln oder specielleren Constructionsmethoden an die Hand zu geben.

Die allgemeinen Gesetze, welche man im vorigen Capitel kennen gelernt hat, werden jetzt mit Vortheil angewendet werden können, um die Rechnungsresultate schneller zu entwickeln, als es ohne Kenntniss dieser Gesetze möglich wäre; daher auch der Gang der Untersuchung, wie er hiebei eingehalten werden wird, von jenem in den Capiteln 1, 2, 3 und 4 des laufenden Abschnittes in formeller Hinsicht in soferne abweicht, als es nicht mehr nothwendig ist, auf die sonst benützte ursprüngliche Gleichung (78) für D zurückzukehren, und das Maximum von Δ wirklich auszumitteln, sondern es nunmehr genügt, mit Ueberspringung dieser Voruntersuchung sogleich die Hauptregeln (177) und (178) in den Vordergrund hinzustellen.

§. 57.

Erddruck an eine verticale Stützwand $\overline{AB}$, wenn die Oberfläche des Erdreiches zuerst nach der natürlichen Böschung $\overline{BD}$ ansteigt, weiter aber von einem horizontalen Plateau $\overline{DI}$ begrenzt ist. (Siehe Fig. 112.)

Man setze:

die Höhe der Stützwand .... $\overline{AB} = H$,

die Ueberhöhung des Erdreiches über der Stützwandkrone .... $\overline{BC} = h$,

die Höhensumme .... $\overline{AC} = \mathfrak{H}$,

den Winkel zwischen $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$, also ...... $\sphericalangle\, CAD = \delta$,

und behalte die Bezeichnungen in den früheren Capiteln, insoweit sie hier in Betracht kommen, bei, so dass man noch hat:

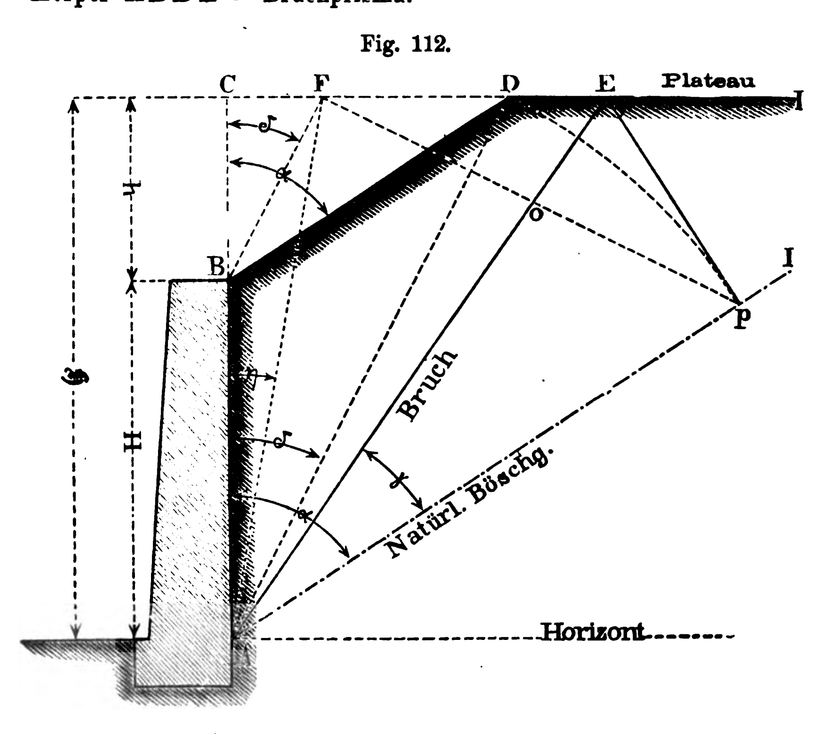
$g =$ Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches,

$\alpha = \sphericalangle\, CAI = \sphericalangle\, CBD =$ Winkel für die natürliche Erdböschung,

$\gamma = \sphericalangle\, EAI =$ Bruchwinkel,

Körper $ABDE =$ Bruchprisma.

Fig. 112.



Die Grössen H, h, α und g sind gegeben, und hiemit auch $\mathfrak{H}$ und δ bekannt, alles Uebrige dagegen, insbesondere der Bruch-

winkel γ, die Grösse des Erddruckes D, sowie die Lage seines Mittelpunktes zu bestimmen.

Zunächst ist zu bemerken, dass die Grössen H, h, $\mathfrak{H}$, α und δ unter einander in folgender Verbindung stehen:

$$\mathfrak{H} = H + h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (192),$$

$$\overline{CD} = h \operatorname{tg} \alpha = \mathfrak{H} \operatorname{tg} \delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{(H+h)} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\left(1 + \frac{H}{h}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (193),$$

$$H = \mathfrak{H} - h = \mathfrak{H} \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \delta)}{\operatorname{tg} \alpha} = \mathfrak{H} \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\sin \alpha \cos \delta} \quad \ldots (194).$$

Verwandelt man das $\triangle ABD$ derart in ein anderes, dass die Basis $\overline{AD}$ beibehalten wird, die neue Spitze F aber in das Niveau vom Erdplateau zu liegen kommt, so dass $\overline{BF} \parallel \overline{AD}$ und $\triangle ABD = \triangle AFD$ ist, und setzt man den Neigungswinkel der neuen Dreiecksseite $\overline{AF}$, nämlich $\measuredangle\, CAF = \eta$, so hat man behufs der Berechnung dieses Winkels die Relation:

$$\overline{CF} = \mathfrak{H} \operatorname{tg} \eta = h \operatorname{tg} \delta = \mathfrak{H} \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \alpha},$$

hieraus aber:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{h^2}{\mathfrak{H}^2} \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (195).$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha - \eta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \eta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \\
&= \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \cos^2 \delta \\
&= \frac{\cos^2 \delta}{\operatorname{tg} \alpha} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \delta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \delta) \\
&= \frac{\sin(\alpha + \delta) \sin(\alpha - \delta)}{\sin \alpha \cos \alpha} \\
&= \frac{\cos 2\delta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (196).
\end{aligned}$$

Auf die erwähnte Dreiecks-Verwandlung hinzuweisen, ist in so ferne zweckmässig, als es sich mit Rücksicht auf die Eigenschaft (177) und auf das im §. 51 Gesagte bei der jetzigen Ausmittlung der Bruchlinie $\overline{AE}$ darum handelt, die beiden Figuren

$ABDE$ und AEp (wobei $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ ist) gleich zu erhalten, weshalb auch $\triangle AFE = \triangle AEp$, und hiernach in dem Vierecke $AFEp$ die Diagonale $\overline{Fp}$ durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ in o halbirt werden muss.

Nun ist aber einerseits:

$$\begin{aligned} \text{area } ABDE = \triangle AFE &= \tfrac{1}{2}\, \overline{AC}\,(\overline{CE} - \overline{CF}) \\ &= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{H}^2\, [\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) - \operatorname{tg}\eta] \\ &= \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{H}^2 \left[\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) - \frac{\operatorname{tg}^2\delta}{\operatorname{tg}\alpha}\right], \end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned} \triangle AEp = \tfrac{1}{2}\, \overline{Ap}\,.\,\overline{Ep} &= \tfrac{1}{2}\,(\overline{AE}\cos\gamma)\,(\overline{AE}\sin\gamma) \\ &= \tfrac{1}{2}\, \overline{AE}^2 \sin\gamma\cos\gamma = \tfrac{1}{2}\, \frac{\mathfrak{H}^2}{\cos^2(\alpha - \gamma)} \sin\gamma\cos\gamma, \end{aligned}$$

folglich ergibt sich aus der Gleichsetzung der beiden Resultate:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) - \frac{\operatorname{tg}^2\delta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos^2(\alpha - \gamma)},$$

woraus der Bruchwinkel γ zu berechnen ist.

In dieser Absicht stalte man die so eben gefundene Bedingungsgleichung derart um, dass sämmtliche Winkel blos durch ihre Tangentenwerthe vertreten erscheinen, wobei zur Abkürzung gesetzt werden soll:

$$\operatorname{tg}\alpha = a, \quad \operatorname{tg}\delta = b \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\gamma = x.$$

Hiernach erhält man als Werthe für die einzelnen Glieder jener Gleichung:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} = \left(\frac{a - x}{1 + ax}\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\delta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{b^2}{a},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\cos^2(\alpha - \gamma)} &= \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)^2} \\ &= \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)^2} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\gamma}{(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)^2} = \frac{(1 + a^2)\,x}{(1 + ax)^2}, \end{aligned}$$

somit in ihrer Zusammenstellung die neue Gleichung:

$$\left(\frac{a - x}{1 + ax}\right) - \frac{b^2}{a} = \frac{(1 + a^2)\,x}{(1 + ax)^2},$$

und, wenn man diese nach der hierin erscheinenden Unbekannten x ordnet, weiter:

$$x^2 + \frac{2}{a} x = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 (1 + b^2)}.$$

Die Auflösung nach x ergibt:

$$x = \frac{1}{a} \left(-1 + \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + b^2}} \right),$$

daher, indem man statt a, b und x die obigen Werthe zurücksubstituirt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(-1 + \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} \right)$$
$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left(-1 + \frac{\cos \delta}{\cos \alpha} \right),$$

oder endlich:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \delta - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{(197)},$$

welche Formel mit der unter (196) entwickelten eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit hat.

Für den Nachbarwinkel $BAE = (\alpha - \gamma)$ wird hiermit:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{1}{\cos \delta} - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{(198)},$$

so dass sich die beiden Tangentenwerthe (197) und (198) nur durch das erste Glied im Zähler unterscheiden, welches einmal $\cos \delta$, das anderemal aber $\frac{1}{\cos \delta}$ heisst.

Hiernach wird jedenfalls, insolange $h > 0$ ist:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \gamma) > \operatorname{tg} \gamma,$$

also auch, da beide Winkel im ersten Bogenquadranten sich befinden müssen:

$$(\alpha - \gamma) > \gamma, \text{ d. i. } \gamma < \frac{\alpha}{2} \quad \text{(199)}.$$

Die Bruchlinie $\overline{AE}$ liegt daher innerhalb derjenigen Hälfte des Winkels für die natürliche Böschung, welche an diese letztere angrenzt.

Beschreibt man von A aus mit dem Halbmesser $\overline{AD}$ einen Kreisbogen bis zur natürlichen Böschung $\overline{AI}$, so erhält man da-

durch den Punkt p, so dass jetzt nur mehr $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ zu stellen ist, um den Punkt E und somit die Bruchlinie $\overline{AE}$ zu bekommen.

Um dies einzusehen, ist nachzuweisen, dass $\overline{AD} = \overline{Ap}$ sein muss. Zu diesem Behufe berechne man die Grösse jeder dieser Linien.

Einerseits hat man:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\cos\delta} = \frac{\mathfrak{H}}{\cos\delta},$$

andererseits aber:

$$\overline{Ap} = \overline{AE}\cos\gamma = \frac{\overline{AC}}{\cos(\alpha-\gamma)} \cdot \cos\gamma = \mathfrak{H}\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}$$

$$= \mathfrak{H}\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2(\alpha-\gamma)}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}},$$

und, wenn man jetzt die Werthe für $\operatorname{tg}\gamma$ und $\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)$ aus den Formeln (197) und (198) berücksichtiget, auch:

$$\overline{Ap} = \mathfrak{H}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{\cos\delta}-\cos\alpha\right)^2}{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\cos\delta-\cos\alpha\right)^2}}$$

$$= \frac{\mathfrak{H}}{\cos\delta}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\delta+(1-\cos\alpha\cos\delta)^2}{\sin^2\alpha+(\cos\delta-\cos\alpha)^2}}$$

$$= \frac{\mathfrak{H}}{\cos\delta};$$

also in der That:

$$\overline{AD} = \overline{Ap} = \frac{\mathfrak{H}}{\cos\delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (200).$$

Das Perpendikel von dem Bruchpunkte E auf die natürliche Böschung, es heisse $\overline{Ep} = P$, ist:

$$P = \overline{Ap}\,.\operatorname{tg}\gamma = \mathfrak{H}\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\delta} = \mathfrak{H}\left(\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\delta}\right) \ldots (201).$$

Die Grösse dieses Perpendikels zu kennen, ist darum nothwendig, weil hiernach sogleich die Grösse des Erddruckes D berechnet werden kann; denn man hat zu Folge der Gleichung (183) — und zwar jetzt für $\varepsilon = 0$ — unmittelbar:

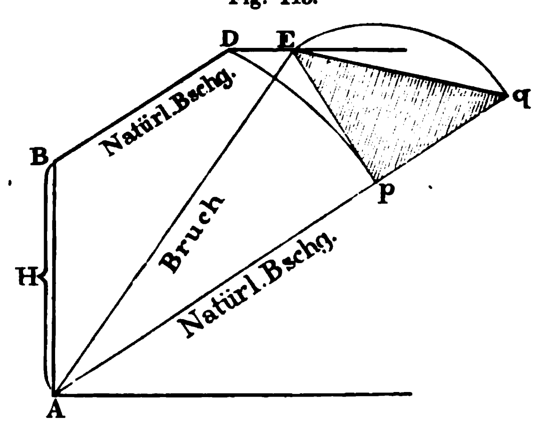
$$D = \tfrac{1}{2}gP^2 = \tfrac{1}{2}g\,\mathfrak{H}^2\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\delta}\right)^2 = \tfrac{1}{2}g\,\mathfrak{H}^2\left(\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\delta}\right)^2 \ (202).$$

Somit kann man in dem vorliegenden besonderen Falle, abgesehen von den allgemeinen Regeln, die Bruchlinie und hier-

nach den Erddruck auch in einer speciellen und zudem sehr einfachen Art construiren, wie folgt:

Man beschreibe (Fig. 113) von A aus mit dem Radius $\overline{AD}$ den Kreisbogen $\widehat{Dp}$, und errichte $\overline{Ep} \perp \overline{Ap}$; dadurch ergibt

Fig. 113.



sich die Bruchlinie $\overline{AE}$. Weiter mache man $\overline{pq} = \overline{Ep} = P$, und ziehe die Gerade $\overline{Eq}$. Das so erhaltene rechtwinklige und zugleich gleichschenklige (in der Figur schraffirte) Dreieck Epq ist sofort das Profil desjenigen Erdprismas, dessen Gewicht der Intension des Erddruckes gleich ist. Man hat nämlich in Uebereinstimmung mit der letzten Gleichung (202):

$$\left.\begin{array}{c}\text{Gewicht des Erd-}\\ \text{prismas } Epq\end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}\, g\, P^2.$$

Um die Formel für den Erddruck als eine Function von der Höhe H und dem Winkel δ auszudrücken, so hat man hiezu die Relationen (192), (193) und (194) zu benützen.

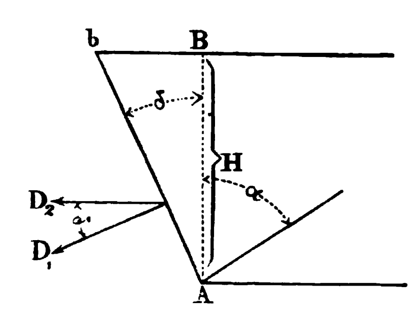
Hiernach ist:

$$D = \tfrac{1}{2}\, g H^2 \left[\frac{\cos\delta - \cos\alpha}{\sin(\alpha-\delta)}\right]^2 = \tfrac{1}{2}\, g\, H^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, g H^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (203).$$

Diese Formel hat Aehnlichkeit mit derjenigen, welche am Kopfe der Seite 103 steht, und sich auf die Bestimmung des Erddruckes in dem Falle bezieht, wenn die Stützwand überhängend ist, die Oberfläche des Erdreiches von der Wandkrone angefangen horizontal liegt, und keine Erdcohäsion in Rechnung kommt. Stellt man sich nämlich vor, dass die in der Fig. 112 erscheinende Stützwand von der Höhe $\overline{AB} = H$ an der Hinterfläche nicht vertical, sondern, wie in der Figur 114, um den Winkel $BAb = \delta$ überhängend, die Oberfläche des Erdreiches aber horizontal wäre, so hätte man nach der auf Seite 103 obenauf angesetzten Formel die Grösse des normalen Erddruckes, wenn solche mit D_1 bezeichnet wird:

Fig. 114.



$$D_1 = \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\delta} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}\right]^2,$$

also die horizontale Componente davon, welche D_2 heissen soll:

$$D_2 = D_1 \cos\delta = \tfrac{1}{2}\, g H^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}\right]^2,$$

so dass der Werth dieser Druckcomponenten eben so gross entfiele, wie der in der obigen Gleichung (203) berechnete Erddruck D*).

---

*) Die vorgenommene Vergleichung erleidet indessen eine Beschränkung insoferne, als die Formel für D_1, nur bei nicht zu grossen Werthen des Winkels δ angewendet werden darf, und zwar aus dem Grunde, welcher schon bei einer früheren Gelegenheit (pag. 63) für die Unzulässigkeit von zu bedeutenden Ueberhängungswinkeln geltend gemacht wurde.

Staltet man die Gleichungen für tg γ und D derart um, dass die Winkel α und δ durch ihre Tangentenwerthe vertreten sind, um nämlich bei der Berechnung ohne Zuhilfenahme von trigonometrischen Tafeln vorgehen zu können, so erhält man, wenn die früheren Abkürzungsbezeichnungen $a = \operatorname{tg}\alpha$ und $b = \operatorname{tg}\delta$ beibehalten werden:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\delta - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\delta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\delta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\delta}} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} - 1\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (204);$$

$$D = \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\cos^2\delta} = \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \operatorname{tg}^2\gamma\,(1+\operatorname{tg}^2\delta)$$

$$= \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \cdot \frac{1}{a^2}\left[\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} - 1\right]^2 \cdot (1+b^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}}{a}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (205);$$

endlich, wegen der Relation (194), aus welcher folgt:

$$\mathfrak{H} = H\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\delta}\right) = H\left(\frac{a}{a-b}\right),$$

auch:

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}}{a-b}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (206),$$

oder, wenn man in dem eingeklammerten Bruche den Zähler rational macht, also den Zähler und den Nenner mit dem Factor $[\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}]$ multiplicirt, dann durch den Factor $(a-b)$ abkürzt, noch:

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (207).$$

Die letzte Formel wird dann zur Berechnung bequemer sein, als die vorhergehende, wenn die Differenz zwischen a und b verschwindet, oder überhaupt verhältnissmässig klein ist.

Die vorhergehenden Gleichungen für den Erddruck (203, 206, 207,) erscheinen unter der Form:

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2 \qquad (208),$$

wobei man für w, beziehungsweise $\frac{w}{g}$ folgende Relationen hat:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}}{a-b}\right]^2$$

$$= \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}}\right]^2 \qquad (209).$$

Hierin ist $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\frac{H}{h}\right)}$.

Offenbar stellt w hier, ebenso wie in den früher behandelten Fällen, grundsätzlich wieder das Gewicht der cubischen Einheit von derjenigen sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit vor, welche auf die Wand von der Höhe H denselben Druck, wie das Erdreich, ausüben würde.

Ex. $H = h = 10$ Fuss, $a = \operatorname{tg}\alpha = 1$ (also $\mathfrak{H} = 20'$, $\alpha = 45^0$) und $g = 100$ Pfund.

Hiernach und wegen $b = \operatorname{tg}\delta = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

Zu Folge der Formel (204):

$$\operatorname{tg}\gamma = 0{\cdot}4\sqrt{10} - 1 = 0{\cdot}2649,$$

und hieraus:

$$\gamma = 14^0\,50', \ (\alpha - \gamma) = 34^0\,10';$$

aus den Relationen (205) und (206):

$$D = \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{13-4\sqrt{10}}{2}\right) g H^2 = 0{\cdot}17544\, g H^2 \\ \left(\frac{13-4\sqrt{10}}{8}\right) g \mathfrak{H}^2 = 0{\cdot}04386\, g \mathfrak{H}^2 \end{array}\right\} = 17{\cdot}5 \text{ Ctr.};$$

laut Gleichung (209):

$$\frac{w}{g} = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = (13 - 4\sqrt{10}) = 0{\cdot}3509,$$

daher:

$$w = 0{\cdot}3509\, g = 35{\cdot}09 \text{ Pfund};$$

endlich mit Hilfe der hydrostatischen Formel (208) abermals:

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2 = 17{\cdot}5 \text{ Ctr.}$$

Zur Vereinfachung solcher Rechnungen kann die jenseits folgende Tabelle XI benützt werden, in welche man in einem beispielsweisen Falle mit den bekannten Daten $a = \operatorname{tg} \alpha$ und $b = \operatorname{tg} \delta$ einzugehen, und an der Kreuzungsstelle der zu diesen Daten gehörigen Tabellenspalten, wovon jene für a horizontal, die andere für b aber vertical ist, nachzusehen hat, welche Zahl dort für $\frac{w}{g}$ eingeschrieben ist. Ist nämlich die bezügliche Tabellenzahl z, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{w}{g} = z \\ w = zg \end{array}\right\}, \; D = \tfrac{1}{2} w H^2 = \tfrac{1}{2} (zg) H^2,$$

wodurch die Grösse des Erddruckes ausgemittelt ist.

Ex. Sind etwa, wie in dem vorigen Beispiele, die Daten : $H = h = 10$ Fuss, $a = \operatorname{tg} \alpha = 1$ und $g = 100$ Pfund bekannt, so hat man, wegen $b = \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2}$, die horizontale Tabellenspalte für $a = 1$ und die verticale für $b = 0 \cdot 5$ in's Auge zu fassen. An der Kreuzungsstelle dieser Spalten steht die Zahl $0 \cdot 351$, sonach ist:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 351 \text{ und } w = 35 \cdot 1 \text{ Pfund},$$

endlich:

$$\text{Erddruck } D = \tfrac{1}{2} w H^2 = 17 \cdot 5 \text{ Ctr.}$$

Sind in einem zu behandelnden Falle die Daten für a und b nicht genau in der Tabelle enthalten, so muss man, wie dies schon in Bezug auf die früheren Tabellen angedeutet worden ist, das bekannte Interpolations-Verfahren zur Anwendung bringen.

Anmerkung.

Der in dem laufenden §. in Betracht stehende Fall wurde, wie schon auf Seite 46 erwähnt, zuerst von Poncelet behandelt. Seine Resultate sind zwar richtig, indessen minder einfach und übersichtlich, als die hier gegebenen, was darin die Ursache findet, weil Poncelet in seiner Untersuchung formell anders vorgegangen ist. Durch die oben geschehene Einführung des Winkels δ, beziehungsweise der Grösse $\operatorname{tg} \delta$ ist die Auflösung der Aufgabe, namentlich die grafische, wesentlich vereinfacht.

XI. Tabelle.

Erddruck D (innerhalb der Höhe H) $= \frac{1}{2} w H^2$; $\frac{w}{g} = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \delta)}\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}}{a-b}\right]^2$

$$= \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}\right]^2.$$

$a = \operatorname{tg} \alpha$, für die natürliche Erdböschung: / $\frac{w}{g} =$	$b = \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{(H+h)} \operatorname{tg} \alpha$, für das Niveau von dem die Stützwandkrone überragenden Erdplateau:																				
	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1.3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
2·0	0·382	0·420	0·457	0·492	0·525	0·556	0·584	0·610	0·634	0·656	0.675	0·693	0·710	0·725	0·738	0·751	0·762	0.773	0·783	0·792	0·800
1·9	0·364	0·403	0·440	0·475	0·508	0·539	0·568	0·595	0·620	0·643	0·663	0·682	0·700	0·715	0·729	0·742	0·753	0·764	0·774	0·783	
1·8	0·346	0·385	0·422	0·458	0·491	0·522	0·552	0·580	0·605	0·629	0·651	0·671	0·689	0·705	0·719	0·732	0·743	0·754	0·764		
1·7	0·327	0·366	0·403	0·439	0·473	0·505	0·535	0·563	0·589	0·613	0·635	0·656	0·674	0·691	0·706	0·719	0·732	0·743			
1·6	0·307	0·346	0·383	0·420	0·455	0·488	0·519	0·548	0·574	0·597	0·620	0·641	0·659	0·676	0·692	0·706	0·719				
1·5	0·286	0·325	0·363	0·400	0·435	0·469	0·500	0·529	0·556	0·580	0·604	0·625	0·644	0·662	0·678	0·692					
1·4	0·265	0·303	0·341	0·378	0·414	0·448	0·480	0·510	0·537	0·563	0·586	0·609	0·628	0·646	0·662						
1·3	0·242	0·280	0·318	0·355	0·391	0·425	0·458	0·489	0·517	0·543	0·567	0·589	0·609	0·628							
1·2	0·219	0·256	0·294	0·331	0·368	0·402	0·435	0·466	0·495	0·522	0.547	0·570	0·590								
1·1	0·196	0·232	0·268	0·306	0·342	0·377	0·410	0·441	0·471	0·498	0·524	0·548									
1·0	0·172	0·207	0·243	0·280	0·316	0·351	0·384	0·416	0·446	0·474	0·500										

Diese Tabelle eignet sich zum Gebrauche, wenn, wie es in der Regel vorkommt, gegeben sind: H, h, $\operatorname{tg} \alpha$, g; denn b ist dann ebenfalls bekannt.

Fig. 115.

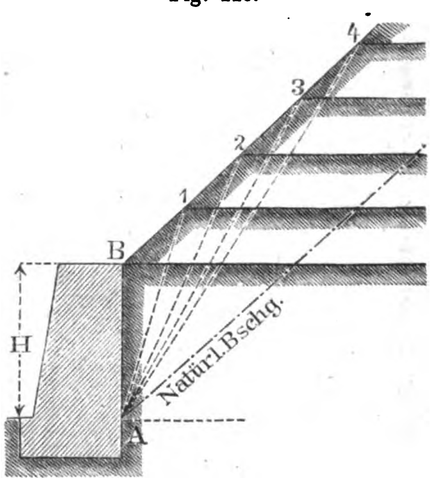
Plateau

§. 58.

Veränderung des Bruchwinkels und des Erddruckes mit der Zunahme der Ueberhöhung des Erdreiches in dem voruntersuchten Falle. Verschiebt man (Fig. 116) das Erdplateau, unter Belassung der sonstigen Umstände, allmälig immer höher hinauf, so dass, wenn sein Niveau anfänglich mit der Stützwandkrone zusammenfällt, von demselben aufeinanderfolgend die Punkte 1, 2, 3, 4, u. s. w. pas-



Fig. 116.



sirt werden, und schliesslich, wenigstens theoretisch betrachtet, das Plateau in einer unendlich grossen Distanz gelegen ist; so wird das Ueberhöhungsmass h alle Werthe von 0 bis ∞, und gleichzeitig der dazu gehörige Winkel δ ($BA\,1$, $BA\,2$, $BA\,3$, $BA\,4$, u. s. w.) alle Werthe von 0 bis α durchlaufen. Hiernach ergeben sich unendlich viele Fälle, welche innerhalb zweier Grenzen eingeschlossen sind, von denen die Eine (untere) Grenze für $h = \delta = 0$, und die andere (obere) Grenze für $h = \infty$ oder für $\delta = \alpha$ entsteht.

Die diesen Grenzen entsprechenden besonderen Fälle sind aber solche, welche schon in den ersten zwei Capiteln des lau-

fenden Abschnittes unmittelbar untersucht wurden, somit ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die dortigen Resultate, insoferne hierin $\varepsilon = 0$ angenommen wird, auch aus den allgemeineren Formeln des vorigen §. hervorgehen müssen, wenn man dieselben auf die vorgenannten Grenzfälle anwendet.

Geschieht dieses, so erhält man für den Einen Grenzfall. wegen $\delta = 0$, wo also die Oberfläche des Erdreiches horizontal und im gleichen Niveau mit der Wandkrone ist, aus den allgemeinen Gleichungen (197) und (203) die besonderen:

$$\operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2},$$

und

$$D = \tfrac{1}{2}\, g H^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

welche in der That mit den unter denselben Verhältnissen schon im §. 27 niedergelegten Resultaten (87) und (94) für $\varepsilon = 0$ übereinstimmen.

In dem anderen Grenzfalle ist $\delta = \alpha$, daher von der Wandkrone angefangen, die Oberfläche des Erdreichs nach der natürlichen Böschung ohne Ende ansteigend, so dass dann der Fall vorliegt, wie solcher in der Figur 54 (für $\varepsilon = 0$) sich darstellt.

Aus den Gleichungen (197) und (203) erhält man aber, wenn $\delta = \alpha$ gesetzt wird:

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = 0 \text{ und } D = \tfrac{1}{2}\, g H^2 \sin^2 \alpha,$$

was ebenfalls mit dem auf die Figur 54 bezüglichen Resultate für den Bruchwinkel und mit der weiteren Formel (147) für den Erddruck in Uebereinstimmung steht.

Innerhalb der bezeichneten Grenzen ist rücksichtlich des Bruchwinkels γ und des Erddruckes D das Veränderungsgesetz vorhanden, dass bei dem Wachsen der Grösse h, beziehungsweise δ, ersterer ab- und letzterer zunimmt.

Um dies einzusehen, hat man nur nöthig, einerseits von $\operatorname{tg} \gamma$ und andererseits von D den ersten Differential - Quotienten unter der Bedingung, dass δ variabel ist, zu entwickeln, und schliesslich auf das algebraische Zeichen des Einen und des an-

deren Resultates acht zu geben. Geschieht dieses, so erhält man zunächst aus der Gleichung (197):

$$\frac{d \operatorname{tg} \gamma}{d \delta} = - \frac{\sin \delta}{\cos \alpha} < 0,$$

weshalb γ abnimmt, wenn δ zunimmt, und umgekehrt.

Was den Erddruck D betrifft, so ist dieser nach der Gleichung (203):

$$D = \tfrac{1}{2} g H^2 [\text{Function } (\delta)]^2 = \tfrac{1}{2} g H^2 \overline{f(\delta)}^2,$$

und hierbei:

$$f(\delta) = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \delta)};$$

daher:

$$\frac{d f(\delta)}{d \delta} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \delta)} > 0,$$

wonach $f(\delta)$, also auch D, stets in dem gleichen Sinne mit δ sich verändert, und hiedurch das oben Gesagte seine Bestätigung findet.

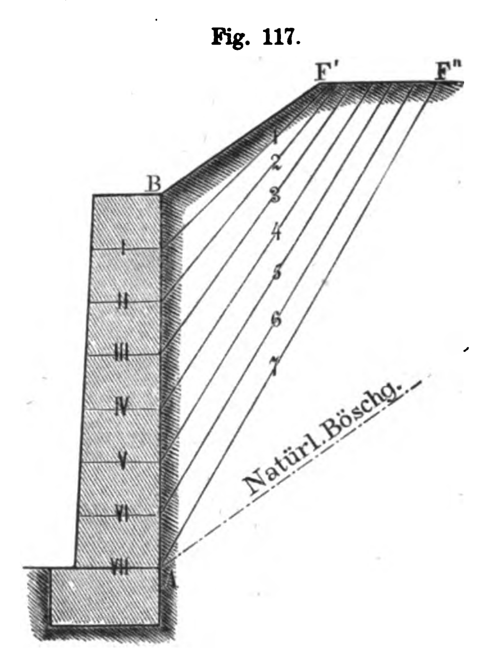
In Beziehung auf die gedachte Veränderung bezeichnen daher die für D gefundenen Grenzwerthe ($\frac{1}{2} g H^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ und $\frac{1}{2} g H^2 \sin^2 \alpha$) das Minimum und beziehungsweise das Maximum des Erddruckes D, so dass jeder andere Werth für denselben, welcher einer gegebenen Ueberhöhung (h) entspricht, zwischen jene Grenzwerthe hineinfallen muss.

§. 59.

Zunahme des Erddruckes von oben nach unten in dem voruntersuchten Falle. Zunächst ist mit Bezug auf die Figur 117 zu bemerken, dass für verschiedene Druckhöhen ($\overline{BI}$, $\overline{BII}$,... $\overline{BVII}$) unter sonst gleichen Umständen die entsprechenden Bruchlinien (1, 2,... 7) mit einander nicht parallel laufen, sondern nach aufwärts convergiren, was sofort einleuchtet, wenn man die in der Figur 113 zur Anwendung gebrachte besondere Constructionsregel zur Bestimmung des Bruchwinkels für die jeweilig in Betracht kommende Druckhöhe in's Auge fasst. Diese Bemerkung stimmt auch mit dem überein, was schon vorne

in Bezug auf die Figur 111 gesagt ward, obgleich man dort nicht die gedachte besondere, sondern die allgemeinere Constructionsregel (§. 51) zu Grunde gelegt hat.

Fig. 117.



Selbstverständlich ergibt sich das gleiche Resultat auf dem Wege der Rechnung.

Nennt man nämlich (Fig. 118):

$\mathfrak{H}$ ... die ganze Erdreichhöhe $\overline{AC}$,

H ... die eigentliche Wandhöhe $\overline{AB}$,

δ ... den dazu gehörigen, auf die Lage des Erdplateaus $\overline{DI}$ Bezug nehmenden Winkel CAD,

γ ... den entsprechenden Bruchwinkel EAI,

x ... eine andere, beliebig gewählte Höhe $\overline{CN}$,

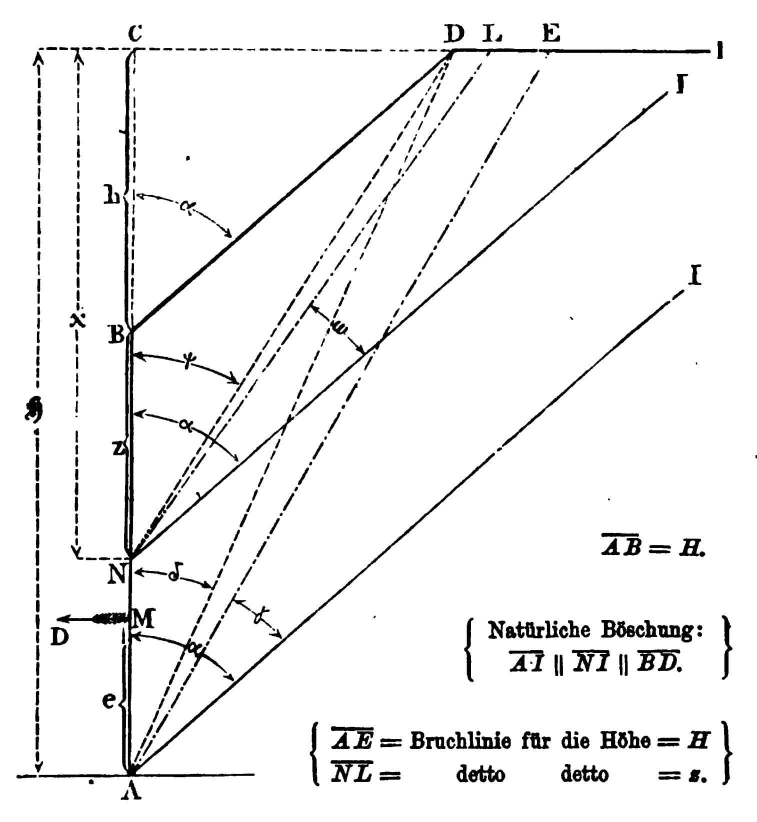
z ... die bezügliche Wandhöhe $\overline{BN}$,

ψ ... den damit correspondirenden Winkel CND, welcher die analoge Bedeutung hat, wie oben δ,

ω ... den bei der Höhe x entstehenden Bruchwinkel LNI,

und behält man die früheren Bezeichnungen h und α bei, so lassen sich folgende Betrachtungen anstellen:

Fig. 118.



Nach den Relationen (193) und (197) ist zunächst:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{(H+h)} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \delta - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

also wegen:

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\mathfrak{H}^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$= \frac{H + h}{\sqrt{(H+h)^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(210)},$$

auch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= \frac{\mathfrak{H} - \cos\alpha\sqrt{\mathfrak{H}^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{\mathfrak{H}^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}} \\ &= \frac{H + h - \cos\alpha\sqrt{(H+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{(H+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (211).$$

Gemäss diesen mit den Höhen $\mathfrak{H}$ und H correspondirenden Gleichungen kann man nunmehr bezüglich der Höhen x und z schreiben:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{h}{x}\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{(z+h)}\operatorname{tg}\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (212),$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\omega &= \frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{x - \cos\alpha\sqrt{x^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{x^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{z + h - \cos\alpha\sqrt{(z+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{(z+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}} \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (213).$$

Die beiden Grenzen, zwischen denen alle sonstigen Werthe liegen, sind offenbar:

1. für die mit x bezeichnete Höhe:

$$x = h \text{ und } x = \mathfrak{H};$$

2. für die eigentliche Wandhöhe z:

$$z = 0 \text{ und } z = H:$$

3. für den mit ψ bezeichneten Winkel:

$$\psi = \alpha \text{ und } \psi = \delta;$$

4. für den Bruchwinkel ω:

$$\omega = 0 \text{ und } \omega = \gamma.$$

Bei der Zunahme von x, beziehungsweise z, nimmt nicht nur ψ, sondern auch ω ab, somit werden die von oben nach unten aufeinander folgenden Bruchlinien immer steiler, so dass $\omega = \gamma$ der grösste Bruchwinkel ist, welcher zugleich der grössten Wandhöhe (H) entspricht. Indem dadurch das früher in Bezug auf die Convergenz jener Bruchlinien Gesagte seine Bestätigung findet, ist wohl erkennbar, dass zu dieser Beweisführung es eigentlich genügt, blos der ersten Gleichung in (213), wo $\operatorname{tg}\omega$ als eine Function von ψ dargestellt ist, die Aufmerksamkeit zuzuwenden; indessen hat man dennoch die weiteren Relationen daselbst, so

wie jene in (211) beigefügt, um nebstbei auch die Abhängigkeit des Bruchwinkels von der jeweiligen Wandhöhe oder von der Höhe des Erdreiches bis zum Plateau anschaulich zu machen.

Uebergehend auf den Erddruck, welcher auf die ganze Wandhöhe $\overline{AB} = H$ mit D, auf den Wandtheil $\overline{BN} = z = (x - h)$ aber mit y bezeichnet wird, hat man zunächst nach der Formel (202):

$$D = \tfrac{1}{2}\, g\, \mathfrak{H}^2 \left(\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\delta}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\, g\, \mathfrak{H}^2 \left(\frac{\cos\delta - \cos\alpha}{\sin\alpha \cos\delta}\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\, g h^2 \left(\frac{\cos\delta - \cos\alpha}{\cos\alpha \sin\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(214)},$$

wenn man hiebei die Relation (193) zwischen $\mathfrak{H}$ und h berücksichtiget.

Substituirt man anstatt $\cos\delta$ und $\operatorname{tg}\gamma$ je einen der obigen Werthe in (210) und (211), so findet man, ausser den im vorigen §. aufgestellten Gleichungen für D, noch:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[\mathfrak{H} - \cos\alpha\sqrt{\mathfrak{H}^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}\right]^2 \ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[H + h - \cos\alpha\sqrt{(H+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}\right]^2 \end{aligned}\right\} \text{(215)}.$$

Geht man nunmehr von der ganzen Wandhöhe H auf die Zwischenhöhe z über, so hat man in den vorigen Formeln anstatt D, $\mathfrak{H}$, H und δ aufeinanderfolgend die Buchstaben y, x, z und ψ zu setzen, weil offenbar zwischen diesen die analogen Beziehungen wie zwischen jenen stattfinden. Hiernach ist der Erddruck y auf den Wandtheil von der Höhe $\overline{BN} = z = (x - h)$:

$$y = \tfrac{1}{2}\, g h^2 \left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\alpha \sin\psi}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(216)}$$
$$= \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[x - \cos\alpha\sqrt{x^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(217)}$$
$$= \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[z + h - \cos\alpha\sqrt{(z+h)^2 + h^2\operatorname{tg}^2\alpha}\right]^2 \ .\text{(218)},$$

je nachdem y als eine Function von ψ, x oder z dargestellt wird.

Auf diese Weise ist bei der Variation der Wandhöhe unter sonst gleichen Umständen die Veränderung des Erddrucks dargestellt, und man sieht, dass das Veränderungsgesetz jetzt nicht mehr wie in den Fällen, wenn die Oberfläche des Erdreiches eine horizontale oder schiefe Ebene ist, nach der einfachen paraboli-

schen Gleichung: $y = kz^2$ beurtheilt werden kann; eine Bemerkung, die man auch schon im §. 55, von einem anderen Gesichtspunkte ausgehend, zu machen Gelegenheit hatte.

Nur für die in Bezug auf die Ueberhöhung h bezüglichen Grenzfälle, wo entweder $h = 0$ oder $h = \infty$ gesetzt wird, kommt die parabolische Gleichung wieder genau zum Vorschein, denn dann ist einerseits:

$$y = \tfrac{1}{2}\, g z^2 \left(\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\, g z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

und andererseits:

$$y = \tfrac{1}{2}\, g z^2 \sin^2 \alpha \text{ *)},$$

welche Resultate mit jenen unter (94, 96) und (147) übereinstimmen, wenn man anstatt der dortigen Druckhöhe H die jetzt in Rechnung gebrachte z substituirt.

Diese Uebereinstimmung war in der That zu erwarten, weil der eine Grenzfall (für $h = 0$) und die Relationen (94, 96) sich gleichzeitig auf die Anordnung beziehen, wo die Erdoberfläche horizontal und im Niveau der Wandkrone liegt, während der andere Grenzfall für ($h = \infty$), wozu die Relation (147) gehört,

---

*) Denn es ist nach der allgemeinen Relation (218):

$$y = \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[z + h - \cos\alpha \sqrt{z^2 + 2zh + h^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}\right]^2$$

$$= \frac{g}{2\sin^2\alpha}\left[z + h - h\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha\,\frac{z}{h} + \cos^2\alpha\,\frac{z^2}{h^2}}\right]^2$$

$$= \frac{g h^2}{2\sin^2\alpha}\left[1 + \frac{z}{h} - \sqrt{1 + 2\cos^2\alpha\,\frac{z}{h} + \cos^2\alpha\,\frac{z^2}{h^2}}\right]^2,$$

daher für $h = \infty$, indem man blos die erste Potenz von $\frac{z}{h}$ berücksichtigt, $\frac{z^2}{h^2}$ aber als unendlich Kleines der zweiten Ordnung weglässt:

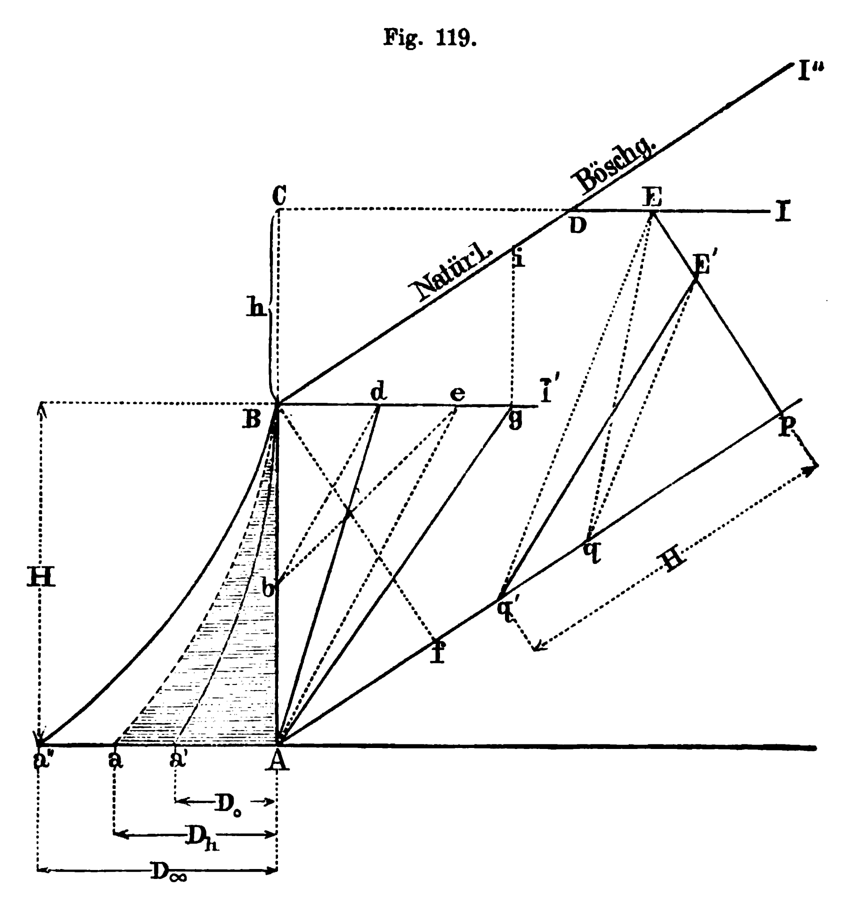
$$y = \frac{g h^2}{2\sin^2\alpha}\left[1 + \frac{z}{h} - \left(1 + 2\cos^2\alpha\,\frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$= \frac{g h^2}{2\sin^2\alpha}\left[1 + \frac{z}{h} - 1 - \cos^2\alpha\,\frac{z}{h}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, g z^2 \left(\frac{1 - \cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\, g z^2 \sin^2\alpha.$$

an die Voraussetzung geknüpft ist, dass von der Wandkrone angefangen das Erdreich nach der natürlichen Böschung fortwährend ansteigt.

Fig. 119.



Zugleich geht hieraus hervor, dass die der allgemeinen Gleichung (218) entsprechende Erddruckveränderungs-Curve $\widehat{Ba}$ (Fig. 119), wobei z die Abscissen und y die Ordinaten vorstellen, zwischen die gleichnamigen parabolischen Curven $\widehat{Ba'}$ und $\widehat{Ba''}$, welche den gedachten Grenzfällen entsprechen, hineinfallen, daher auch der auf die ganze Wandhöhe $\overline{AB} = H$ stattfindende Erddruck, welcher in Bezug auf die Erdreichbegrenzung BDI

durch die Ordinate $\overline{Aa} = D_h$ dargestellt ist, zwischen den Werthen $\overline{Aa'} = D_0$ und $\overline{Aa''} = D_\infty$ gelegen sein muss, wovon sich der erste auf den einen Grenzfall $h = 0$ (Erdreichoberfläche $\overline{BI'}$) und der zweite auf den anderen Grenzfall $h = \infty$ (Erdreichoberfläche $\overline{BI''}$) bezieht.

Um die erwähnten Parabeln, welche den gemeinschaftlichen Scheitel B und dieselbe Horizontale als Achse haben, construiren zu können, ist nur nöthig, die letztgenannten Werthe für die Grösse des Erddruckes $\overline{Aa'} = D_0$ und $\overline{Aa''} = D_\infty$ zu bestimmen.

Zu diesem Behufe wende man für den ersten Grenzfall ($h = 0$) die in Figur 37 angedeutete Constructions-Methode an, und stelle hiernach den Erddruck D_0 zunächst durch das Gewicht des Erdprismas Bbe dar, indem man nämlich, wenn $\overline{Ap}$ die natürliche Erdböschung ist, $\sphericalangle BAe = \sphericalangle eAp$ und $\overline{Bb} = \overline{Be}$ macht. Hierauf verwandle man das Dreieck Bbe in ein solches von der Höhe $\overline{AB} = H$ dadurch, dass $\overline{bd} \parallel \overline{be}$ gezogen und so erhalten wird:

$$D_0 = g \cdot \triangle\, Bbe = g \cdot \triangle\, ABd.$$

Zur Darstellung des Erddruckes D_∞ für den zweiten Grenzfall ($h = \infty$) dient die Constructionsregel nach Fig. 55; man mache nämlich $\overline{Bf} \perp \overline{Ap}$, $\overline{Bi} = \overline{Bf}$, so dass $\triangle\, ABi$, wenn man die Linie $\overline{Ai}$ ziehen würde, das Profil des Erdprismas vorstellt, dessen Gewicht gleich dem Erddrucke D_∞ ist. Staltet man dieses Profil um, indem man $\overline{gi} \perp \overline{Bg}$ zieht, so sind augenscheinlich die beiden Dreiecke ABi und ABg einander gleich, folglich hat man:

$$D_\infty = g \cdot \triangle\, ABi = g \cdot \triangle\, ABg.$$

Hiernach ergibt sich die Proportion:

$$D_0 : D_\infty = \overline{Bd} : \overline{Bg};$$

d. h. man kann jetzt, da der Massstab zur Construction beliebig ist, unmittelbar setzen:

$$D_0 = \overline{Aa'} = \overline{Bd},\ D_\infty = \overline{Aa''} = \overline{Bg}.$$

Auf diese Weise sind die Druckwerthe für die Grenzfälle durch zwei Linien, die sogleich als Ordinaten verwendet werden,

dargestellt, und es ist sofort möglich, die fraglichen Parabeln $\widehat{Ba'}$ und $\widehat{Ba''}$ zu zeichnen.

Um auch den der Ueberhöhung $\overline{BC} = h$ entsprechenden Erddruck D_h auf die Wandhöhe $\overline{BA} = H$ zu finden, wird man der Constructions-Methode nach Fig. 113 die Aufmerksamkeit zuwenden, somit $\overline{Ap} = \overline{AD}$, $\overline{Ep} \perp \overline{Ap}$ und $\overline{pq} = \overline{Ep}$ machen, und hiedurch das Erdprisma Epq, dessen Gewicht dem Erddrucke gleich ist, erhalten; weiter aber wird man das Profil Epq in das Dreieck $E'pq'$, dessen eine Kathete $\overline{pq'} = H$ gemacht und dessen zweite Kathete $\overline{E'p}$ durch das Ziehen der zu einander parallelen Geraden $\overline{Eq'}$ und $\overline{E'q}$ gesucht wird, verwandeln, damit man schliesslich wieder ein, dem Gewichte nach, der Intension des Erddruckes gleiches Erdprisma findet, von dem das Profil derart ein rechtwinkeliges Dreieck bildet, dass hierin die Eine Kathete durch die Wandhöhe H dargestellt ist, folglich die andere Kathete unmittelbar als Repräsentant des Erddruckes angesehen, und schliesslich die Relation angesetzt werden kann:

$$D_h = \overline{Aa} = \overline{E'p}.$$

Selbstverständlich kann man die analoge Construction für andere Wandhöhen z durchführen, und hiedurch beliebig viele Punkte der Druckveränderungs-Curve $\widehat{Ba}$ erhalten. Das angegebene Verfahren ist, wie man sieht, im Ganzen und Grossen eigentlich dasselbe, welches schon im §. 54 für jeden beliebigen Fall beschrieben wurde, und die Wandhöhe H ist hier insbesondere jene constante Dreiecksseite für die Profilsverwandlung, welche dort allgemein mit b bezeichnet erscheint.

§. 60.

Mittelpunkt des Erddruckes in dem voruntersuchten Falle. Ist dieser Mittelpunkt in M (Fig. 118) und hiebei $\overline{AM} = e$, so hat man unter Beibehaltung der sonstigen Bezeichnungen auf Grundlage der allgemeinen Gleichung (190):

$$De = \int_{z=0}^{z=H} y\,dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (219),$$

wenn man beachtet, dass jetzt die beliebige Wandhöhe $= z$ ist.

In dieser Gleichung hätte man nun für D, und y die entsprechenden Werthe nach den Relationen (215), und (218) einzusetzen und sofort nach der Variablen z innerhalb der hiefür angegebenen Grenzen zu integriren. Nachdem aber die Passirung dieses Weges zu umständlich wäre, so soll, um ein einfacheres Verfahren zu ermöglichen, anstatt der Variablen z der damit correspondirende gleichfalls variable Winkel ψ eingeführt werden, so dass dann die oben angedeutete Integration zwischen den Grenzen $\psi = \alpha$ und $\psi = \delta$ vorzunehmen ist, also geschrieben werden kann:

$$De = \int_{\psi=\alpha}^{\psi=\delta} y\,dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (220),$$

wobei statt D die bereits früher bestimmte Grösse des Erddruckes, statt z und y aber, den Relationen (212) und (216) gemäss, zu setzen ist:

$$z = h\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\psi} - 1.\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\,g h^2 \left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\cos\alpha \sin\psi}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,g\,\frac{h^2}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin\psi}\right)^2.$$

Hiernach ergibt sich, wenn man vorläufig blos das statische Druckmoment De berechnet, wegen

$$dz = -h \operatorname{tg}\alpha \,\frac{d\psi}{\sin^2\psi}:$$

$$De = -\tfrac{1}{2}\,g h^3 \,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\int_{\psi=\alpha}^{\psi=\delta}\left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin^2\psi}\right)^2 d\psi \quad \ldots\ldots \quad (221).$$

Setzt man das allgemeine Integrale:

$$\int\left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin^2\psi}\right)^2 d\psi = \text{Function}\,(\psi) = F(\psi),$$

so erscheint De unter folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} De &= -\tfrac{1}{2}\,g h^3 \,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\Big[F(\delta) - F(\alpha)\Big] \quad \ldots\ldots \\ &= \tfrac{1}{2}\,g h^3 \,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\Big[F(\alpha) - F(\delta)\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (222).$$

Um das allgemeine Integrale bequemer zu finden, führe man anstatt ψ die Variable $\operatorname{cotg}\psi = u$ ein; hiedurch wird:

$$F(\psi) = \int\left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin^2\psi}\right)^2 d\psi = \int\left(\frac{\cos\psi - \cos\alpha}{\sin\psi}\right)^2 \frac{d\psi}{\sin^2\psi}$$
$$= -\int\left[\operatorname{cotg}\psi - \cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\psi}\right]^2 d\operatorname{cotg}\psi$$
$$= -\int\left[u - \cos\alpha\sqrt{1+u^2}\right]^2 du$$
$$= -\int\left[\cos^2\alpha + (1+\cos^2\alpha)\,u^2 - 2\,u\cos\alpha\sqrt{1+u^2}\right] du$$
$$= -u\cos^2\alpha - \tfrac{1}{3}(1+\cos^2\alpha)\,u^3 + \tfrac{2}{3}\cos\alpha\,(1+u^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Substituirt man jetzt den Werth von $u = \operatorname{cotg}\psi$ wieder zurück, so ergibt sich allgemein:

$$F(\psi) = -\cos^2\alpha\operatorname{cotg}\psi - \tfrac{1}{3}(1+\cos^2\alpha)\operatorname{cotg}^3\psi + \tfrac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\psi},$$

daher insbesondere für die erste Integrationsgrenze ($\psi = \alpha$):

$$F(\alpha) = -\cos^2\alpha\operatorname{cotg}\alpha - \tfrac{1}{3}(1+\cos^2\alpha)\operatorname{cotg}^3\alpha + \tfrac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$$
$$= \tfrac{1}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left[-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - (1+\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 2\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left[-(1+3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 2\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\left[-(1+\sin^2 a)(1-\sin^2\alpha) + 1\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\,.\,\sin^4\alpha = \tfrac{2}{3}\sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{3}\sin 2\,\alpha;$$

ferner für die zweite Integrationsgrenze ($\psi = \delta$):

$$F(\delta) = -\cos^2\alpha\operatorname{cotg}\delta - \tfrac{1}{3}(1+\cos^2\alpha)\operatorname{cotg}^3\delta + \tfrac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sin^3\delta}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\left[\frac{3\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\delta} + \left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^3\delta}\right) - \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\delta}\right].$$

Hiernach ist die Differenz der beiden Functionswerthe:

$$F(\alpha) - F(\delta) = \tfrac{1}{3}\left[2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\delta} + \left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^3\delta}\right) - \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\delta}\right],$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (222):

$$De = \tfrac{1}{6}\,g h^3\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}\left[2\sin\alpha\cos\alpha + \frac{3\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\delta} + \left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^3\delta}\right) - \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\delta}\right].$$

Führt man die ganze Höhe $\mathfrak{H}$ ein, setzt man also nach der Relation (193):

$h = \mathfrak{H} \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha}$, so ergibt sich:

$$De = \frac{1}{6} g \mathfrak{H}^3 \frac{\operatorname{tg}^3 \delta}{\sin^3 \alpha} \left[2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{3 \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \delta} + \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \delta} \right) - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^3 \delta} \right]$$

$$= \frac{1}{6} g \mathfrak{H}^3 \left[\frac{2 \operatorname{tg}^3 \delta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{3 \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^3 \delta} \right],$$

also, wegen

$$\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1 \right)}{\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)} = \frac{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha},$$

und

$$\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^3 \delta} = \frac{1}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos^3 \delta},$$

der weitere Ausdruck:

$$De = \frac{1}{6} g \mathfrak{H}^3 \left[\frac{2 \operatorname{tg}^3 \delta}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{3 \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos^3 \delta} \right]$$

$$= \frac{1}{6} g \mathfrak{H}^3 \left[1 + \frac{2 + 3 \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 \delta}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos^3 \delta} \right].$$

Setzt man nun wieder, wie im §. 57, der Abkürzung halber $\operatorname{tg} \alpha = a$ und $\operatorname{tg} \delta = b$, und beachtet zugleich die Relation:

$$\frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos^3 \delta} = \frac{2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg}^2 \alpha} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{\frac{3}{2}},$$

so findet man endlich für das statische Druckmoment die Gleichung:

$$De = \frac{1}{6} g \mathfrak{H}^3 \left[1 + \frac{2 + 3 b^2}{a^2} + \frac{2 b^3}{a} - \frac{2 \sqrt{1 + a^2}}{a^2} (1 + b^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{6} g \frac{\mathfrak{H}^3}{a^2} \left[2 + a^2 + 3 b^2 + 2 a b^3 - 2 \sqrt{1 + a^2} (1 + b^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (223).$$

Indem man dieses Moment De durch die Grösse des Erddruckes D dividirt, erhält man unmittelbar den Abstand e dieses Druckes von der Wandbasis, daher, wenn hiebei der in Gleichung (205) erscheinende Werth von D berücksichtigt wird:

$$e = \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{H}\,\frac{2 + a^2 + 3\,b^2 + 2\,ab^3 - 2\sqrt{1 + a^2}\,(1 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2})^2},$$

oder, in soferne man anstatt $\mathfrak{H}$ die Wandhöhe H einführt, also unter Bezugnahme auf die Gleichung (194)

$$\mathfrak{H} = H\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\delta}\right) = H\left(\frac{a}{a - b}\right)$$

setzt:

$$e = \tfrac{1}{3}\,H\left(\frac{a}{a - b}\right)\frac{2 + a^2 + 3\,b^2 + 2\,ab^3 - 2\sqrt{1 + a^2}\,(1 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2})^2}$$

$$= \tfrac{1}{3}\,mH,$$

wobei m ein Coefficient ist, welcher durch die Gleichung:

$$m = \left(\frac{a}{a - b}\right)\frac{2 + a^2 + 3\,b^2 + 2\,ab^3 - 2\sqrt{1 + a^2}\,(1 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2})^2}$$

ausgedrückt erscheint, und denjenigen Factor bezeichnet, mit dem man $\frac{1}{3}\,H$ zu multipliciren hat, um den in Frage stehenden Abstand e zu finden.

Es handelt sich nun darum, diesen Factor auf eine einfachere Form zu bringen. Geschieht dies, so ergibt sich:

$$m = \left(\frac{a}{a + b}\right)\left[1 + \frac{2\,b\sqrt{1 + b^2}}{a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2}}\right]^{*)}.$$

---

*) Um diesen Ausdruck zu finden, kann man verfahren, wie folgt: Zunächst ist nach der obigen Gleichung:

$$m = \left(\frac{a}{a - b}\right)\frac{2 + a^2 + 3\,b^2 + 2\,a\,b^3 - 2\sqrt{1 + a^2}\,(1 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2})^2}$$

$$= \left(\frac{a}{a - b}\right)\frac{Z}{N}$$

indem man der Kürze wegen den Zähler des irrationalen Bruches mit Z und seinen Nenner mit N bezeichnet.

Beachtet man, dass anstatt

$$\sqrt{1 + a^2}\,(1 + b^2)^{\frac{3}{2}} \text{ auch } (1 + b^2)\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}$$

geschrieben werden kann, so hat man:

$$\frac{Z}{N} = \frac{2 + a^2 + 3\,b^2 + 2\,a\,b^3 - 2\,(1 + b^2)\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}}{(\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2})^2}.$$

Macht man in diesem Bruche den Nenner rational, so hat man Z und N mit $(\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2})^2$ zu multipliciren, wodurch eine neue Bruch-

Noch in einer anderen Art lässt sich der Coefficient m darstellen, denn es ist, wenn man in der letzten Gleichung die beiden Hauptfactoren mit einander multiplicirt:

$$m = \frac{a}{(a+b)} + \frac{2ab}{(a+b)} \cdot \frac{\sqrt{1+b^2}}{(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2})}$$

$$= 1 - \frac{b}{(a+b)} + \frac{b}{(a+b)} \cdot \frac{2a\sqrt{1+b^2}}{(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2})}$$

$$= 1 + \frac{b}{(a+b)} \left[\frac{a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}\right],$$

also, indem man den Nenner rational macht:

$$m = 1 + \left(\frac{b}{a+b}\right) \frac{(a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2})^2}{(a^2 - b^2)}$$

$$= 1 + \left(\frac{b}{a-b}\right) \left[\frac{a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}}{a+b}\right]^2,$$

oder, wenn man den Zähler rational erhalten will:

$$m = 1 + \left(\frac{b}{a+b}\right) \frac{(a^2 - b^2)}{(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2})^2}$$

$$= 1 + \frac{b\,(a-b)}{(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2})^2}.$$

Die letzte Gleichung ist dann zur Anwendung bequem, wenn der Unterschied zwischen a und b verhältnissmässig klein ist.

---

form zum Vorschein kommt, worin der Zähler und Nenner mit Z' und beziehungsweise N' bezeichnet werden soll, so dass zu setzen ist:

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{Z(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2})^2}{N(\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2})^2}.$$

Es ist aber, wenn man das angezeigte Quadrat bildet, der neue Zähler:

$$Z' = Z\left[2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right]$$

$$= \left[2 + a^2 + 3b^2 + 2ab^3 - 2(1+b^2)\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right] \times$$

$$\left[2 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right],$$

daher, wenn man die beabsichtigte Multiplication ausführt, und sodann reducirt:

$$Z' = (a-b)^2 \left[a^2 - b^2 + 2ab(1+b^2) - 2b^2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right]$$

$$= (a-b)^2 (a^2 - b^2) \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a^2 - b^2} (a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2})\right]$$

$$= (a+b)\ (a-b)^3 \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a^2 - b^2} (a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2})\right]$$

endlich, wenn beachtet wird, dass man setzen kann:

Stellt man die gefundenen Resultate zusammen, so hat man:

$$e = \frac{1}{3} m H \dots\dots (224),$$

$$m = \frac{a}{(a+b)} \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}\right] \dots\dots (225)$$

$$= 1 + \frac{b}{(a-b)} \left[\frac{a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}}{a+b}\right]^2 \dots\dots (226)$$

$$= 1 + \frac{b(a-b)}{(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2})^2} \dots\dots (227),$$

worin $a = \operatorname{tg} \alpha$ und $b = \operatorname{tg} \delta$ ist.

Für die im vorigen §. bemerkten beiden Grenzfälle ist einerseits, wegen $\delta = 0$, auch $b = 0$, und andererseits, wegen $\alpha = \delta$, auch $a = b$; somit findet man für beide Fälle, und zwar augenblicklich aus der Formel (227):

$$m = 1, \text{ folglich } e = \tfrac{1}{3} H,$$

was mit den bereits früher gefundenen Resultaten für die Lage des Druckmittelpunktes in den Untersuchungen des ersten und zweiten Capitels des laufenden Abschnittes übereinstimmt und auch übereinstimmen muss, weil die Oberfläche des Erdreiches im ersten Grenzfalle horizontal und im gleichen Niveau mit der Wandkrone liegt, im zweiten Grenzfalle aber fortan nach der

---

$$(a^2 - b^2) = [a\sqrt{1+b^2}]^2 - [b\sqrt{1+a^2}]^2$$
$$= (a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2})(a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}),$$

auch:

$$Z' = (a+b)(a-b)^2 \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}\right].$$

Der neue Nenner ergibt sich mit:

$$N' = (\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2})^2 (\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2})^2$$
$$= (a^2 - b^2)^2 = (a+b)^2 (a-b)^2.$$

Hieraus findet man die neue Bruchform, nämlich:

$$\frac{Z'}{N'} = \frac{Z}{N} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}\right],$$

mit deren Benützung aber sofort die im Texte angegebene Relation:

$$m = \left(\frac{a}{a-b}\right) \frac{Z}{N} = \left(\frac{a}{a+b}\right) \left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}}\right].$$

natürlichen Böschung ansteigt, wie dies in der That in jenen Capiteln vorausgesetzt ward. Sonst aber ist $m > 1$, somit $e > \frac{1}{3} H$, was anzeigt, dass in allen Fällen, welche innerhalb der angedeuteten Grenzen enthalten sind, also, wenn die in der Fig. 112 angedeutete Erdüberhöhung h eine beliebige Grösse, zwischen 0 und ∞, hat, der Mittelpunkt des Erddruckes, von der Wandbasis an gerechnet, etwas über den dritten Theil der Wandhöhe hinaus zu liegen kommt. Mit Berücksichtigung der beiden Grenzfälle kann man daher schreiben:

$$m \overline{>} 1 \text{ und } e \overline{>} \tfrac{1}{3} H \quad \ldots\ldots \quad (228).$$

Ex. Für das am Schlusse des §. 58 angegebene Beispiel sind folgende Daten einzusetzen:

$$H = 10 \text{ Fuss}, \operatorname{tg} \alpha = a = 1 \text{ und } \operatorname{tg} \delta = b = \tfrac{1}{2},$$

somit erhält man nach einer der obigen Formeln, etwa aus jener unter (225):

$$m = \tfrac{3}{5}\left[1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}\right] = \tfrac{3}{5}\left[1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})\right]$$
$$= \tfrac{2}{5}(8 - \sqrt{10}) = 1{\cdot}075,$$
$$e = \tfrac{1}{3} m H = 0{\cdot}358\, H = 3{\cdot}58 \text{ Fuss.}$$

Zur Vereinfachung solcher Rechnungen kann man die jenseitige Tabelle XII benützen, in welcher für verschiedene Werthe von a und b die Resultate für $\frac{e}{H} = \frac{1}{3} m$ eingetragen erscheinen.

Anmerkung.

Anknüpfend an die Anmerkung auf Seite 250 ist hier zu erwähnen, dass auch das von Poncelet (wenn auch formell etwas abweichend) entwickelte Druckmoment, welches in der Gleichung (223) mit De bezeichnet erscheint, das richtige Resultat ergibt. Die zur Herstelluug des Werthes von e selbst nothwendige Division des Druckmomentes De durch den Druck D jedoch findet man weder in der Abhandlung Poncelet's noch anderswo allgemein durchgeführt, welche Division wohl in der Vermuthung, hiedurch kaum zu einem in Bezug auf bequemen Gebrauch befriedigenden Resultate zu gelangen, unterblieben sein dürfte. Die Formeln (224) bis (227) zeigen indessen, dass dem nicht so sei, indem dieselben keineswegs complicirt sind, vielmehr eine bemerkenswerthe Uebersichtlichkeit gewähren.

XII. Tabelle.

Werthe von: $\frac{e}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 + \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}}\right] = \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{b}{a-b}\right)\left[\frac{a\sqrt{1+b^2} - b\sqrt{1+a^2}}{a+b}\right]^2\right\} =$

$= \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{b(a-b)}{(a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2})^2}\right\}$, zur Berechnung des Hebelsarmes e für den Erddruck D, welchen die Stützwand erleidet.

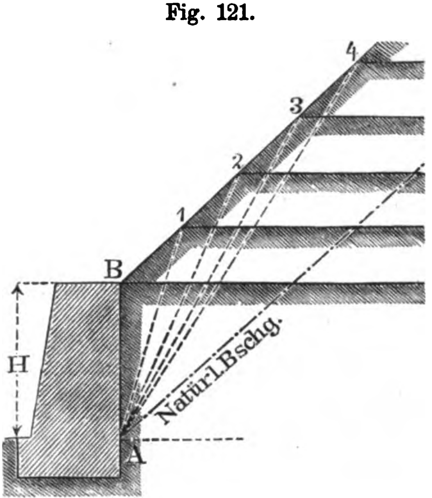
$\frac{e}{H} =$	$b = \text{tg}\,\delta = \frac{h}{(H+h)}\text{tg}\,\alpha$, für das Niveau von dem die Stützwand überragenden Erdplateau:																				
$a = \text{tg}\,\alpha$, für die natürliche Erdböschung:	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1.3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
2·0	0·333	0·346	0·353	0·356	0·356	0·356	0·354	0·352	0·350	0·348	0·346	0·344	0·343	0·341	0·340	0·338	0·337	0·336	0·335	0·334	0·333
1·9	0·333	0·346	0·354	0·356	0·357	0·356	0·354	0·352	0·350	0·348	0·346	0·344	0·342	0·341	0·339	0·338	0·336	0·335	0·334	0·333	
1·8	0·333	0·347	0·354	0·357	0·358	0·357	0·355	0·353	0·350	0·348	0·346	0·344	0·342	0·340	0·339	0·337	0·336	0·334	0·333		
1·7	0·333	0·349	0·355	0·358	0·358	0·357	0·355	0·353	0·352	0·348	0·346	0·343	0·342	0·339	0·338	0·336	0·335	0·333			
1·6	0·333	0·349	0·357	0·359	0·359	0·358	0·355	0·353	0·350	0·347	0·345	0·343	0·342	0·338	0·336	0·335	0·333				
1·5	0·333	0·350	0·358	0·360	0·360	0·358	0·356	0·353	0·349	0·347	0·344	0·342	0·339	0·337	0·335	0·333					
1·4	0·333	0·351	0·359	0·361	0·361	0·359	0·356	0·353	0·349	0·346	0·343	0·340	0·338	0·335	0·333						
1·3	0·333	0·352	0·360	0·363	0·362	0·359	0·356	0·351	0·348	0·345	0·342	0·338	0·335	0·333							
1·2	0·333	0·353	0·362	0·364	0·362	0·359	0·356	0·351	0·348	0·343	0.339	0·336	0·333								
1·1	0·333	0·354	0·363	0·365	0·363	0·359	0·354	0·350	0·345	0·341	0·337	0·333									
1·0	0·333	0·356	0·365	0·366	0·363	0·358	0·353	0·348	0·343	0·338	0·333										

Fig. 120.

Nachdem für die vorbezeichneten zwei Grenzfälle, nämlich einerseits für $b = 0$ und andererseits für $a = b$, insbesondere $e = \frac{1}{3} H$, sonst aber stets $e > \frac{1}{3} H$ wird, so leuchtet, unter gleichzeitiger Rücksichtsname auf die in der Tabelle XII erscheinende Zusammenstellung, ohneweiters ein, dass ein Maximum von e vorhanden sein muss, welches zu einem gewissen, vorläufig noch unbekannten Werthe von b, beziehungsweise von δ und h, gehören wird.

Wenn man sich daher vorstellt, dass das Erdplateau, von der Wandkrone B (Fig. 121) angefangen, nach und nach immer höher hinaufgerückt wird, so dass es aufeinanderfolgend in das

Fig. 121.



Niveau der Punkte 1, 2, 3, 4, u. s. w. gelangt, so wird der Mittelpunkt des Erddruckes, welcher anfänglich von der Wandbasis A um den dritten Theil der Wandhöhe entfernt liegt, eine Zeit lang allmälig emporsteigen, bis er bei einer gewissen Höhenlage des Plateaus seinen höchsten Stand einnimmt, hierauf aber allmälig wieder herabsinken, und schliesslich, wenn das Plateau in eine unendlich grosse Entfernung gelangt, in seine anfängliche Lage zurückkehren; so dass der Spielraum für die Bewegung des Druckmittelpunktes, ähnlich wie jener einer Pendel-

bewegung, an gewisse unüberschreitbare Grenzen gebunden erscheint.

Um dieses bemerkenswerthe Verhalten der Resultirenden des Erddruckes gegenüber der Höhenlage des Erdplateaus näher anschaulich zu machen, ist es nöthig, zunächst zu untersuchen, für welchen Werth von δ der Hebelsarm e, daher auch der Coefficient m, unter übrigens gleichen Umständen am grössten wird.

In dieser Absicht benütze man die Gleichung (227):

$$m = 1 + \frac{b\,(a - b)}{(a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2})^2},$$

und beachte, dass m ein Maximum wird, wenn das Gleiche mit dem auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens vorkommenden zweiten Gliede, das in Bruchform erscheint, stattfindet.

Drückt man hiebei den Zähler mit $\mathfrak{Z}$ und den Nenner mit $\mathfrak{N}$ aus, so hat man zunächst:

$$\mathfrak{Z} = b\,(a - b) = a\,b - b^2,$$
$$\mathfrak{N} = (a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2})^2,$$
$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}} = \frac{a\,b - b^2}{(a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2})^2},$$

daher, indem man, um auf das Maximum überzugehen, den Bruch nach b differenzirt, und das Resultat gleich Null setzt:

$$\frac{d\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}\right)}{d\,b} = \frac{\mathfrak{N}\,\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,b} - \mathfrak{Z}\,\frac{d\,\mathfrak{N}}{d\,b}}{\mathfrak{N}^2} = 0,$$

woraus sich die Bedingungsgleichung ergibt:

$$\mathfrak{N}\,\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,b} = \mathfrak{Z}\,\frac{d\,\mathfrak{N}}{d\,b}.$$

Nun ist aber einerseits:

$$\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,b} = a - 2\,b,$$

und andererseits:

$$\frac{d\,\mathfrak{N}}{d\,b} = 2\,(a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2})\left(\frac{a\,b}{\sqrt{1 + b^2}} + \sqrt{1 + a^2}\right),$$

somit in Folge jener Bedingungsgleichung, indem man gleich nach Zulässigkeit abkürzt:

$$(a\sqrt{1 + b^2} + b\sqrt{1 + a^2})\,(a - 2\,b)$$
$$= 2\,b\,(a - b)\left(\frac{a\,b}{\sqrt{1 + b^2}} + \sqrt{1 + a^2}\right).$$

Schafft man in dieser Gleichung den Bruch weg, führt die sich ergebenden Multiplicationen aus, sondert die rationalen Glieder von dem mit dem Wurzelzeichen behafteten Theile, und reducirt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$a(1-b^2)-2b=b\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)},$$

und, wenn man beiderseits durch $2b$ dividirt, weiter:

$$a\left(\frac{1-b^2}{2b}\right)-1=\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Die fernere Entwickelung kann in verschiedener Art geschehen; am einfachsten gestaltet sich solche, wenn man jetzt auf die Tangentenwerthe $\operatorname{tg}\alpha=a$ und $\operatorname{tg}\delta=b$ zurückkehrt.

Hiernach ist:

$$\sqrt{(1+a^2)}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\sqrt{(1+b^2)}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}=\frac{1}{\cos\delta},$$

$$\frac{1-b^2}{2b}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\delta}{2\operatorname{tg}\delta}=\operatorname{cotg}2\delta,$$

und es nimmt somit die letzte zwischen a und b bestehende Bedingungsgleichung folgende Gestalt an:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}2\delta-1=\frac{1}{2\cos\alpha\cos\delta},$$

$$\frac{\sin\alpha\cos2\delta}{\cos\alpha\sin2\delta}-1=\frac{1}{2\cos\alpha\cos\delta},$$

$$\sin\alpha\cos2\delta-\cos\alpha\sin2\delta=\frac{\sin2\delta}{2\cos\delta}$$

$$\sin(\alpha-2\delta)=\sin\delta,$$

woraus schliesslich, wegen $(\alpha-2\delta)=\delta$, die ebenso einfache wie merkwürdige Relation folgt:

$$\delta=\tfrac{1}{3}\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(229).$$

Da bereits vorhergesehen ward, dass es sich hier um ein Maximum von e in Bezug auf b, beziehungsweise δ, handelt, so kann unterlassen werden, zur näheren Begründung desselben auch auf den zweiten Differential-Quotienten von e nach b einzugehen.

Um den Maximalwerth von e, er heisse e', zu finden, welcher nämlich für $\delta=\frac{1}{3}\alpha$ entsteht, so wird es gut sein, den allgemeinen Ausdruck für m vorläufig als eine trigonometrische

Function darzustellen, also gleichfalls die Tangentenwerthe $\operatorname{tg} \alpha = a$ und $\operatorname{tg} \delta = b$ einzuführen. Hiernach erhält man auf Grundlage der Relation (227) zunächst allgemein für jeden Werth des Winkels δ:

$$m = 1 + \frac{\operatorname{tg} \delta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \delta)}{\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \delta} + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \alpha}\right)^2},$$

oder, indem man den Zähler und Nenner des in dieser Gleichung vorkommenden Bruches mit $\cos^2 \alpha \cos^2 \delta$ multiplicirt:

$$m = 1 + \frac{\cos \alpha \sin \delta (\sin \alpha \cos \delta - \cos \alpha \sin \delta)}{(\sin \alpha + \sin \delta)^2}$$

$$= 1 + \frac{\cos \alpha \sin \delta \sin (\alpha - \delta)}{4 \sin^2 \left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)},$$

daher insbesondere für $\delta = \frac{1}{3} \alpha$, wofür der betreffende Werth von m ein Maximum wird und mit m' bezeichnet werden soll:

$$m' = 1 + \frac{\cos \alpha \sin \frac{1}{3} \alpha \sin \frac{2}{3} \alpha}{4 \sin^2 \frac{2}{3} \alpha \cos^2 \frac{1}{3} \alpha}$$

$$= 1 + \frac{\cos \alpha \sin \frac{1}{3} \alpha}{4 \sin \frac{2}{3} \alpha \cos^2 \frac{1}{3} \alpha}$$

$$= 1 + \frac{1}{8} \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \frac{\alpha}{3}}.$$

Nun ist aber für jeden Winkel Θ:

$$\cos 3 \Theta = 4 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta,$$

also auch für $3 \Theta = \alpha$:

$$\cos \alpha = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3},$$

und hiernach:

$$m' = 1 + \frac{4 \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3}}{8 \cos^3 \frac{\alpha}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{8} \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{3}} = \frac{3}{8} \left(4 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{3}}\right)$$

$$= \frac{3}{8} \left[4 - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{3}\right)\right],$$

daher schliesslich:

$$m' = \tfrac{3}{8}\left(3 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{3}\right),$$

und der Maximal-Hebelsarm e' selbst:

$$e' = \max e = \tfrac{1}{3}\, m' H = \tfrac{1}{8}\left(3 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{3}\right) H \;\ldots\ldots (230).^{*)}$$

Berechnet man nunmehr die Grösse der Erdüberhöhung, für welche dieser Maximalwerth e' eintritt, so muss man auf die Gleichung (193) zurückgehen, aus welcher man allgemein erhält:

$$\frac{h}{H} = \frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\delta} = \frac{\cos\alpha \sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \;\ldots\ldots (231),$$

daher insbesondere für $\delta = \frac{1}{3}\alpha$, wenn man die entsprechende Ueberhöhung h' heisst:

$$\frac{h'}{H} = \frac{\cos\alpha \sin\frac{1}{3}\alpha}{\sin\frac{2}{3}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\cos\frac{1}{3}\alpha}$$

$$= \frac{4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}}{2\cos\frac{\alpha}{3}}$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{3} - \frac{3}{2} \;\ldots\ldots (232).$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch anders darstellen, wie folgt:

$$\frac{h'}{H} = \left(1 + \cos\tfrac{2}{3}\alpha\right) - \tfrac{3}{2} = \left(\cos\tfrac{2}{3}\alpha - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \cos\tfrac{2}{3}\alpha - \cos 60^0$$

$$= 2\sin\left(30^0 + \frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(30^0 - \frac{\alpha}{3}\right) \;\ldots\ldots (233).$$

Ex. Ist $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, somit $\alpha = 45^0$, so findet man:

$$\frac{\alpha}{3} = 15^0,\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{3} = (2 - \sqrt{3}),\ \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{3} = (7 - 4\sqrt{3}),$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{3} = \frac{1 + \cos\frac{2}{3}\alpha}{2} = \frac{1 + \cos 30^0}{2} = \tfrac{1}{4}(2 + \sqrt{3}),$$

daher nach der Gleichung (230):

---

*) Für eine tropfbare Flüssigkeit ist $\alpha = 90^0$ und das Plateau kommt dann jedenfalls für alle Winkel δ in das Niveau der Wandkrone zu liegen, wonach $e = \frac{1}{3}H$ werden muss. In der That ergibt sich aus der obigen Formel dieses Resultat, wenn man berücksichtiget, dass in diesem besonderen Falle $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{3} = \mathrm{tg}^2\, 30 = \frac{1}{3}$ ist.

$$e' = \max e = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) H = 0 \cdot 366\, H,$$

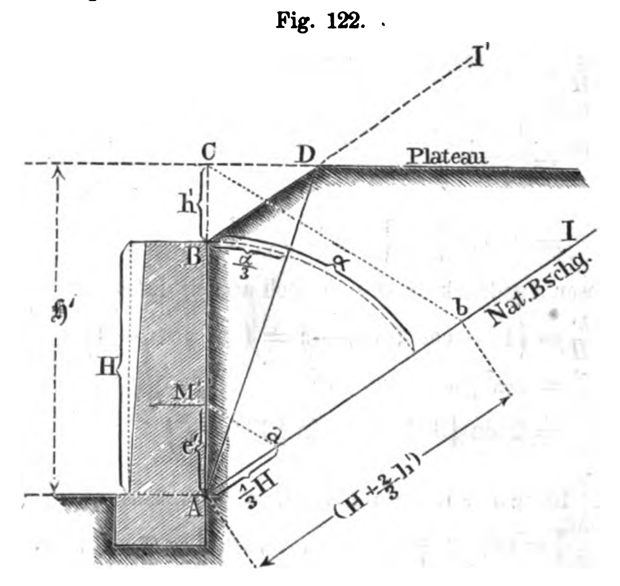
nach der Gleichung (232) aber:

$$h' = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) H = 0 \cdot 366\, H,$$

so dass in diesem beispielsweisen Falle $e' = h'$ wird.

Die oben gefundenen Werthe für h' und e' lassen sich leicht durch Zeichnung darstellen. Was nämlich die Ueberhöhung h' betrifft, so ergibt sich diese einfach durch die Construction des Winkels $\delta = \frac{1}{3}\,\alpha$, welcher die Lage des Erdplateaus bestimmt. Siehe die Figur 122.

Fig. 122.



In dieser erscheinen die Grössen $\overline{AB} = H$ und $\measuredangle\, CAI = \measuredangle\, CBI' = \alpha$ gegeben, und hiernach ist $\measuredangle\, CAD = \frac{1}{3}\,\alpha$ construirt, wodurch die Lage des Erdplateaus, die Ueberhöhung $\overline{BC} = h'$ und die ganze Höhe $\overline{AC} = \mathfrak{H}' = (H + h')$ unmittelbar gefunden sind. Jetzt liegt der Mittelpunkt des Erddruckes, durch welchen dieser letztere als Resultirende geht, in M' und zugleich am höchsten; derselbe rückt daher jedenfalls tiefer, wenn die Erdüberhöhung $\overline{BC}$ vergrössert oder verkleinert wird.

Bezüglich der Auffindung dieses Druckmittelpunktes M' in grafischer Weise beachte man, dass sich zwischen e' und h' eine Relation herstellen lässt, indem man die Gleichungen (230) und (232) mit einander in Verbindung bringt.

Es ist nämlich einerseits:

$$\frac{e'}{H} = \tfrac{1}{8}\left(3 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{3}\right) = \tfrac{1}{8}\left(4 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{3}}\right),$$

und andererseits:

$$\frac{h'}{H} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{3} - \frac{3}{2},$$

daher, wenn man aus diesen Gleichungen die Grösse $\cos^2 \frac{\alpha}{3}$ eliminirt:

$$\frac{e'}{H} = \frac{1 + \frac{h'}{H}}{3 + 2\frac{h'}{H}} = \frac{H + h'}{3H + 2h'} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{H + h'}{H + \frac{2}{3}h'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (234),$$

woraus die Proportion folgt:

$$e' : \tfrac{1}{3} H = (H + h') : (H + \tfrac{2}{3} h') \quad \ldots\ldots\ldots (235),$$

die zur grafischen Darstellung geeignet ist. In der vorigen Figur erscheint dieselbe bereits durchgeführt. Es wurde dort $\overline{Ab} = (\overline{AB} + \frac{2}{3}\,\overline{BC}) = (H + \frac{2}{3} h')$ und $\overline{Aa} = \frac{1}{3}\,\overline{AB} = \frac{1}{3} H$ gemacht, sodann aber $\overline{M'a} \parallel \overline{Cb}$ gezogen und hiedurch der Druckmittelpunkt M' gefunden, so dass $\overline{AM'} = e'$ in der That den Abstand der Resultirenden des Erddruckes von der Basis vorstellt. Denn man erhält jetzt wegen der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ACb und $AM'a$ offenbar die Proportion:

$$\overline{AM'} : \overline{Aa} = \overline{AC} : \overline{Ab},$$

$$\overline{AM'} : \tfrac{1}{3} H = (H + h') : (H + \tfrac{2}{3} h'),$$

also aus der Vergleichung derselben mit jener unter (235) unmittelbar:

$$\overline{AM'} = e'.$$

Aus dem in der Gleichung (230) für e' gegebenen Maximalwerth ist ersichtlich, dass, weil α jedenfalls grösser als Null ist,

stets $e' < {}^3/_8\,H$ werden muss, daher mit gleichzeitiger Rücksichtsnahme auf das Resultat (228) die allgemeine Relation besteht:

$$\tfrac{1}{3}\,H \overline{\gtrless}\, e < \tfrac{3}{8}\,H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (236),$$

d. h.: Die Grösse des Hebelsarmes e variirt zwar mit der Höhenlage des Erdplateaus, ist aber jedenfalls zwischen den Grenzwerthen $\tfrac{1}{3}\,H = 0{\cdot}333\,H$ und $\tfrac{3}{8}\,H = 0{\cdot}375\,H$ eingeschlossen, von welchen übrigens nur der erste erreicht werden kann, wenn nämlich die Erdüberhöhung entweder Null oder unendlich gross wird.

Da die gedachten Grenzwerthe nicht weit auseinander liegen, kann man sich vom praktischen Standpunkte aus erlauben, mit Ausnahme der Fälle, in welchen die Erdüberhöhung h im Vergleiche zur Wandhöhe H weder sehr klein noch sehr gross ist, den Hebelsarm für die Resultirende des Erddruckes, von der Wandbasis an gezählt, geradezu mit dem arithmetischen Mittel aus jenen Grenzwerthen zu bemessen, daher annäherungsweise anzunehmen:

$$e = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{8})\,H = \tfrac{17}{48}\,H = 0{\cdot}35\,H \ldots\ldots\ldots (237),$$

während in den erwähnten Ausnahmsfällen es genügen wird, ohne Weiters zu setzen:

$$e = \tfrac{1}{3}\,H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (238).$$

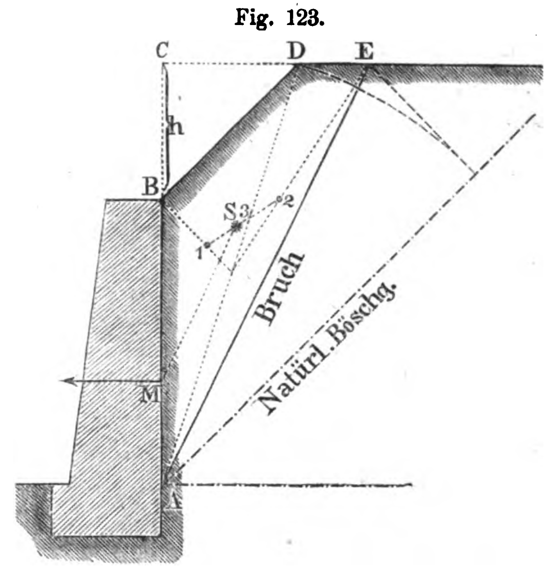
Noch ein anderes Annäherungsverfahren ist zulässig. Dieses besteht darin, dass man in dem trapezoidförmigen Profile des Bruchprismas $ABDE$ (Fig. 123) den Schwerpunkt S entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung aufsucht, und denselben parallel zur Bruchfläche $\overline{AE}$ auf die Stützwand $\overline{AB}$ projiicirt. Der hiedurch erhaltene Punkt M kann mit ausreichender Genauigkeit für praktische Zwecke als Mittelpunkt des Erddruckes angenommen werden*).

---

*) In der nebigen Figur 123 ist der fragliche Schwerpunkt S (in bekannter Weise) grafisch bestimmt, und hiernach M gefunden worden. Das Viereck $ABDE$ enthält nämlich die beiden Dreiecke ABD und ADE. In 1 liegt der Schwerpunkt des ersten, in 2 jener des zweiten Dreieckes, und 3 ist der Kreuzungspunkt der Verbindungslinie $\overline{1,\,2}$ und der Diagonale

Hiebei wird bemerkt, dass rücksichtlich der Ueberhöhung $\overline{BC} = h$ für den unteren Grenzwerth, $h = 0$, die Grösse der Linie $\overline{CD}$, für den oberen Grenzwerth, $h = \infty$, aber die Linie $\overline{DE}$ verschwindet, also das Trapezoid $ABDE$ beidemal in ein

Fig. 123.



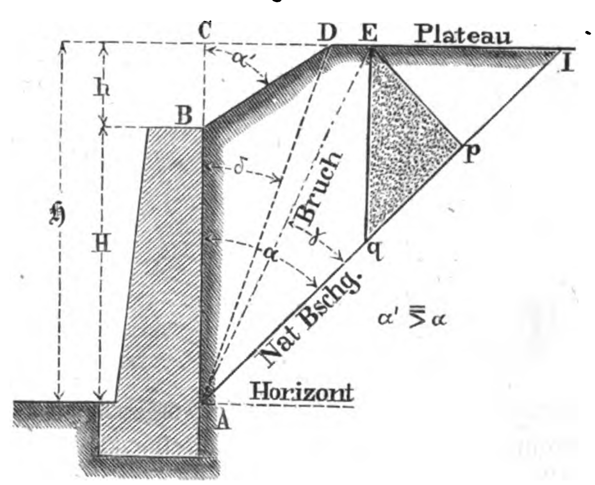
Dreieck übergeht, und sodann der aus der vorgeschlagenen Schwerpunkts-Projiicirung abgeleitete Druckmittelpunkt M genau, wie es sein soll, in den dritten Theil der Wandhöhe $\overline{AB}$ zu liegen kommt, so dass für die bezeichneten Grenzfälle das bezügliche Resultat nicht mehr approximativ, sondern vollkommen richtig ist.

$\overline{AD}$, welche Verbindungslinie hiedurch in die zwei Abschnitte $\overline{1, 3}$ und $\overline{2, 3}$ getheilt wird. Indem man diese Abschnitte mit einander vertauscht, somit $\overline{1, S} = \overline{2, 3}$ und $\overline{2, S} = \overline{1, 3}$ macht, ergibt sich der Schwerpunkt S des, aus den beiden Dreiecken bestehenden Viereckes, von dem aus die Linie $\overline{SM}$ parallel zu $\overline{AE}$ herab läuft. So z. B. findet man für $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$ $e = 0 \cdot 345\, H = 3 \cdot 45$ Fuss, welches Resultat von dem auf Seite 269 nach der genauen Formel gefundenen $(0 \cdot 358\, H)$ nicht wesentlich abweicht. Die allgemeine rechnungsmässige Vergleichung der Lage des so annäherungsweise erhaltenen, mit jener des genauen Druckmittelpunktes bleibt dem studirenden Leser als eine passende Uebungsaufgabe, wobei er seine Gewandtheit im algebraischen Calcül auf die Probe stellen kann, überlassen.

§. 61.

Erddruck an eine verticale Stützwand $\overline{AB}$, wenn die Oberfläche des Erdreiches zuerst nach einer beliebigen Böschung $\overline{BD}$ ansteigt, sodann aber wieder von einem horizontalen Plateau $\overline{DI}$ begrenzt ist. (Fig. 124.) Dieser Fall unterscheidet sich von dem in der Fig. 112 angedeuteten nur dadurch, dass dort das von der Wandkrone an-

Fig. 124.



steigende Erdreich die natürliche, jetzt aber eine sanftere, übrigens beliebige Böschung hat, wofür der Neigungswinkel gegen das Loth mit α' bezeichnet werden soll, so dass allgemein $\alpha' \gtreqless \alpha$ zu setzen ist. Die sonstigen Bezeichnungen sind, wie aus der Figur 124 zu ersehen, in analoger Weise, wie in Fig. 112, gewählt. Hiernach bestehen zunächst folgende Relationen:

$$\mathfrak{H} = H + h \ldots\ldots (239)$$

$$\overline{CD} = h \operatorname{tg} \alpha' = \mathfrak{H} \operatorname{tg} \delta$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{h}{(H+h)} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\left(1 + \frac{H}{h}\right)} \ldots\ldots (240)$$

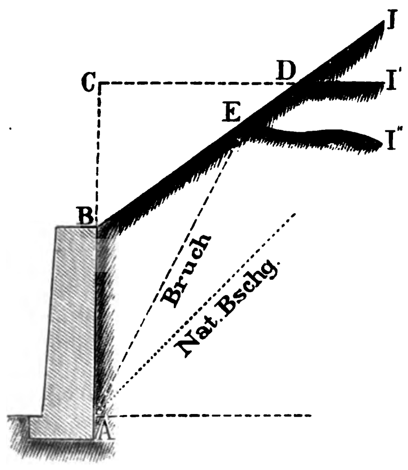
$$H = \mathfrak{H} - h = \mathfrak{H}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha'}\right) = \mathfrak{H}\, \frac{\sin(\alpha' - \delta)}{\sin \alpha' \cos \delta} \ldots (241),$$

$\overline{AE}$ sei die Bruchlinie, welche nach Massgabe der ersten Hauptregel (177) also derart bestimmt werden muss, dass area $ABDE = \triangle AEp$ und hiebei $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ ist; Epq dagegen stelle das Erdprisma vor, dessen Gewicht gleich dem Erddrucke an die Stützwand ist, wobei man zu Folge der zweiten Hauptregel (178) $\overline{pq} = \overline{Ep}$ zu construiren hat.

Hiebei wird angenommen, dass man es, wie in der Figur, mit einem solchen Falle zu thun hat, wo der Bruchpunkt E in das Plateau und nicht in die Böschung $\overline{BD}$ zu liegen kommt.

Der Gegenfall bedarf nämlich keiner eigenen Untersuchung mehr, weil dann diejenige Platz greift, welche bereits im dritten Capitel des laufenden Abschnittes vorausgeschickt ist. Es ist zwar dort von einem horizontalen Plateau, mit welchem das Erdreich obenauf abschliesst, keine Rede, sondern blos eine fortan aufsteigende Oberflächenböschung $\overline{BI}$ (Fig. 125) an-

Fig. 125.



genommen. Allein offenbar hat die Form der Erdreichoberfläche von dem Bruchpunkte E angefangen auf den Erddruck an die Stützwand insoferne keinen Einfluss, als es ganz gleichgiltig ist, ob das Erdreich auch über E hinaus nach der gleichen Richtung $\overline{EI}$ fortansteigt, oder aber hiebei von einem Plateau $\overline{DI'}$ begrenzt wird, oder überhaupt eine unterhalb $\overline{EI}$ liegende beliebige Oberflächengestalt $\overline{EI''}$ besitzt.

Um die Bruchlinie $\overline{AE}$ in dem in Fig. 124 vorausgesetzten Falle zu finden, kann man, abgesehen von der hiefür im §. 51 gegebenen allgemeineren Methode, eben so verfahren wie bei dem früher behandelten Falle in der Fig. 113, wenn man nur vorher eine solche Figurenverwandlung vorgenommen hat, dass das Bruchprofil an seiner oberen schiefen Seite gleichfalls, wie dort, nach der natürlichen Böschung begrenzt wird; d. h. man hat das Dreieck ABD in das gleich grosse Viereck $AB'D'D$ (siehe Fig. 126) so umzustalten, dass $\overline{B'D'} \parallel \overline{AI}$, also $\angle\, \overline{CB'D'} = \alpha$ wird.

Zu diesem Behufe bemerke man, dass nach den Regeln der Planimetrie die beiden Figuren ABD und $AB'D'D$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Dreiecke BCD und $B'CD'$ dem Flächenraume nach einander gleich werden, wenn einerseits $\overline{CD'}$ zwischen $\overline{Ca}$ und $\overline{CD}$, und andererseits $\overline{CB'}$ zwischen $\overline{CB}$ und $\overline{Cb}$ die mittlere geometrische Proportionale bildet, wobei $\overline{Ba}$ und $\overline{Db}$ mit der zu suchenden Begrenzungslinie $\overline{B'D'}$, also auch mit der natürlichen Böschung $\overline{AI}$ parallel sind. Man hat daher:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{Ca} : \overline{CD'} = \overline{CD'} : \overline{CD} \\ \overline{CB} : \overline{CB'} = \overline{CB'} : \overline{Cb}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (242).$$

Es ist selbstverständlich nur nöthig, die eine dieser Relationen, z. B. die erste, durch Zeichnung herzustellen, weil dann, falls der Punkt D' bestimmt ist, der andere Punkt B' sich sogleich ergibt, indem man die Abgrenzungslinie $\overline{B'D'}$ zur natürlichen Böschung parallel zieht.

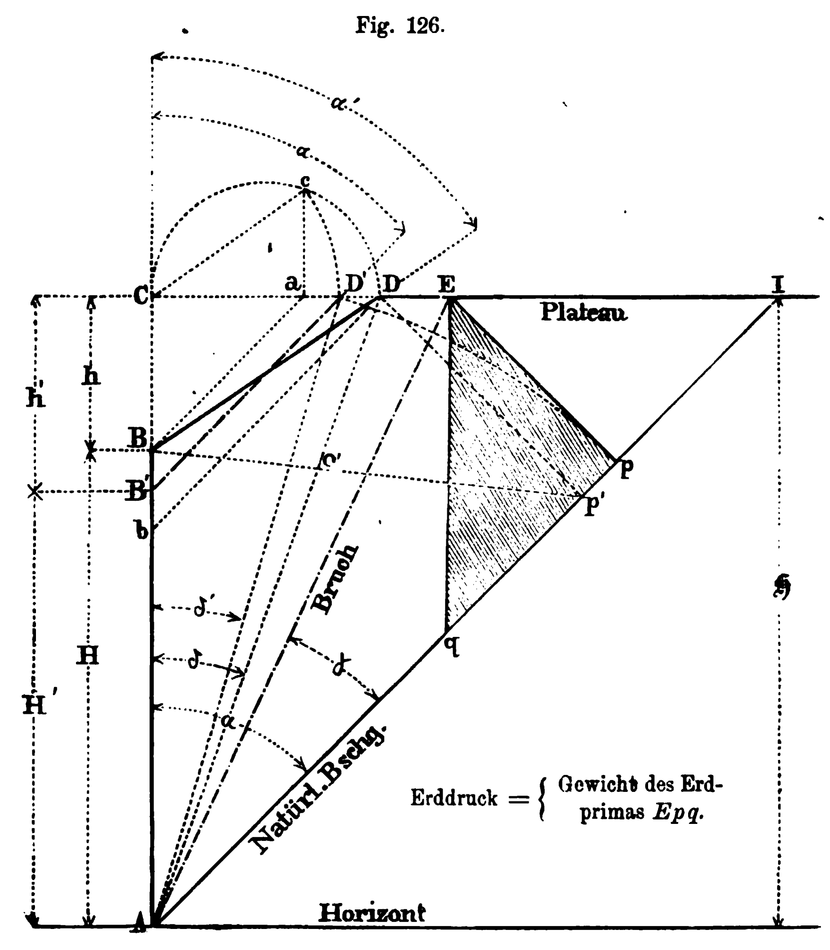
Ist dies geschehen, also die neue Abgrenzungslinie $\overline{B'D'}$ gefunden, so hat man:

$$\triangle . ABD = \text{area } AB'D'D$$
$$\text{area } ABDE = \text{area } AB'D'E;$$

daher ist es jetzt gerade so, wie wenn (anstatt des an die Wandhöhe $\overline{AB} = H$ drückenden Bruchprismas $ABDE$ mit der Ueberhöhung $\overline{BC} = h$) das an die neue Wandhöhe $\overline{AB'} = H'$ drückende neue Bruchprisma $AB'D'E$ mit der neuen Ueberhöhung

$\overline{B'C} = h'$. vorhanden wäre, wenigstens in soferne es sich um den alleinigen totalen Erddruck D handelt, weil hiefür nur nothwendig ist, die Bruchlinie $\overline{AE}$ so zu bestimmen, dass, indem man von E das Loth $\overline{Ep}$ auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$ fällt, das Dreieck AEp dem Flächenraume nach eben so gross wird, wie

Fig. 126.



das Profil des Bruchprismas, wozu es offenbar ganz gleichgiltig erscheint, ob dieses letzte Profil in seiner wahren oder in seiner umgewandelten Gestalt berücksichtigt wird.

Nur für die Art und Weise der Vertheilung des Erddruckes auf die Stützwand sind die beiden verglichenen Fälle nicht identisch, welcher Umstand indessen vorläufig, wo blos die Grösse des Erddruckes gesucht wird, nicht in Betracht kommt.

Beschreibt man daher nach der in Figur 113 angewendeten Regel mit dem Halbmesser $\overline{AD'}$ von A aus den Kreisbogen $\widehat{D'p}$ bis zur natürlichen Böschung und errichtet dort auf diese die Senkrechte $\overline{pE}$ bis zum Erdplateau, so erhält man den Bruchpunkt E und hiernach die Bruchlinie $\overline{AE}$.

In dem vorausgesetzten Falle muss diese Senkrechte noch das Erdplateau treffen.

Um nun den bei dieser Construction nöthigen Punkt D' zu finden, beschreibe man über $\overline{CD}$ als Diameter einen Halbkreis, errichte in a das Perpendikel $\overline{ac}$ und ziehe mit dem Radius $\overline{Cc}$ von C aus den Bogen $\widehat{cD'}$.

Denn hiernach erhält man;

$$\overline{CD'}^2 = \overline{Cc}^2 = \overline{Ca} \cdot \overline{CD}, \text{ oder:}$$
$$\overline{Ca} : \overline{CD'} = \overline{CD'} : \overline{CD},$$

also geradezu die in der Relation (242) verlangte Eigenschaft. Selbstverständlich könnte man die analoge Construction auch zwischen C und b zur Aufsuchung des Punktes B' anwenden.

Hiedurch ist, wie ersichtlich, die Aufgabe in Bezug auf die Ermittelung der Grösse des Erddruckes auf grafischem Wege eigentlich gelöset, denn es ist schliesslich nur noch $\overline{Ep} = \overline{pq}$ zu machen, um das (in der Figur schraffirte) Profil Epq zu zeichnen, welches einem Erdprisma zukommt, dessen Gewicht gleich dem Erddrucke ist.

Diese grafische Lösung ist eine besondere, im Entgegenhalte zu der allgemeinen, welche schon nach den Erörterungen im §. 51 sich ergibt.

Um auch den Weg der Rechnung zu betreten, wird es am einfachsten sein, hiebei den oben erläuterten Vorgang bei der besonderen Construction zu verfolgen und zugleich auf diejenigen Berechnungsformeln Rücksicht zu nehmen, welche in den voraus-

gegangenen §§. dieses Capitels festgestellt wurden, indem man nämlich beachtet, dass durch die in der Figur 126 angedeutete Construction der gegebene Fall auf einen solchen zurückgeführt wird, auf den jene Berechnungsformeln darum passen, weil dann die Erdreichoberfläche von der Wand angefangen zunächst nach der natürlichen Böschung ansteigt und obenauf durch ein horizontales Plateau begrenzt wird.

Für diesen umgewandelten Fall ist, wie aus der Figur 126 zu ersehen:

$\overline{AB'} = H'$ die Stützwandhöhe;

$\overline{B'C} = h'$ die Erdreichüberhöhung von der Stützwandkrone bis zum Erdplateau;

$\overline{AC} = \mathfrak{H} = (H' + h')$ die ganze Höhe des Erdreiches;

$\overline{B'D'}$ .... die vordere Begrenzung der Erdreichoberfläche nach der natürlichen Böschung;

$\measuredangle CB'D' = \measuredangle CAI = \alpha$ der Winkel dieser natürlichen Erdböschung;

$\overline{D'I}$.... das horizontale Erdplateau;

$\measuredangle CAD' = \delta'$ der den Anfang dieses Erdplateaus bestimmende Winkel;

$\measuredangle EAI = \gamma$ der zu suchende Bruchwinkel, welcher zugleich für den ursprünglich gegebenen Fall passt;

$g \cdot \triangle Epq = D$ endlich das dem zu suchenden Erddrucke D gleichkommende Gewicht des Erdprismas Epq, welcher Erddruck ebenfalls zugleich dem ursprünglich gegebenen Falle entspricht.

Zunächst ist es nöthig, die dem umgewandelten Falle entsprechenden neuen Grössen H', h' und δ' durch die dem gegebenen Falle zukommenden Daten auszudrücken.

In dieser Absicht führe man folgende Abkürzungswerthe ein:

$$\operatorname{tg} \alpha = a, \ \operatorname{tg} \alpha' = a', \ \operatorname{tg} \delta = b,$$

und beachte, dass nachstehende Relationen existiren:

$$\overline{Ca} = h \operatorname{tg} \alpha, \ \overline{CD} = h \operatorname{tg} \alpha', \text{ und}$$

wegen der Proportionen (242) auch:

$$\overline{CD'} = h\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'} = h\sqrt{aa'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (243).$$

Hiernach ist weiter:

$$h' = \frac{\overline{CD'}}{\operatorname{tg}\alpha} = h\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}} = h\sqrt{\frac{a'}{a}}$$

$$= \frac{\overline{CD}}{\operatorname{tg}\alpha'}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}}$$

$$= \mathfrak{H}\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}} = \mathfrak{H}\frac{b}{\sqrt{aa'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (244),$$

$$H' = (\mathfrak{H} - h') = \mathfrak{H}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'}}\right)$$

$$= \mathfrak{H}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{aa'}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (245),$$

und wegen Gleichung (241) auch:

$$H' = H\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}}\left[\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'} - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\delta}\right]$$

$$= H\sqrt{\frac{a'}{a}}\left[\frac{\sqrt{aa'} - b}{a' - b}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (246);$$

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{\overline{CD'}}{\mathfrak{H}} = \frac{h}{\mathfrak{H}}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'} = \operatorname{tg}\delta\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}}$$

$$= \frac{h}{\mathfrak{H}}\sqrt{aa'} \qquad = b\sqrt{\frac{a}{a'}} \ldots\ldots (247),$$

wenn man schliesslich noch die Gleichung (240) benützt.

Geht man jetzt auf die Gleichung für den Bruchwinkel γ über und bildet dieselbe analog mit der Relation (204), so findet man:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\delta' - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left[\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\delta'}} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left[\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha'(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\delta}} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{a'(1+a^2)}{a'+ab^2}} - 1\right] = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{1+a^2}{1+\frac{a}{a'}b^2}} - 1\right] (248).$$

Ferner hat man für den Erddruck nach der Analogie der Formeln (205) und (206):

$$D = \tfrac{1}{2}g\mathfrak{H}^2\left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta'}}{a}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2}g\mathfrak{H}^2\left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+\frac{a}{a'}b^2}}{a}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (249),$$

und:

$$D = \frac{1}{2} g H'^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta'}}{a - \mathrm{tg}\,\delta'}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} g H^2 \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+\frac{a}{a'}b^2}}{a'-b}\right]^2 \ldots\ldots (250),$$

indem man nämlich hiebei die Relationen für tg δ' und H' aus der vorigen Darstellung unter (246) und (247) benützt.

Der letzte Ausdruck hat die Gestalt der hydrostatischen Formel:

$$D = \frac{1}{2} w H^2 \ldots\ldots (251),$$

worin der Werth von w, nämlich:

$$w = g \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+\frac{a}{a'}b^2}}{a'-b}\right]^2 \ldots\ldots (252)$$

wieder das Gewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche auf die Stützwand $\overline{AB}$ den gleichen Druck wie das Erdreich ausüben würde.

Hiermit erscheint der gegebene Fall, in soferne es sich um die Grösse des Erddruckes handelt, auch rechnungsmässig aufgelöset.

Um übrigens schon anfänglich, ehe man die eigentlichen Berechnungen beginnt, zu constatiren, dass man es wirklich mit einem solchen Falle zu thun hat, in welchem die Bruchebene $\overline{AE}$ nicht in die Seitenböschung $\overline{BD}$, sondern in das Erdplateau $\overline{DI}$ trifft, kann man entweder grafisch*) oder ebenfalls durch Rechnung eine Voruntersuchung anstellen, ob die damit zusammenhängende Bedingung vorhanden sein wird, nämlich:

$$\measuredangle EAI \gtreqless \measuredangle DAI,$$

*) Die bezügliche grafische Prüfung ist einfach und besteht darin, dass man, wie in Fig. 110, untersucht, ob es eine kleinere Druckhöhe, als die ganze, gibt, für welche die Bruchlinie durch die Kante F' (Fig. 110), also in der Figur 126 durch die Kante D geht, was dann anzeigt, dass die Bruchlinie, welche der ganzen Höhe entspricht, in der That rechts von dieser Kante ausmündet. Noch einfacher aber kann man vorgehen, wenn

d. i.

$$\gamma < (\alpha - \delta),$$

also auch:

$$\operatorname{tg} \gamma \leqq \operatorname{tg} (\alpha - \delta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta},$$

somit mit Bezug auf die Formel (248):

$$\frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + \frac{a}{a'} b^2}} - 1\right] \leqq \frac{a - b}{1 + ab},$$

woraus die schliessliche Bedingungsgleichung sich ergibt:

$$a' \leqq \frac{b^2 (1 + a^2)}{2 b - a (1 - b^2)} \quad \text{.......................(253).}$$

Besteht in dieser Relation das Gleichheitszeichen, so wird

$$b = \frac{a' - \sqrt{(1 + a^2) a' (a' - a)}}{1 - a (a' - a)} \quad \text{.................(254),}$$

und der dazu gehörige Werth von $\mathfrak{H}$ (er sei $\mathfrak{H}_1$) ist laut der Relation (240):

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{h \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{h a'}{b} = \frac{a' [1 - a (a' - a)]}{a' - \sqrt{(1 + a^2) a' (a' - a)}} h \quad \text{.(255),}$$

d. h. bei dieser Höhe, vom Erdplateau nach abwärts gezählt, würde die Bruchlinie geradezu durch die Kante der Erdoberfläche, also durch D (Fig. 126) gehen, wodurch die Stellen D und E aufeinanderfielen. Hiedurch ist zugleich der auch in der untenstehenden Anmerkung erwähnte Uebergangsfall gekennzeichnet, bei welchem sowohl die Berechnungsformeln im gegenwärtigen §., als auch jene im dritten Capitel des laufenden Abschnittes Anwendung finden können.

---

man (Fig. 126) das Loth $\overline{Dp'}$ auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$ fällt, und nachsieht, ob das $\triangle ABD$ kleiner ist, als das $\triangle ADp'$, zu welchem Behufe man noch die Diagonale $\overline{Bp'}$ ziehen, und die Grösse der Abschnitte $\overline{Bo'}$ und $\overline{o'p'}$ mit einander vergleichen wird. Der oben vorausgesetzte Fall ist jedesmal vorhanden, wenn $\overline{o'p'} > \overline{Bo'}$ ist. Für den Gegenfall gelten die Bemerkungen auf Seite 281, worauf die Figur 125 Bezug nimmt. Für $\overline{o'p'} = \overline{Bo'}$ entsteht der Uebergangsfall, den man sowohl nach der einen, als auch nach der anderen Art behandeln kann.

Ex. Es seien in einem besonderen Falle folgende Daten bekannt: $H = 10$, $h = 3$, also $\mathfrak{H} = 13$ Fuss; ferner $a = \operatorname{tg} \alpha = 1$, somit $\alpha = 45^\circ$; $a' = \operatorname{tg} \alpha' = 1\frac{1}{2}$, daher $\alpha' = 56^\circ\, 19'$; endlich $g = 100$ Pfd.

Hiernach ist laut Formel (240):

$$\operatorname{tg} \delta = b = \frac{h}{\mathfrak{H}} \operatorname{tg} \alpha' = \frac{9}{26} = 0{\cdot}346 \text{ (d. i. } \delta = 19^\circ\, 5'),$$

und es ergibt sich zugleich, dass die in (253) aufgestellte Bedingung wirklich statt hat, folglich die Berechnungsformeln (248) bis (252) Platz greifen dürfen.

Diesen Formeln gemäss erhält man nun nachstehende Resultate:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{26}{\sqrt{365}} - 1 = 0{\cdot}361,$$
$$\gamma = 19^\circ\, 51' < (\alpha - \delta) = 25^\circ\, 55';$$
$$\frac{w}{g} = \frac{1041 - 52\sqrt{365}}{200} = 0{\cdot}238,$$
$$w = 23{\cdot}8 \text{ Pfund};$$
$$D = \tfrac{1}{2}\, w\, H^2 = 11{\cdot}9 \text{ Ctr.}$$

Will man aus der Formel für den Erddruck die Grösse $b = \operatorname{tg} \delta$ hinausbringen, um denselben blos als eine Function der Winkel α und α', dann der Höhen $\mathfrak{H}$, H, h darzustellen, so ist nur nöthig, in die Gleichungen (249) und (250) anstatt b den Werth aus (240), nämlich:

$$b = \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}}\, a'$$

einzuführen und nebstbei die Relationen $\operatorname{tg} \alpha = a$ und $\operatorname{tg} \alpha' = a'$ zu beachten.

Geschieht dies, so erhält man:

$$D = \tfrac{1}{2}\, g\, \mathfrak{H}^2 \left[\frac{\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + a a' \frac{h^2}{\mathfrak{H}^2}}}{a}\right]^2$$
$$= \frac{g}{2a^2}\left[\mathfrak{H}\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{\mathfrak{H}^2 + a a' h^2}\right]^2$$
$$= \frac{g}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}\left[\mathfrak{H}\,\frac{1}{\cos \alpha} - \sqrt{\mathfrak{H}^2 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'\, h^2}\right]^2$$
$$= \frac{g}{2 \sin^2 \alpha}\left[\mathfrak{H} - \cos \alpha \sqrt{\mathfrak{H}^2 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'\, h^2}\right]^2 \quad \ldots\ldots (256),$$

oder auch:

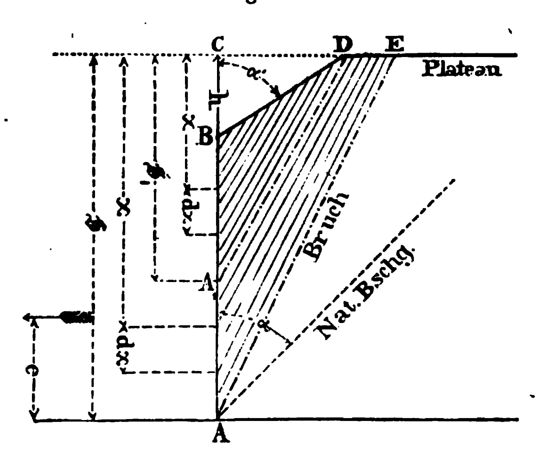
$$D = \frac{g}{2 \sin^2 \alpha}\left[H + h - \cos \alpha \sqrt{(H + h)^2 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'\, h^2}\right]^2 \ (257).$$

Für $\alpha' = \alpha$ stimmen diese Gleichungen mit jenen unter (215), wie dies auch sein muss, vollkommen überein.

§. 62.

Zunahme des Erddruckes von oben nach unten, und Lage des Mittelpunktes des ganzen Erddruckes in dem voruntersuchten Falle. Bis zu einer gewissen Höhe $x = \mathfrak{H}_1$ (Fig. 127) laufen die Bruchlinien für die verschiedenen

Fig. 127.



Druckhöhen miteinander parallel; für grössere Höhen aber convergiren dieselben nach aufwärts, so dass die Bruchfläche $\overline{AE}$, welche der grössten Höhe ($x = \mathfrak{H}$) entspricht, am steilsten wird. Die Statthaftigkeit dieser Eigenschaft erhellet unmittelbar aus den Bemerkungen zu den Figuren 109 und 110 im §. 55. Die fragliche Höhe $\mathfrak{H}_1$ oder der Uebergangspunkt A_1, wo der Wechsel des Gesetzes für die Bruchrichtung eintritt, ergibt sich durch Construction nach der zu Fig. 110 erläuterten Methode, durch Rechnung aber nach der Formel (255), denn es ist hiernach:

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{a' \left[1 - a\,(a' - a)\right]}{a' - \sqrt{(1 + a^2)\,a'\,(a' - a)}}\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (258),$$

wenn die früher eingeführten Abkürzungen:

$$a = \operatorname{tg} \alpha \text{ und } a' = \operatorname{tg} \alpha'$$

beibehalten werden.

Für Druckhöhen innerhalb des Wandtheiles $\overline{BA_1}$, also für solche Werthe von x, die zwischen $x = h$ und $x = \mathfrak{H}_1$ gelegen sind, erhält man die Grösse des Erddruckes nach der auf Seite 156 gegebenen Formel (159), wobei zu beachten kommt, dass der dort mit δ bezeichnete Winkel im vorliegenden Falle durch $(\alpha' - \alpha)$ auszudrücken ist.

Nennt man daher den Erddruck an die Wandfläche von der bezüglichen Höhe $(x - h)$, in so lange x nicht unter den Punkt A_1 hinabgreift: $y_1 = f_1(x)$, so erhält man der bezogenen Formel (159) gemäss:

$$y_1 = f_1(x) = k(x - h)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (259),$$

worin der von x unabhängige Coefficient

$$k = \frac{g}{2}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\right]\left[\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)} - \sqrt{\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)}\right]^2$$

zu setzen ist.

Es ist aber:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'} = \frac{a' - a}{1 + aa'},$$

daher auch:

$$k = \tfrac{1}{2} g a' \left[\frac{\sqrt{a'(1 + a^2)} - \sqrt{(a' - a)}}{1 + aa'}\right]^2 \ldots\ldots (260).$$

Die Formeln (259) und (260) gelten, wie bemerkt, so lange, als x den Höhenwerth von $\mathfrak{H}_1$ nicht überschreitet; im Gegenfalle muss man auf die Formel (256) Rücksicht nehmen. Setzt man nämlich dort x anstatt $\mathfrak{H}$ und $y_2 = f_2(x)$ anstatt D, wobei y_2 den Erddruck an die Wandfläche von der bezüglichen Höhe $(x - h)$ bedeutet, so findet man:

$$y_2 = f_2(x) = \frac{g}{2a^2}\left[x\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{x^2 + aa'h^2}\right]^2 \ldots (261),$$

und diese Relation ist nun giltig innerhalb der Grenzen $x = \mathfrak{H}_1$ und $x = \mathfrak{H}$.

Selbstverständlich müssen für $x = \mathfrak{H}_1$ die beiden Formeln (259) und (261) einerlei Resultat geben, so wie man andererseits

seits für $x = \mathfrak{H}$ den Erddruck D auf die ganze Wandhöhe $\overline{AB}$, übereinstimmend mit der Formel (256), erhält.

Aus den beiderseitigen Formeln für den Erddruck ist das Gesetz erkennbar, nach welchem derselbe mit der Druckhöhe zunimmt.

Der Mittelpunkt des Erddruckes, welcher im Abstande e von der Wandbasis liegt, ergibt sich nach der Regel, welche hiefür in §. 54 gegeben und insbesondere in der Gleichung (191) enthalten ist.

Betrachtet man nämlich die Höhenwerthe x als verticale Abscissen, die dazu gehörigen Druckwerthe y_1, beziehungsweise y_2 aber als horizontale Ordinaten, und denkt man sich die hiernach entstehende Druckveränderungs-Curve gezeichnet, so hat man im Sinne der erwähnten Regel und der weiteren Bemerkungen hierüber auf Seite 227—229:

$$D\,e = \int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}_1} y_1\,dx + \int_{x=\mathfrak{H}_1}^{x=\mathfrak{H}} y_2\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(262)},$$

worin statt y_1, y_2, D, $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}$ die bezüglichen Werthe einzusetzen sind, um schliesslich e zu berechnen*).

Das erste Integrale ist:

$$\int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}_1} y_1\,dx = k\int_h^{\mathfrak{H}_1} (x-h)^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,k\,(\mathfrak{H}_1 - h)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(263)},$$

und das zweite ergibt das Resultat:

$$\int_{x=\mathfrak{H}_1}^{x=\mathfrak{H}} y_2\,dx = \frac{g}{2\,a^2}\int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}} \left(x\sqrt{1+a^2} - \sqrt{x^2 + a\,a'\,h^2}\right)^2 dx \ldots\ldots \text{(264)}$$

---

*) Da hier die Höhe x von dem Erdplateau nach abwärts gerechnet wird, während auf Seite 227 — 229 die dort mit x bezeichnete Höhe erst von der Wandkrone an gezählt wurde, so erklärt es sich, dass im vorliegenden Falle das erste Integrale nicht von $x = 0$, sondern erst von $x = h$ an genommen werden darf.

$$= \frac{g}{2a^2}\int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}}\left[a a' h^2 + (2+a^2)x^2 - 2x\sqrt{1+a^2}\,.\,\sqrt{a a' h^2 + x^2}\right]dx$$

$$= \frac{g}{6a^2}\left\{\begin{array}{c} 3 a a' h^2(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_1) + (2+a^2)(\mathfrak{H}^3 - \mathfrak{H}_1^3) - \\ -2\sqrt{1+a^2}\left[(a a' h^2 + \mathfrak{H}^2)^{\frac{3}{2}} - (a a' h^2 + \mathfrak{H}_1^2)^{\frac{3}{2}}\right]\end{array}\right\},$$

wonach die Aufgabe rechnungsmässig gelöst ist.

Ex. Man nehme hiezu dasjenige Beispiel auf, welches auf Seite 289 behufs der Berechnung der Grösse des Erddruckes durchgeführt wurde.

Hiernach hat man zu setzen:

$H = 10$, $h = 3$, $\mathfrak{H} = 13$ Fuss; ferner $a = \operatorname{tg}\alpha = 1$, $a' = \operatorname{tg}\alpha' = 1\frac{1}{2}$, $g = 100$ Pfund und $D = 11\cdot 9$ Ctr.

Zunächst ergibt sich nach den Formeln (258) und (260):

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{9}{2(3-\sqrt{6})} = \tfrac{3}{2}(3+\sqrt{6}) = 8\cdot 174 \text{ Fuss},$$

$$k = \frac{3}{50}\left(\sqrt{6}-1\right)^2 g = \frac{3}{50}\left(7-2\sqrt{6}\right)g = 0\cdot 126\,g$$

$$= 6\,(7-2\sqrt{6}) \text{ Pfund} = 0\cdot 126 \text{ Ctr}^{*}).$$

Weiter ist nach den Formeln (263) und (264):

$$\int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}_1} y_1\,dx = \frac{27}{400}\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)^3 = \frac{27}{16}\left(1+\sqrt{6}\right)$$

$$= 5\cdot 82 \text{ Ctr. Fuss.}$$

$$\int_{x=\mathfrak{H}_1}^{x=\mathfrak{H}} y_2\,dx = \frac{1}{48}\left[57669 - 2920\sqrt{365} - 81\sqrt{6}\right]$$

$$= 35\cdot 08 \text{ Ctr. Fuss,}$$

---

*) Da $\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) = 0\cdot 2$ ist, so kann man zur Bestimmung von k auch die Tabelle X auf Seite 157 benützen, indem der dort mit δ bezeichnete Werth eben derjenige ist, welcher hier durch $(\alpha'-\alpha)$ ausgedrückt erscheint. Es ist also in der gedachten Tabelle nachzusehen, welche Zahl den Werthen $\operatorname{tg}\delta = 0\cdot 2$ und $\operatorname{tg}\alpha = 1$ entspricht. Man findet dort die Zahl $0\cdot 252$ eingeschrieben; d. h. es ist $\frac{w}{g} = 0\cdot 252$, somit der bezügliche Erddruck, hier mit y_1 bezeichnet, $y_1 = \frac{1}{2}w(x-h)^2$, woraus wegen $y_1 = k(x-h)^2$, unmittelbar folgt: $k = \frac{1}{2}wg = 0\cdot 126\,g$, wie dies in der That auch oben gefunden worden ist.

somit:

$$\int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}_1} y_1\,d\,x + \int_{x=\mathfrak{H}_1}^{x=\mathfrak{H}} y_2\,d\,x = 40\cdot 90 \text{ Ctr. Fuss},$$

nach der Gleichung (262) aber:

$$D\,e = 11\cdot 9\,e = 40\cdot 90 \text{ Ctr. Fuss},$$

und hieraus:

$$e = 3\cdot 45 \text{ Fuss} = 0\cdot 345\,H.$$

Wie aus diesem Beispiele ersichtlich, und es auch der Natur der Sache angemessen ist, liegt der Mittelpunkt des Erddruckes in solchen Fällen etwas höher, als im dritten Theile der Druckhöhe $\overline{AB} = H$, wenn gleich der Unterschied nicht bedeutend ist. Insoferne derlei Berechnungen als zu umständlich gehalten werden, kann man sich erlauben, die Bestimmung des Druckmittelpunktes annäherungsweise in derselben Weise vorzunehmen, wie solches in dem früher behandelten Falle am Schlusse des §. 60 angedeutet wurde. Zu diesem Behufe hat man in dem Profile des Bruchprismas den Schwerpunkt zu suchen, und die Projection desselben in der zur Bruchfläche parallelen Richtung an die Stützwand zu bestimmen. Dort, wo diese getroffen wird, kann der Druckmittelpunkt angenommen werden*).

In dem letzten Beispiele findet man durch diese Annäherungsmethode $e = 0\cdot 342\,H = 3\cdot 42$ Fuss, also in der That fast denselben Werth, welcher zuvor nach der genauen Methode berechnet wurde.

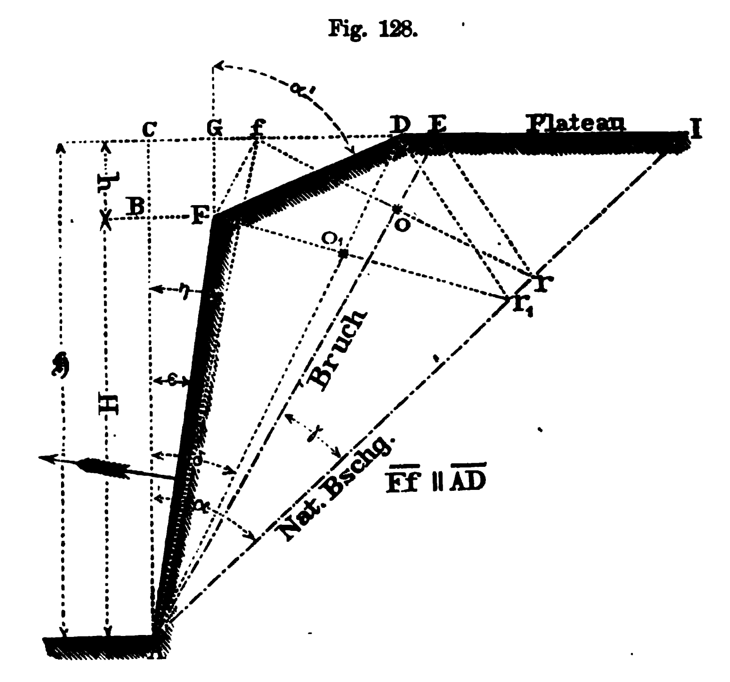
§. 63.

Erddruck an eine geneigte Stützwand $\overline{AF}$, wenn die Oberfläche des Erdreiches zuerst nach einer beliebigen Böschung $\overline{FD}$ ansteigt, obenauf aber wieder

*) Die allgemeine rechnungsmässige Vergleichung dieser Annäherungsmethode mit der genauen hier durchzuführen, würde viel zu weitläufig sein, kann übrigens dem im mathematischen Calcul Geübten keine erheblichen Schwierigkeiten bieten, wenn gleich hierauf eine nicht geringe Mühe verwendet werden muss.

von einem horizontalen Plateau $\overline{DI}$ begrenzt ist. (Fig. 128.) Dieser Fall unterscheidet sich von dem, in den vorhergehenden zwei §§. besprochenen dadurch, dass die Stützwand $\overline{AF}$ nicht wie dort lothrecht steht, sondern um den Winkel ε gegen das Loth geneigt ist.

Fig. 128.



Im Sonstigen werden die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, so dass man unter

$H = \overline{AB}$ die lothrechte Stützwandhöhe,

$h = \overline{BC} = \overline{FG}$ die Ueberhöhung des Erdplateaus von der Stützwandkrone aufwärts,

$\mathfrak{H} = \overline{AC}$ die ganze Höhe $(H + h)$,

$\delta = \sphericalangle\, CAD$ den Neigungswinkel der Verbindungslinie zwischen dem Wandfusse und dem Plateaubeginne, gegen das Loth,

$\alpha = \sphericalangle\, CAI$ den Winkel für die natürliche Böschung,

$\alpha' = \sphericalangle GFD$ den Winkel für die von der Wandkrone aufwärts steigende Erdböschung,

$\gamma = \sphericalangle EAI$ endlich den Bruchwinkel

zu verstehen hat.

Um diesen Fall zu untersuchen, handelt es sich zunächst um die wenigstens beiläufige Kenntniss über die Lage der Bruchböschung $\overline{AE}$.

Trifft diese noch in die aufsteigende Böschungsfläche $\overline{FD}$, so kommen unmittelbar die Resultate im vierten Capitel des laufenden Abschnittes zur Anwendung.

Trifft dagegen die Bruchböschung schon in das Erdplateau, so sind andere Resultate massgebend, welche eben jetzt den Gegenstand der Untersuchungen bilden werden.

Wie die Auflösung in grafischer Weise zu geschehen hat, wurde bereits im §. 51 auseinandergesetzt. Hiernach zieht man $\overline{Ff} \parallel \overline{AD}$, und zeichnet das Constructions-Viereck $AfEr$ derart, dass $\triangle AfE = \triangle AEr$ wird, wobei $\overline{Er} \parallel$ zur sogenannten Orientirungslinie (pag. 185), also $\sphericalangle ErI = (90^0 - \varepsilon)$ ist. Die Gleichheit jener beiden Dreiecke erkennt man sogleich aus der Eigenschaft $\overline{fo} = \overline{or} = \frac{1}{2} \overline{fr}$.

Hiebei nenne man den bei dieser Construction entstehenden neuen Winkel

$$CAf = \eta.$$

Dieses Constructionsverfahren gibt zugleich einen Anhaltspunkt hiefür, um auch ohne die wirkliche Ausführung desselben leicht zu erkennen, ob die Bruchlinie das Erdplateau treffen muss oder nicht.

Zu diesem Behufe ist nur nöthig, die Linie $\overline{AD}$ zu ziehen, $\overline{Dr_1} \parallel$ zur Orientirungslinie zu zeichnen, F mit r_1 zu verbinden, und nachzusehen, ob $\overline{o_1 r_1} >$ oder $<$ als $\overline{Fo_1}$ wird.

Wie nach einiger Ueberlegung einleuchtet, trifft die Bruchlinie im ersten Falle das Erdplateau $\overline{DI}$, im zweiten aber die vorliegende Erdböschung $\overline{FD}$.

Nunmehr auf die eigentliche Berechnung des erstgedachten Falles, welcher hier allein mehr in Betracht kommt, über-

gehend, wird es zweckdienlich sein, hiebei das angedeutete Constructionsverfahren zu verfolgen.

Zunächst beachte man, dass zwischen den Höhen $\mathfrak{H}$, H und h einerseits und den Winkeln α', ε und δ andererseits folgende Relationen existiren:

$$\mathfrak{H} = (H + h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (265)$$

$$H = \mathfrak{H}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon}\right) = \mathfrak{H}\left(\frac{a' - b}{a' - c}\right) \ldots\ldots (266)$$

$$h = \mathfrak{H}\left(\frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon}\right) = \mathfrak{H}\left(\frac{b - c}{a' - c}\right) \ldots\ldots (267)$$

$$h = H\left(\frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\delta}\right) = H\left(\frac{b - c}{a' - b}\right) \ldots\ldots (268)$$

$$b = \operatorname{tg}\delta = \frac{H \operatorname{tg}\varepsilon + h \operatorname{tg}\alpha'}{\mathfrak{H}} = \frac{(\mathfrak{H} - h)\operatorname{tg}\varepsilon + h \operatorname{tg}\alpha'}{\mathfrak{H}}$$

$$= \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{h}{\mathfrak{H}}(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon) = c + \frac{h}{\mathfrak{H}}(a' - c) \; (269)$$

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{h}{\mathfrak{H}}(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon) = c + \frac{h}{\mathfrak{H}}(b - c)$$

$$= \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{h^2}{\mathfrak{H}^2}(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon) = c + \frac{h^2}{\mathfrak{H}^2}(a' - c)$$

$$= \operatorname{tg}\varepsilon + \frac{(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon)^2}{(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon)} = c + \frac{(b - c)^2}{(a' - c)}$$

$$= \frac{c(a' - b) + b(b - c)}{(a' - c)} = m \ldots\ldots\ldots\ldots (270),$$

wenn man unter Einem die Abkürzungswerthe einführt:

$$\begin{array}{ll|l|l} \operatorname{tg}\alpha = a & \operatorname{tg}\delta = b & & \\ \operatorname{tg}\alpha' = a' & \operatorname{tg}\varepsilon = c & \operatorname{tg}\eta = m \ldots\ldots\ldots\ldots (271). \end{array}$$

Um den Bruchwinkel γ zu bestimmen, wird man der Construction gemäss und mit Rücksicht auf die Hauptregel (177) erwägen, dass

$$\text{area } AFDE = \triangle AfE = \triangle AEr$$

sein muss.

Es ist aber einerseits:

$$\triangle AfE = \tfrac{1}{2}\,\overline{AC}\,(\overline{CE} - \overline{Cf}) = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2\,[\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) - \operatorname{tg}\eta],$$

und andererseits wegen Gleichung (180) auf Seite 185:

$$\triangle AEr = \frac{1}{2} A^2 \frac{\sin\gamma \cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos\varepsilon\cos^2(\alpha-\gamma)},$$

indem man berücksichtiget, dass $A = \overline{AE} = \frac{\mathfrak{H}}{\cos(\alpha-\gamma)}$ zu setzen ist.

Somit ergibt sich aus der Gleichheit der beiden berechneten Dreiecke die Bedingung:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\gamma) - \operatorname{tg}\eta = \frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos^2(\alpha-\gamma)\cos\varepsilon},$$

woraus der Bruchwinkel γ abzuleiten ist.

Einfacher wird sich die Rechnung gestalten, wenn man unmittelbar nicht γ, sondern $(\alpha-\gamma)$, und zwar den Tangentenwerth hiefür aufsucht, somit die letzte Gleichung entsprechend umstaltet.

Zu diesem Behufe beachte man nachstehende Relationen:

$$\sin\gamma = \sin[\alpha - (\alpha-\gamma)]$$
$$= \cos\alpha\cos(\alpha-\gamma)[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)],$$
$$\cos(\gamma+\varepsilon) = \cos[(\alpha+\varepsilon)-(\alpha-\gamma)]$$
$$= \cos(\alpha+\varepsilon)\cos(\alpha-\gamma)[1+\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon)\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)],$$

$$\frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos^2(\alpha-\gamma)\cos\varepsilon} = \frac{\cos\alpha\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}\Big[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\Big]\times$$
$$\times\Big[1+\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon)\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\Big],$$

oder wegen:

$$\frac{\cos\alpha\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon} = \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon) = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

auch:

$$\frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\varepsilon)}{\cos^2(\alpha-\gamma)\cos\varepsilon} = \left[\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]\Big[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\Big]\times$$
$$\times\Big[1+\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon)\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)\Big].$$

Führt man jetzt die obigen Abkürzungswerthe ein und setzt zudem:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\varepsilon}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{a+c}{1-ac} = d \\ \operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (272),$$

so entsteht die Bedingungsgleichung:

$$(x - m) = \left(\frac{1 - ac}{1 + a^2}\right)(a - x)(1 + xd)$$

Nun ist aber:

$$\varepsilon = (\alpha + \varepsilon) - \alpha,$$

$$c = \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon)} = \frac{d - a}{1 + ad},$$

$$(1 - ac) = 1 - a\left(\frac{d - a}{1 + ad}\right) = \frac{1 + a^2}{1 + ad},$$

daher:

$$\left(\frac{1 - ac}{1 + a^2}\right) = \frac{1}{1 + ad},$$

mit Benützung welchen Werthes die obige Bedingungsgleichung die Form annimmt:

$$(x - m) = \frac{(a - x)(1 + xd)}{(1 + ad)},$$

somit im geordneten Zustande heisst:

$$x^2 + \frac{2}{d} x = \frac{a + m(1 + ad)}{d},$$

und endlich, nach x aufgelöset, für diese Unbekannte folgenden Werth ergibt:

$$x = \frac{1}{d}\left[-1 + \sqrt{(1 + ad)(1 + md)}\right] \quad \ldots (273)$$

worin nach den vorne eingeführten Bezeichnungen

$$a = \operatorname{tg} \alpha,\ d = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon),\ m = \operatorname{tg} \eta$$

und $x = \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)$

bedeuten.

Sucht man aus $\operatorname{tg}(\alpha - \gamma)$ den Werth von $\operatorname{tg} \gamma$ selbst, so findet man:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}\left[\alpha - (\alpha - \gamma)\right] = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)}$$

$$= \frac{a - x}{1 + ax} = \frac{1 + ad - \sqrt{(1 + ad)(1 + md)}}{d - a + a\sqrt{(1 + ad)(1 + md)}},$$

und, da nach dem Früheren

$$d - a = c(1 + ad)$$

gesetzt werden kann, weiter:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 + ad} - \sqrt{1 + md}}{c\sqrt{1 + ad} + a\sqrt{1 + md}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (274).$$

Zur Controle kann man untersuchen, ob in dem für tg γ hier gefundenen allgemeineren Resultate in der That diejenigen enthalten sind, welche in den vorausgegangenen specielleren Fällen aufgestellt erscheinen.

Zu diesem Zwecke blicke man zunächst auf die Figur 124 zurück, wo die Stützwand eine verticale Lage hat, somit $c = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$ ist.

Hiernach erhält man:

Aus (270) .... $m = \operatorname{tg} \eta = \frac{b^2}{a'}$,

„ (272) .... $d = \operatorname{tg} \alpha = a$,

„ (274) .... $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{a}\left[\sqrt{\frac{1 + a^2}{1 + \frac{a}{a'} b^2}} - 1\right]$,

also, wie es sein soll, das Resultat (248).

Steigt nebstbei die vordere Erdböschung, wie in der Figur 112, nach der natürlichen Böschung an, so ist noch $\alpha' = \alpha$, also auch $a' = a$ zu setzen, und es ergibt sodann das auf die gedachte Figur bezügliche Resultat (204).

Bleibt die Stützwand schief gestellt, nimmt man aber dabei die Erdüberhöhung $h = 0$ an, so kommt der in Figur 34 ersichtliche Fall zum Vorschein, und es ist hiefür:

Nach (270)............ $m = \operatorname{tg} \eta = c = \operatorname{tg} \varepsilon$

„ (271)............ $a = \operatorname{tg} \alpha$

„ (272)............ $d = \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon)$;

somit nach (274):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon)} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon)}}{\operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon)} + \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon)}}$$

$$= \frac{\cos \varepsilon - \cos \alpha}{\sin \varepsilon + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right),$$

d. h.:

$$\gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right),$$

wiederum in Uebereinstimmung mit der betreffenden Formel (87).

Auch der specielle Fall in Figur (54) kann betrachtet werden. Dort ist $h = \infty$ und $\alpha' = \alpha$, somit hat man nach Formel (270) wegen $\mathfrak{H} = h = \infty$ unmittelbar $m = \operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \alpha$ zu setzen, wodurch $\operatorname{tg} \gamma = 0$, also eben so wie auf Seite 170 bei der speciellen Untersuchung des bezüglichen Falles, erhalten wird.

Die beiden in den Figuren 63 und 75 dargestellten Fälle gehören nicht in diejenige Kategorie, auf welche die Untersuchungen im laufenden §. passen; denn, obgleich diese Fälle durch die Annahme $h = \infty$ entste-

hend gedacht werden können, so ist dabei doch nicht zu übersehen, dass die Bruchböschung jetzt nicht mehr, wie für die Giltigkeit des Resultates (274) vorausgesetzt, bis zum Erdplateau reicht, sondern stets in die von der Wandkrone aufsteigende Erdböschung trifft, somit der bezügliche Bruchwinkel niemals nach jener Formel berechnet werden darf.

Der normale Erddruck D auf die Stützwand $\overline{AF}$ ist nach der, die zweite Hauptregel (178) enthaltenden Formel (176):

$$D = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \varepsilon},$$

also wegen:

$$A = \overline{AE} = \frac{\mathfrak{H}}{\cos(\alpha - \gamma)}$$

auch:

$$D = \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{H}^2}{\cos \varepsilon} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 (\alpha - \gamma)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (275).$$

Es ist aber:

$$\frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 (\alpha - \gamma)} = \left\{ \frac{\sin [\alpha - (\alpha - \gamma)]}{\cos (\alpha - \gamma)} \right\}^2$$

$$= \cos^2 \alpha \, [\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - \gamma)]^2$$

$$= \frac{(a - x)^2}{(1 + a^2)},$$

und nach Einsetzung des Werthes von x aus (273):

$$\frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 (\alpha - \gamma)} = \left(\frac{1 + a d}{1 + a^2}\right) \left[\frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2,$$

$$= \frac{1}{(1 - a c)} \left[\frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2,$$

wenn man die oben angedeutete Beziehung zwischen a, c und d berücksichtiget.

Hiernach ergibt sich:

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{\mathfrak{H}^2}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{(1 - a c)} \left[\frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{2} g \, \mathfrak{H}^2 \frac{\sqrt{1 + c^2}}{(1 - a c)} \cdot \left[\frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2 \ldots (276),$$

wonach der Erddruck D bestimmbar ist.

Um die eigentliche Wandhöhe H einzuführen, setze man nach Gleichung (266) anstatt $\mathfrak{H}$ den Werth:

$$\mathfrak{H} = H \left(\frac{a' - c}{a' - b}\right);$$

in Folge dessen die letzte Formel in folgende übergeht:

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{(1 - a c)} \cdot \left[\frac{a' - c}{a' - b} \cdot \frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (277),$$

worin:

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{(1 - ac)} \left[\frac{a' - c}{a' - b} \cdot \frac{\sqrt{1 + a d} - \sqrt{1 + m d}}{d}\right]^2 \ldots\ldots \quad (278),$$

das Einheitsgewicht derjenigen sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche auf die Wand $\overline{AB}$ denselben Druck ausüben würde.

Auch jetzt kann man so, wie es bezüglich der Formel (274) geschehen ist, constatiren, dass in der allgemeineren Relation (278) thatsächlich diejenigen Resultate enthalten sind, welche in den vorausgegangenen §§. unter den dort besprochenen besonderen Umständen sich ergeben haben.

Ex. Es seien, ebenso wie in dem Beispiele auf Seite 289, nur jetzt bei schief gestellter Stützwand, folgende Daten bekannt:

$H = 10$, $h = 3$, somit $\mathfrak{H} = 13$ Fuss, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ($\alpha = 45°$), $\operatorname{tg} \alpha' = 1\frac{1}{2}$ ($\alpha' = 56° 19'$), $g = 100$ Pfd.; ferner $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$ ($\varepsilon = 9° 28'$).

Hiernach und zu Folge der Formeln (269) bis (272) hat man:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = 1 \qquad c = \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$$

$$a' = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{3}{2} \qquad d = \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) = \frac{7}{5}$$

$$b = \operatorname{tg} \delta = \frac{37}{78} \qquad m = \operatorname{tg} \eta = \frac{241}{1014};$$

somit findet man nach der Gleichung (273) oder (274) in Bezug auf den Bruchwinkel
entweder:

$$x = \operatorname{tg} (\alpha - \gamma) = \frac{-65 + \sqrt{13514}}{91} = 0 \cdot 5632,$$

oder:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{156 - \sqrt{13514}}{26 + \sqrt{13514}} = 0 \cdot 2794,$$

woraus jederseits folgt:

$$\gamma = 15° 36^1/_2{}',$$

welcher Winkel, wie dies in solchen Fällen eintreten muss, kleiner als $\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) = 17^{\circ}46'$ ist.

Für die Grösse des Erddruckes ergibt sich zunächst nach Formel (278):

$$\frac{w}{g} = \frac{18925 - 156\sqrt{13514}}{4900} = 0 \cdot 161,$$

oder:

$$w = 16 \cdot 1 \text{ Pfd.} = 0 \cdot 161 \text{ Ctr.},$$

somit schliesslich:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \,\frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 8 \cdot 2 \text{ Ctr.},$$

indem man hiebei, wegen $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$, nach Tabelle III auf Seite 19 den Werth von $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 \cdot 0138$ einsetzt.

§. 64.

Zunahme des Erddruckes von oben nach unten, und Lage des Mittelpunktes des ganzen Erddruckes in dem voruntersuchten Falle. Der Vorgang hiebei ist analog mit demjenigen, welcher im §. 62, bezüglich des dort untersuchten Falles mit lothrechter Stützwand, beobachtet worden ist. Auch das am Schlusse des §. 62 besprochene Annäherungsverfahren zur leichteren Auffindung des Druckmittelpunktes lässt sich diessfalls, und zwar um so mehr mit Vortheil anwenden, als die genauen Resultate in dieser Hinsicht noch weitläufiger und zur Benützung unbequemer werden, als früher.

Jedenfalls ist der Abstand e des Druckmittelpunktes von dem durch die Wandbasis gelegten Horizont in der Regel etwas (bis höchstens um 9%) grösser als ein Drittel von der Stützwandhöhe H. Nur in den zwei Grenzfällen, wo die Erdüberhöhung h einerseits unendlich klein und andererseits unendlich gross gedacht wird, ist geradezu $e = \frac{1}{3} H$.

Dritter Abschnitt.

Activer Erddruck an eine Stützwand mit Rücksicht auf die Reibung zwischen derselben und der Erde.

§. 65.

Einfluss der Berücksichtigung dieser Reibung. Wie schon im §. 26 erwähnt, erhält man in diesem Falle rechnungsmässig ein kleineres Resultat für den normalen Erddruck, als wenn die Wirkung der gedachten Reibung unberücksichtiget bleibt.

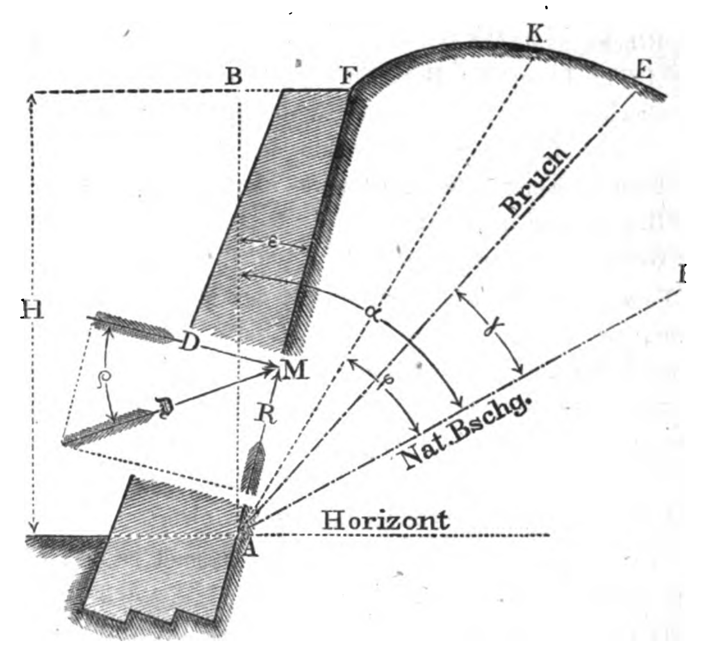
Obwohl das letztere Verfahren, wenn auch weniger genau, dennoch für die praktische Anwendung aus den in dem bezogenen §. angedeuteten Gründen in der Regel zulässig ist, so kann es gleichwohl wünschenswerth, ja nothwendig erscheinen, die Wirkung des Erddruckes mit grösserer Genauigkeit zu bestimmen, insbesondere in Fällen, wo es sich um die Prüfung der Theorie durch praktische Versuche handelt, weil man sonst nicht berechtiget ist, aus der Vergleichung der wissenschaftlichen Resultate mit denjenigen, welche aus Versuchen sich ergeben, massgebende Folgerungen zu ziehen.

Dieserwegen, und weil der Einfluss der Reibung an der Stützwand auf die Wirkung des Erddruckes eigentlich erst dann gehörig beurtheilt werden kann, wenn man die Grösse dieses Einflusses rechnungsmässig oder grafisch dargestellt hat, haben die Untersuchungen, welche dem gegenwärtigen Abschnitt einverleibt sind, nicht nur einen theoretischen, sondern auch einen praktischen Werth.

Da übrigens die Grundformeln für die bezüglichen Untersuchungen bereits im ersten Abschnitte, insbesondere auf Seite 37 unter den Nummern (24), (25) und (26) aufgestellt erscheinen, so können dieselben zu dem angedeuteten Zwecke sogleich benützt werden.

Ist nämlich (Fig. 129) der normal auf die Stützwand $\overline{AF}$ wirkende Erddruck .... $= D$,

Fig. 129.



der Reibungswiderstand an derselben .... $= R$,
und der mit Rücksicht auf diesen letzteren entstehende schiefe Erddruck, beziehungsweise Widerstand der Stützwand .... $= \mathfrak{D}$;
so hat man:

$$D = \ldots\ldots\ldots \frac{\cos \varrho}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha],$$

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin \varrho}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha],$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho} \ldots = \frac{1}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} [G \sin \gamma - c A \sin \alpha].$$

Die übrigen Buchstaben haben folgende Bedeutung:

$\alpha = \measuredangle BAI =$ Neigungswinkel für die natürliche Erdböschung
$\varepsilon = \measuredangle BAF =$ Neigungswinkel der Stützwand von der Höhe H;

ϱ = Reibungswinkel in Bezug auf die jetzt in Betracht kommende Reibung des Erdreiches an der Stützwand, daher $\operatorname{tg}\varrho = \mu$ = dem bezüglichen Reibungscoefficienten (Gleichung 3);

γ = Bruchwinkel EAI;

$\varDelta = \overline{AE}$ = Länge der Bruchlinie im Bruchprofile AFE;

g = Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches;

$G = g$. area AFE = dem Gewichte des Bruchprismas für die Einheit seiner Länge, letztere normal stehend auf dem Bruchprofile gedacht;

c = Grösse der Erdcohäsion per $\square$ Einheit der Bruchfläche.

Ferner bezeichnet in der Figur M den Mittelpunkt des Erddruckes, wo nämlich letzterer, als Resultirende gedacht, die Stützwand trifft.

Hiebei ist das in Bezug auf den Reibungswinkel ϱ im §. 12 Gesagte nicht ausser Acht zu lassen, dass nämlich unter Umständen nicht der ganze Werth von ϱ, sondern ein verhältnissmässig kleinerer (ϱ') einzuführen sein wird.

Was den Bruchwinkel γ betrifft, so handelt es sich behufs seiner Bestimmung (zu Folge der Regeln auf Seite 39 und 40) um das für $\varphi = \gamma$ entstehende Maximum des Werthes (28):

$$\varDelta = \frac{\cos\varrho}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)}\left[X \sin\varphi - cS\sin\alpha\right],$$

oder eigentlich, da ϱ nicht variabel ist, um jenes von:

$$\frac{\varDelta}{\cos\varrho} = \frac{1}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)}\left[X \sin\varphi - cS\sin\alpha\right],$$

und es ist sodann insbesondere:

$$\max \varDelta = D$$

$$\max\left(\frac{\varDelta}{\cos\varrho}\right) = D.$$

Die sonstigen Buchstaben bedeuten, und zwar:

$\varphi = \measuredangle KAI$ die Neigung irgend einer durch den Wandfuss gedachten Böschung;

$S = \overline{AK}$ die Länge der Böschungslinie $\overline{AK}$;

$X = g$. area AFK das Gewicht des Erdprofiles AFK.

Ist die Erdcohäsion gleich Null, oder vernachlässiget man überhaupt ihren Einfluss, so erhält man wegen $c = 0$:

$$D = \ldots\ldots\ldots \frac{\cos\varrho \sin\gamma}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} G \ldots\ldots\ldots\ldots (279),$$

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin\varrho \sin\gamma}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} G \ldots\ldots\ldots\ldots (280),$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos\varrho} = \frac{\sin\gamma}{\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)} G \ldots\ldots\ldots\ldots (281),$$

$$\Delta = \ldots\ldots\ldots \frac{\cos\varrho \sin\varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon - \varrho)} X \ldots\ldots\ldots\ldots (282),$$

$$\max \Delta = D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (283),$$

$$\max\left(\frac{\Delta}{\cos\varrho}\right) = \max \Delta' = \mathfrak{D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (284),$$

wenn man der Kürze wegen $\frac{\Delta}{\cos\varrho} = \Delta'$ setzt.

Indem dieser Fall vorzugsweise in's Auge zu fassen ist, wird sogleich auf die allgemeine Behandlung desselben eingegangen.

Erstes Capitel.

Allgemeine Regeln zur Bestimmung der gefährlichen oder Bruchböschung und des Druckes eines gestützten cohäsionslosen Erdreiches bei beliebiger Gestalt der Oberfläche desselben mit Rücksichtsnahme auf die Reibung an der Stützwand. Grafische Auflösung.

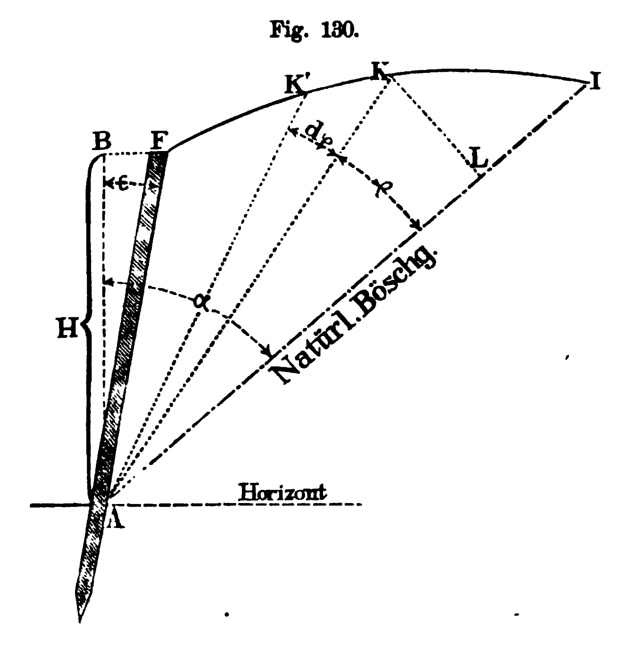
§. 66.

Eigenthümliche Untersuchungsmethode. Zur Auflösung der gestellten Aufgabe kann man, eben so wie im zweiten Abschnitte, auf zweierlei Art verfahren. Entweder betrachtet man aufeinanderfolgend die vorkommenden Specialfälle in Bezug auf Stützwandrichtung und Oberflächengestalt des Hinterfüllungsmateriales, und sucht sodann jedesmal das fragliche Maximum von Δ, beziehungsweise Δ', auf, oder man geht in umgekehrter Weise, nämlich so vor, wie es im §. 47 und den daran geknüpften Untersuchungen geschehen ist.

Indem die Wirkung der Erdcohäsion hiebei ausser Betracht bleibt, wird das zweite Verfahren, das in diesem Falle das allgemeinere und zugleich übersichtlichere ist, vorgezogen.

Hiernach hat man den in der Figur 130 angedeuteten allgemeinen Fall, wo die Stützwand irgendwie geneigt und das Erd-

Fig. 130.



reich oben auf beliebig begrenzt ist, den Betrachtungen zu Grunde zu legen, und zunächst allgemein zu untersuchen, unter welchen Verhältnissen das Maximum des Werthes von $\varDelta$, beziehungsweise $\varDelta'$, eintritt.

Nach den Gleichungen (282) und (284) ist:

$$\varDelta' = \frac{\varDelta}{\cos \varrho} = \frac{X \sin \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon - \varrho)} \dots\dots\dots\dots\dots (285)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit jenem auf Seite 180, welcher

$$\varDelta = \frac{X \sin \varphi}{\cos (\varphi + \varepsilon)}$$

heisst, und dort ebenfalls in Bezug auf φ zu einem Maximum

zu machen war, so sieht man, dass hieraus der jetzige Ausdruck entsteht, wenn man dort $(\varepsilon - \varrho)$ anstatt ε einsetzt.

Die zwei Bedingungsgleichungen (175) und (176), welche auf Seite 183 aufgestellt erscheinen, können daher insoferne auch gegenwärtig beibehalten werden, als man hierin $(\varepsilon - \varrho)$ anstatt ε substituirt, und zugleich beachtet, dass es sich jetzt um das Maximum von Δ' handelt, welches dem schiefen Erddrucke $\mathfrak{P}$ gleichzusetzen ist.

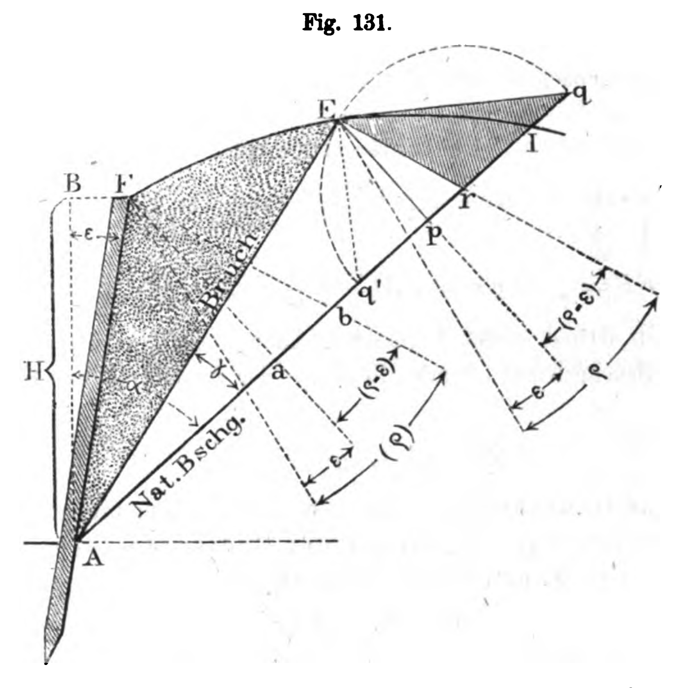
Hiernach ergibt sich:

$$G = \frac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin\gamma \cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (286)$$

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin^2\gamma}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (287),$$

wobei man im Nenner auch $\cos(\varrho - \varepsilon)$ anstatt $\cos(\varepsilon - \varrho)$ setzen kann.

Fig. 131.



Diese beiden Gleichungen enthalten, analog wie jene unter (175) und (176), zwei eben so einfache, wie

merkwürdige Hauptregeln, welche man sofort erkennt, wenn man die geometrische Bedeutung jener Gleichungen in's Auge fasst.

Zu diesem Behufe zeichne man die Fig. 131 eben so, wie die Fig. 82, nur mit dem Unterschiede, dass der dortige Winkel pEr nicht $= \varepsilon$, sondern $= (\varepsilon - \varrho)$ gemacht wird, also derselbe, insoferne $(\varepsilon - \varrho)$ negativ ist, in der Grösse von $(\varrho - \varepsilon)$ auf die andere Seite des Perpendikels $\overline{Ep}$ hinübergetragen wird.

Das Gleiche gilt von der sogenannten Orientirungslinie $\overline{Fb}$.

Man hat daher, falls $\overline{AE}$ die Bruchlinie bezeichnet, in der Fig. 131, wenn die Winkeldifferenz $(\varrho - \varepsilon)$ als positiv angenommen wird:

$$\overline{Fa} \parallel \overline{Ep} \perp \overline{AI}, \measuredangle\, aFb = \measuredangle\, pEr = (\varrho - \varepsilon),$$
$$\overline{Er} = \overline{qr}, \overline{AE} = A \text{ und } G = g.\text{area } AFE.$$

Die gedachten zwei Hauptregeln sind nun folgende:

Erste Hauptregel.

Durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ wird die Fläche $AFEr$ halbirt, es ist somit:

$$\text{area } AFE = \triangle\, AEr = \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin\gamma \cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \ldots\ldots.(288).$$

Auf Grund dieser Eigenschaft kann die Grösse des (punktirten) Bruchprismas, somit die Lage der Bruchlinie construirt werden.

Zweite Hauptregel.

Das Gewicht des Erdprismas mit dem (schraffirten) Profile Eqr ist gleich der Grösse des schiefen Erddruckes $\mathfrak{D}$, es ergibt sich daher:

$$\mathfrak{D} = g \,.\, \triangle\, Eqr.$$

Es ist offenbar gleichgiltig, ob man einerseits $\overline{Er} = \overline{qr}$ oder andererseits $\overline{Er} = \overline{q'r}$ aufträgt, und sodann das Profil $Eq'r$, anstatt des vorigen Eqr, als Grundlage bei der Berechnung für

den Erddruck annimmt, weil die Grösse dieser beiden Dreiecke dieselbe ist, so dass man auch schreiben kann:

$$\mathfrak{P} = g \cdot \triangle Eqr = g \cdot \triangle Eq'r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (289).$$

Der Beweis für die Statthaftigkeit dieser Hauptregeln ist in derselben Weise zu führen, wie bezüglich der Hauptregeln (177) und (178) auf Seite 184 und 185.

Augenscheinlich ergeben sich hier wie dort die gleichen Resultate, nur mit der Modification, dass jetzt überall $(\varepsilon - \varrho)$ an die Stelle von ε tritt.

Da die Winkeldifferenz $(\varrho - \varepsilon)$ an die auf die natürliche Böschung gefällten Perpendikel $\overline{Fa}$ und $\overline{Ep}$ auch so construirt werden kann, dass man zuerst den Winkel ε genau so wie in der Figur 82 ansetzt, dann aber diesen Ansatzwinkel um den Reibungswinkel ϱ vermindert, also letzteren an den gefundenen Schenkel des Ansatzwinkels ε im entgegengesetzten Sinne aufträgt, so ist es sehr einfach, die neuerliche Orientirungslinie $\overline{Fb}$, welche in der Fig. 131 zum Vorschein kommt, aus der Lage der früheren Orientirungslinie $\overline{Fb}$ in Fig. 82 abzuleiten; und das Gleiche gilt in Bezug auf die allgemeine Richtung der Abschlussgeraden $\overline{Er}$ für das $\triangle AEr$ in den beiderseitigen Figuren 82 und 131. Der Bruchpunkt E jedoch hat nicht dieselbe Lage, indem solcher hier nach der Hauptregel (288), dort aber nach der Hauptregel (177) aufgesucht werden muss, wodurch augenscheinlich der Bruchwinkel in der Figur 131 kleiner wird, als in der Fig. 82.

Nimmt man daher die Reibung des Erdreiches an der Stützwand mit in Rechnung, so wird das Bruchprisma grösser, somit erhält man eine sanftere Neigung für die Bruchfläche, als bei Ausserachtlassung jener Reibung, nämlich für $\varrho = 0$.

Eine Ausnahme von diesem Gesetze kann nur entstehen, wenn schon für $\varrho = 0$ der Bruchwinkel γ ebenfalls gleich Null wird, wie z. B. in dem Falle nach Fig. 54 (pag. 141), wo das Erdreich von der Wandkrone an nach der natürlichen Böschung

fort ansteigend gedacht wird; weil dann der Bruchwinkel, welcher niemals kleiner als Null werden kann, überhaupt für jeden Werth von ϱ Null bleiben muss, worauf man später noch zurückkommen wird.

Was die Intension des Erddruckes betrifft, so wird der schiefe Erddruck, wenn nämlich die Reibung an der Stützwand mit in Rechnung kommt, je nach Umständen kleiner oder grösser als der normale in dem Falle, wo die gedachte Reibung ausser Betracht bleibt; was man schon ohne Schwierigkeit erkennt, wenn man die beiderseitigen Constructionsregeln auf verschiedene Fälle anwendet.

Betrachtet man jedoch stets den normalen Erddruck hier wie dort, so zeigt sich ein anderes Ergebniss, indem dann die Grösse des Druckes mit Rücksicht auf die Reibung an der Wand ($\mathfrak{D}$ cos ϱ) niemals jene übertreffen kann, welche ohne eine solche Rücksichtnahme sich ergibt. (Siehe §. 26.)

Combinirt man die zweite der aufgestellten Hauptregeln (289), wonach der schiefe Erddruck $\mathfrak{D}$ ermittelt wird, mit den Gleichungen (279), (280) und (281), worin der normale Erddruk ($D = \mathfrak{D} \cos \varrho$) und die dem Reibungswiderstande an der Stützwand äquivalente Druckkraft ($R = \mathfrak{D} \sin \varrho$) als Componenten des schiefen Erddruckes in Betracht kommen, so kann man die Grösse dieser Componenten ebenfalls grafisch, nämlich jede durch das Gewicht eines gewissen Erdprismas darstellen, welches sich insbesondere ergibt, wenn man das den Druck $\mathfrak{D}$ repräsentirende Erdprisma in dem Verhältnisse wie 1 : cos ϱ und beziehungsweise wie 1 : sin ϱ verkleinert.

In der Figur 132 ist dieses Verfahren anschaulich gemacht. Zunächst ist $\overline{Er} = \overline{rq'}$ und $\triangle\, Eq'r$ das Profil des Erdprismas, dessen Gewicht dem schiefen Erddrucke $\mathfrak{D}$ gleich kommt. Zieht man nun $\overline{rm} \perp \overline{El}$, und macht einerseits $\overline{En} = \overline{Em}$, andererseits aber $\overline{rk} = \overline{rm}$, so hat man offenbar:

$$\overline{Em} = \overline{En} = \overline{Er} \,.\, \cos \varrho,$$
$$\overline{rm} = \overline{rk} = \overline{Er} \,.\, \sin \varrho,$$
$$\triangle\, Enq' = \cos \varrho \,.\, \triangle\, Eq'r$$
$$\triangle\, Ekr = \sin \varrho \,.\, \triangle\, Eq'r,$$

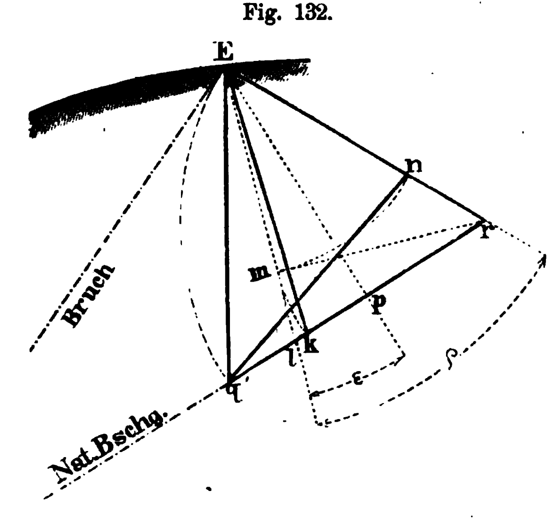
daher wegen $\mathfrak{P} = g \,.\, \triangle\, Eq'r$, $D = \mathfrak{P} \cos \varrho$ und $R = \mathfrak{P} \sin \varrho$:

$$\left. \begin{array}{l} D = g \,.\, \triangle\, Enq' \ldots\ldots \\ R = g \,.\, \triangle\, Ekr \ldots\ldots \end{array} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (290),$$

d. h.:

Das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile *Enq'* gibt den Normaldruck *D*, jenes mit dem Profile

Fig. 132.



Ekr aber die an der Stützwand entstehende Reibung *R* an.

Da die den Kräften $\mathfrak{P}$, *D* und *R* entsprechenden Dreiecke *Eq'r*, *Eq'n* und *Ekr* eine gleiche Höhe haben, wenn die Spitze für das erste und dritte in *E*, für das zweite aber in *q'* gedacht wird, so verhalten sich die Dreiecksgrössen zu einander, wie die bezüglichen Grundlinien $\overline{q'r}$, $\overline{En}$ und $\overline{kr}$, und da diese aus den drei Seiten des rechtwinkeligen Dreieckes *Emr* entstanden sind, so ergibt sich die Relation:

$$\overline{q'r}^2 = \overline{En}^2 + \overline{kr}^2$$

welche in der That vorhanden sein muss, weil ja auch

$$\mathfrak{P}^2 = D^2 + R^2$$

ist.

Indem man weiterhin, insoferne nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt ist, immer den schiefen Erddruck $\mathfrak{P}$ construiren oder berechnen wird, kann es keinem Anstande unterliegen, eventuell auch die mit D und R bezeichneten Seitenkräfte jenes Druckes sowohl grafisch, als auch im Wege der Rechnung zu bestimmen, wenn man sich hierbei nur stets gegenwärtig hält, dass $D = \mathfrak{P} \cos \varrho$ und $R = \mathfrak{P} \sin \varrho$ zu setzen ist.

Dasjenige, was im §. 47 unter der dort gemachten Voraussetzung, nämlich für $\varrho = 0$, in Bezug auf den Fall nach Fig. 84 gesagt worden ist, gilt in analoger Weise auch gegenwärtig bei der thatsächlichen Berücksichtigung des Reibungswinkels ϱ, wenn nur die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ nach der jetzt in Betracht kommenden Regel, also so gezeichnet wird, dass dieselbe mit dem Perpendikel $\overline{Fa}$ nach der linken Seite hin den Winkel $(\varepsilon - \varrho)$, oder, insoferne dieser Werth negativ ist, nach der rechten Seite hin den Winkel $(\varrho - \varepsilon)$ einschliesst, und hiezu die Abschlussgeraden $\overline{Er}$, $\overline{E'r'}$ u. s. w. parallel gezogen werden.*)

Dagegen erleidet das zur Formel (183) und zur Figur 85 Bemerkte, in soferne ϱ nicht gleich Null ist, eine Modification; denn es ist nach der allgemeinen Formel (287):

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} g \frac{A^2 \sin^2 \gamma}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{1}{2} g \frac{[A \sin \gamma]^2}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{1}{2} g \frac{P^2}{\cos(\varepsilon - \varrho)}$$

wenn, wie auf Seite 192, die Grösse des Perpendikels, welches von dem Bruchpunkte E bis zur natürlichen Böschung reicht,

---

*) Die Bruchlinie bleibt in diesem Falle eigentlich unbestimmt, sie kann nämlich in der Strecke $\overline{e'e''}$ irgendwo angenommen werden, ohne dass die durch die Formel (288), beziehungsweise (177), ausgedrückte Hauptregel alterirt wird. Denn man findet leicht, dass — wenn area $AFe'E = \triangle AEr$ ist — dann auch überhaupt area $AFe'E' = \triangle AE'r'$ sein muss, wo immer der Punkt E' in der Linie $\overline{e'e''}$ liegen mag. Durch das Ver-

mit P bezeichnet, also $\overline{A} \sin\gamma = \overline{P}$ gesetzt wird. (Siehe auch die Figur 131, wo $P = \overline{Ep} \perp \overline{AI}$ ist.)

Hiernach hat man:

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\, g \frac{P^2}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = \tfrac{1}{2} \left[g \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \right] \frac{P^2}{\cos\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\, g' \frac{P^2}{\cos\varepsilon} \quad \ldots (291)$$

und wegen $D = \mathfrak{D} \cos\varrho$:

$$D = \tfrac{1}{2} \left[g \frac{\cos\varepsilon \cos\varrho}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \right] \frac{P^2}{\cos\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\, g'' \frac{P^2}{\cos\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (292).$$

Zwar enthalten die beiden letzten Gleichungen ebenfalls das hydrostatische Gesetz, indessen ist das per Cubikeinheit entfallende Gewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche denselben Druck ausüben würde, nicht mehr, wie nach der Formel (183), geradezu gleich dem Einheitsgewichte des Erdreiches (g), sondern davon verschieden, nämlich bei der Zugrundelegung der Formel (291) mit $g' = g \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varrho)}$, bei jener der anderen (292) aber mit $g'' = g \frac{\cos\varepsilon \cos\varrho}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = g \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\varrho} \right)$ zu bemessen.

Anstatt der auf Seite 192 bemerkten besonderen Eigenschaft, welche für $\varrho = 0$ stattfindet, ergibt sich daher für jeden Werth von ϱ folgende allgemeine Eigenschaft:

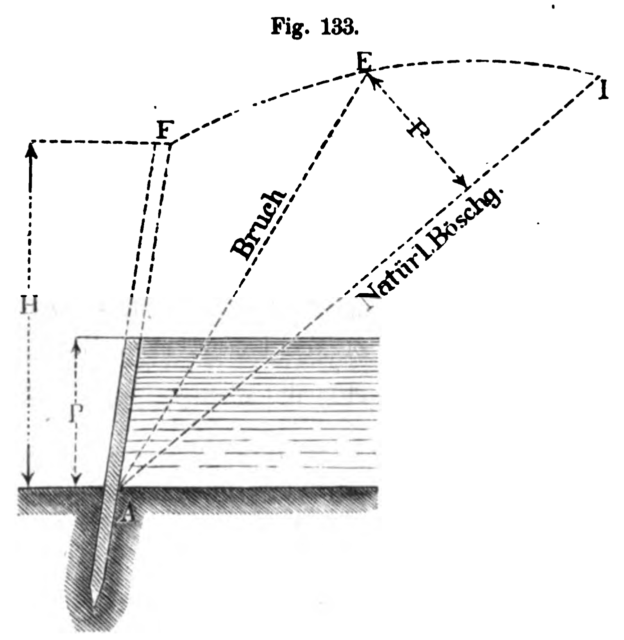
Sowohl der schiefe Erddruck $\mathfrak{D}$, als auch der normale D auf die ganze Wandhöhe H (Fig. 133) ist eben so gross, wie der Druck einer sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit von dem Einheitsgewichte g', beziehungsweise g'', wenn die Druckhöhe hiebei jedesmal nur mit der Grösse desjenigen Perpendikels P bemessen wird, welches vom Bruchpunkte E bis zur natürlichen Erdböschung $\overline{AI}$ reicht.

---

rücken des Bruchpunktes nimmt nämlich jede der zwei Flächen, die einander gleich sein sollen, um dieselbe Grösse zu oder ab, so dass, wenn die fraglichen Flächen bei der Wahl des Einen Bruchpunktes einander gleich waren, dieselben durch dessen Verschiebung immer wieder einander gleich werden. Hiernach kann der Bruch nach der Richtung $\overline{Ae'}$ oder $\overline{Ae''}$, oder nach einer beliebigen Zwischenrichtung erfolgen, wodurch übrigens die Wirkung des Erddruckes auf die Stützwand nicht geändert wird.

Für $\varepsilon = 0$, also für eine verticale Stützwand, erhält man ausnahmsweise $g'' = g =$ dem Erdgewichte selbst, und zwar ohne Rücksicht auf den Werth von ϱ.

Fig. 133.



Es ist jedoch wohl zu beachten, dass das Perpendikel P in den Fällen, in welchen einmal $\varrho = 0$ und das andere Mal $\varrho > 0$ ist, nicht dasselbe bleibt, indem die Bruchfläche $\overline{AE}$ mit ϱ veränderlich ist.

§. 67.

Erläuterungen zu den im vorigen §. entwickelten Gesetzen.

A.

Für eine liegende Stützwand, wie in Fig. 131, ist ε positiv, folglich $\sphericalangle(\varrho - \varepsilon) = \sphericalangle pEr$ an das Perpendikel $\overline{Ep}$, beziehungsweise $\overline{Fa}$ nach aufwärts oder nach abwärts anzusetzen, je nachdem $\varrho >$ oder $<$ als ε ist. Für $\varrho = \varepsilon$ steht die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ senkrecht auf der natürlichen Böschung $\overline{AI}$, somit fällt

$\overline{Er}$ mit dem Perpendikel $\overline{Ep}$ unmittelbar zusammen, und die beiden Dreiecke AEr und Erq, beziehungsweise Erq', werden rechtwinklige. Für eine verticale Stützwand wird $\varepsilon = 0$, folglich der Ansatzwinkel $(\varrho - \varepsilon) = \varrho$, sodann schliessen die Linien $\overline{Fb}$ und $\overline{Er}$ mit den daselbst auf die natürliche Böschungsrichtung gefällten Perpendikeln $\overline{Fa}$ und $\overline{Ep}$ geradezu den Reibungswinkel ϱ ein.

Für eine um den Winkel ε gegen das Loth überhängende Stützwand ist in den vorigen Untersuchungen $(-\varepsilon)$ statt $(+\varepsilon)$ zu setzen und umgekehrt; es werden also in diesem Falle die beiden Winkel pEr und $aFb = (\varrho + \varepsilon)$, so dass dann die Orientirungslinie, von der Stützwand aus betrachtet, jedenfalls jenseits des Perpendikels $\overline{Fa}$ zu liegen kommt.

B.

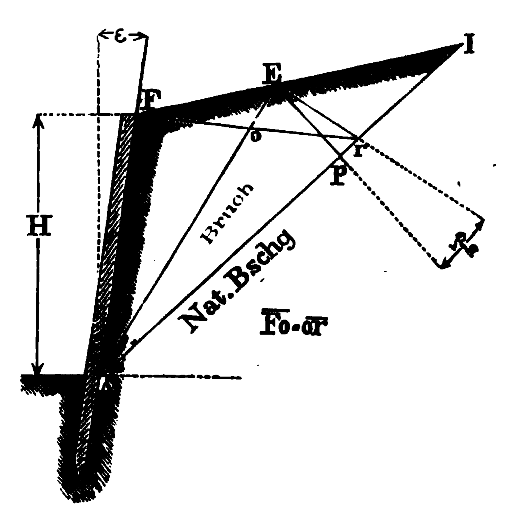
Ist die Oberfläche des Erdreiches eben, wenn auch schief, wie in der Fig. 134, so entsteht laut der in der Gleichung (288) ausgedrückten ersten Hauptregel die weitere Eigenschaft, dass in dem Constructions-Vierecke $AFEr$ die zweite Diagonale $\overline{Fr}$ durch die erste (zugleich Bruchlinie $\overline{AE}$) im Kreuzungspunkte o halbirt wird; wie man dies auch schon in dem §. 48 mit Bezug auf den dortigen Fall nach Fig. 89, wobei die Reibung zwischen Erde und Stützwand gleich Null gesetzt ward, bemerkt hat, so dass die angedeutete Eigenschaft nunmehr ganz allgemein für jeden Werth des Reibungswinkels ϱ giltig ist.

Zur grafischen Darstellung der Bruchlinie kann man in diesem Falle jede der drei Methoden benützen, welche im §. 49 vermittelst der Figuren 93, 94 und 95 angedeutet erscheinen, nur mit der Modification, dass jetzt die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ mit dem Perpendikel $\overline{Fa}$ nicht den Winkel ε, sondern $(\varepsilon - \varrho)$ einschliesst; was selbstverständlich auch für die Gerade $\overline{Er}$ in Bezug auf das Perpendikel $\overline{Ep}$ gilt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus der Schlussanmerkung im §. 49. Heisst man nämlich den bezüglichen Ansatzwinkel ε', ist also dieser irgendwie von dem Neigungs-

winkel ε der Stützwand verschieden, wie das in der Figur 96 angedeutet ist, so bleiben dennoch die sonstigen geometrischen Gesetze der Hauptsache nach dieselben wie in den Figuren 93,

Fig. 134.



94 und 95; nur wird jetzt die Richtung der Bruchlinie $\overline{AE}$ eine andere. Hiernach können bei Berücksichtigung der Reibung zwischen Erde und Stützwand in dem vorausgesetzten Falle, wenn das Erdreich von der Stützwandkrone angefangen von einer Ebene begrenzt wird, gleichgiltig, ob diese Ebene horizontal, ansteigend oder abfallend ist, die Bruchfläche und die Grösse des Erddruckes eben so einfach construirt werden, wie wenn auf die gedachte Reibung keine Rücksicht genommen wird, indem nämlich auch die Grösse des Erddruckes nach der zweiten Hauptregel (289) sogleich bestimmbar ist, nachdem man die Lage der Bruchfläche gefunden hat.

C.

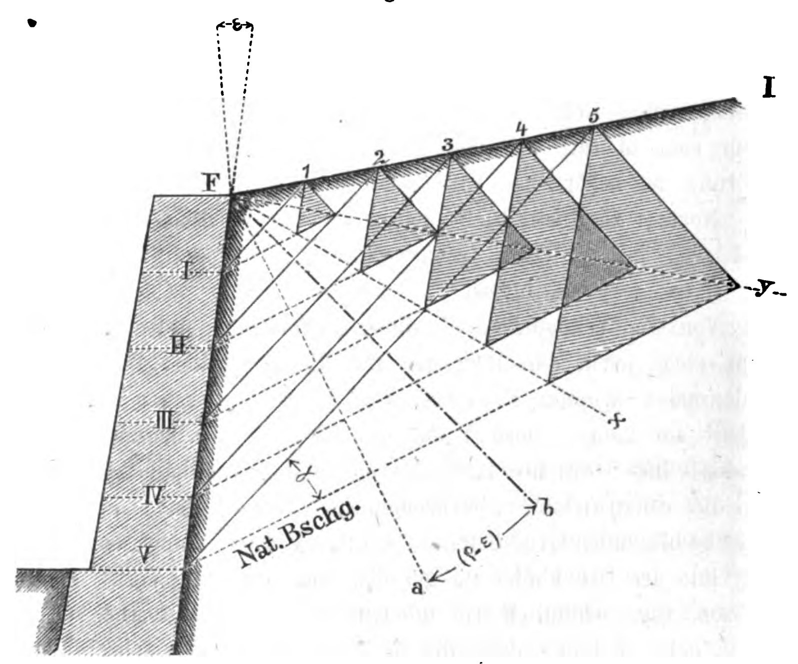
Alles das, was in den §§. 50, 51 und 52 gesagt worden ist, gilt auch dermalen, wenn nur die sogenannte Orientirungslinie,

welche in den betreffenden Figuren 97, 98, 99, 100 und 101 mit $\overline{Fb}$ bezeichnet ist, nicht, wie dort, sondern nach der jetzt in Betracht kommenden Regel eingezeichnet wird.

D.

In dem unter lit. B. besprochenen Falle (Fig. 134) erhält man durch die Construction offenbar stets einen und denselben Werth für den Bruchwinkel γ, wenn unter sonst gleichen Umständen blos die Stützwandhöhe H variabel ist, weil dann die für die verschiedenen Höhen entstehenden Zeichnungen, welche

Fig. 135.



nach einer der angegebenen drei Constructionsmethoden gemacht werden, nur in der Grösse von einander verschieden, unter sich aber **ähnlich** ausfallen.

Die den einzelnen Druckhöhen zukommenden Bruchflächen sind daher mit einander parallel, und die Grösse des Erddruckes

nimmt, da auch die Profile der Erdprismen, deren Gewicht jedesmal die Grösse des Erddruckes vorstellt, unter einander ähnlich sind, mit dem Quadrate der Druckhöhe zu; Eigenschaften, welche auch schon in dem vorigen Abschnitte, wo eine Reibung zwischen Erde und Stützwand nicht in Rechnung kam, gefunden wurden, und die nunmehr in dem vorausgesetzten Falle als allgemein giltig (nämlich unabhängig von dem Reibungswinkel ϱ) anzusehen sind, insoferne die Erdcohäsion gleich Null angenommen wird.

Diese Eigenschaften sind in der Figur 135 anschaulich gemacht.

Für die, von der Stützwandkrone F herab bis I, II, III, IV, V zu zählenden Druckhöhen sind die, an der Stützwand beginnenden und mit 1, 2, 3, 4, 5 endenden Linien die entsprechenden Bruchböschungen; diese sind unter sich parallel und erheben sich überall um den gleichen Bruchwinkel γ über die Richtung der natürlichen Erdböschung.

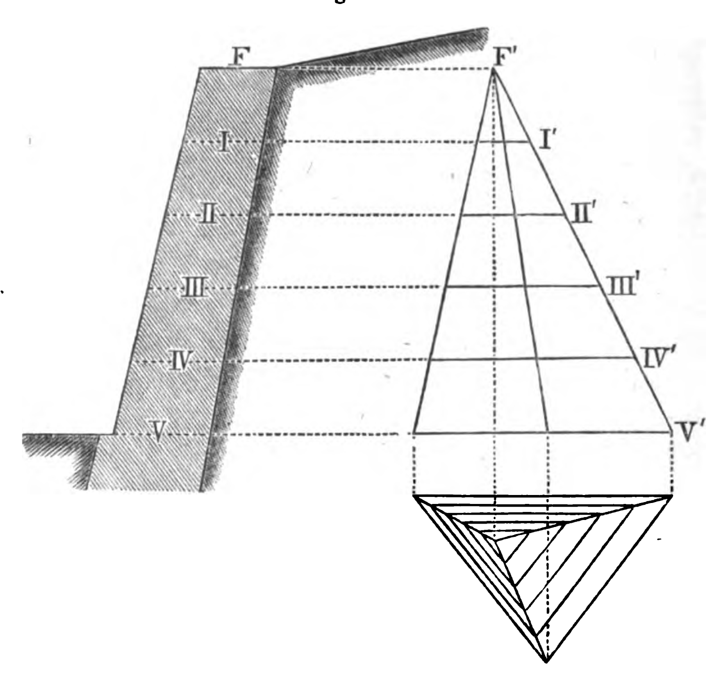
Normal zu dieser Richtung ist das darauf stehende Perpendikel $\overline{Fa}$, mit welchem letzteren die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ den Winkel $(\varrho - \varepsilon)$ einschliesst.

Von den schraffirt angezeigten Erdprismen stellt das Gewicht eines jeden derselben den für die bezügliche Druckhöhe resultirenden schiefen Erddruck vor. Dieselben haben alle die Einheit zur Länge, normal auf die Ebene der Zeichnung verstanden, ihre Gewichte verhalten sich daher aufeinanderfolgend, wie die construirten, gleichschenklige und zugleich ähnliche Dreiecke bildenden Grundflächen, somit, da die Seiten dieser letzteren mit der Druckhöhe im geraden und einfachen Verhältnisse wachsen, augenscheinlich wie die Quadrate dieser Druckhöhen.

Auch ist klar, dass die analogen Ecken der schraffirten Dreiecke stets in einer und derselben Geraden ($\overline{FI}$, $\overline{Fx}$, $\overline{Fy}$) liegen, wonach diese Dreiecke auch als die, in dem Niveau der Stellen I, II, III, IV, V geführten horizontalen Schnittflächen einer und derselben aufrecht stehenden Pyramide angesehen werden können, von welcher die Spitze mit der Wandkrone F, die

horizontale Basis aber mit dem Wandfusse V in gleichem Niveau gelegen ist, und zu dieser Basis das grösste der schraffirten Erdprofile verwendet wird. Siehe Figur 136, wo die Spitze der besagten Pyramide in F' ist, und die horizontalen Schnitte in I',

Fig. 136.



II', III', IV' und V' geführt sind. Wie also diese Schnittflächen von oben herab zunehmen, in derselben Weise nimmt der Erddruck an die Stützwand zu. Insoferne man nur das zunehmende Verhältniss an und für sich darstellen will, kann man als Pyramidenbasis eigentlich eine beliebige Figur, sowohl der Form als auch der Grösse nach, wählen; nur dann, wenn, wie es oben beabsichtigt war, die jeweilige Schnittfläche in der Pyramide unmittelbar das Profil desjenigen Erdprismas, dessen Gewicht dem Erddrucke gleich ist, geben soll, ist es nothwendig, als Pyramidenbasis, wie es geschehen, das grösste der schraffirten Dreiecke in der Fig. 135 anzunehmen.

Selbstverständlich ist das angedeutete zunehmende Verhältniss auch bezüglich der Veränderung des normalen Erddruckes und des Reibungswiderstandes an der Stützwand nach Massgabe der Druckhöhe vorhanden*).

Dass nebstbei das in Rede stehende Verhältniss in dem betrachteten Falle (Figur 134) auch durch die Figuren 12 und 13, welche laut der §§. 7 und 55 sowohl für tropfbare Flüssigkeiten, als auch für cohäsionsloses Erdreich bei Ausserachtlassung der Reibung zwischen Erde und Stützwand gelten, dargestellt werden kann, und dass hiebei der Mittelpunkt des Erddruckes für jeden Werth von ϱ noch immer in dem dritten Theile der Druckhöhe verbleibt, bedarf wohl keiner weiteren Begründung.

§. 68.

Rechnungsmässige und grafische Methode, um den Druck des Erdreiches an eine Stützwand durch jenen einer sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit darzustellen, und zwar rücksichtlich des schiefen und des normalen Erddruckes. Nennt man $\mathfrak{w}$ das Einheitsgewicht derjenigen tropfbaren Flüssigkeit, welche an die um den Winkel ε gegen das Loth geneigte Stützwand innerhalb der ganzen Druckhöhe einen Druck hervorbringen würde, der dem schiefen Erddruck $\mathfrak{D}$ gleich ist, so entsteht in Berücksichtigung der Relationen (4) und (287) die Gleichung:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} g A^2 \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{1}{2} \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon};$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \left[\frac{A \sin \gamma}{H}\right]^2 = \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \varrho)} \left[\frac{P}{H}\right]^2 \dots\dots (293),$$

wenn, wie in der Formel (291), das Perpendikel $P = A \sin \gamma$ in Rechnung genommen wird.

---

*) Das so eben Erläuterte gilt allgemein für cohäsionsloses Erdreich, also auch für den Fall der Nichtberücksichtung der Reibung zwischen Erde und Stützwand, dann eben so für tropfbare Flüssigkeiten.

Ist ferner w das Einheitsgewicht derjenigen tropfbaren Flüssigkeit, welche einen, dem normalen Erddrucke $D = \mathfrak{P} \cos \varrho$ gleich grossen Druck erzeugen würde, so hat man offenbar:

$$w = \mathfrak{w} \cos \varrho \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (294)$$

daher auch:

$$\frac{w}{g} = \frac{\cos \varepsilon \cos \varrho}{\cos (\varepsilon - \varrho)} \left(\frac{P}{H}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (295)$$

Für die im §. 67 unter lit. B erwähnten Fälle, in denen der Bruchwinkel γ von der Druckhöhe nicht abhängt, also der Erddruck geradezu mit dem Quadrate derselben sich verändert, sind $\frac{P}{H}$, $\mathfrak{w}$ und w in Beziehung auf die Druckhöhe constant; in sonstigen Fällen tritt dies nicht ein.

Stets aber kann der Werth (293) in einer ähnlichen Weise, wie in der Figur 102, grafisch dargestellt werden. Die diessfällige Construction ist aus der Figur 137 ersichtlich.

Fig. 137.

Bedeutet nämlich das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile Eqr (wobei $\overline{Er} = \overline{qr}$ ist) die Grösse des schiefen Erddruckes $\mathfrak{P}$ auf Grundlage der Hauptregel (289), so ist dieses Profil in die Ecke bei A derart zu übertragen, dass $\triangle Amn =$

$\triangle Eqr$ wird, indem man insbesondere $\overline{Am} = \overline{qr}$, $\overline{Ak} = \overline{Ep} = P$ und $\overline{kn} \parallel \overline{AC}$ macht. Hierauf verwandle man das $\triangle Amn$ in das $\triangle AFu$ mit der Höhe $\overline{AB} = H$ (ziehe also $\overline{nu} \parallel \overline{Fm}$), und fälle schliesslich das Perpendikel $\overline{tu}$ auf die Stützwand $\overline{AF}$.

Alsdann hat man:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\overline{tu}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{tu}}{H} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (296),$$

so dass nur die Linien $\overline{tu}$ und H nach irgend einem Massstabe abzumessen sind, um die Grundlagen für den zu bildenden Quotienten zu bekommen, der übrigens schliesslich, wenn man will, ebenfalls construirt werden kann, indessen besser durch Rechnung zu ermitteln sein wird.

Beweis.

Zunächst ist:

$$\overline{Au} = \overline{Am} \cdot \frac{\overline{An}}{\overline{AF}} = \overline{Am} \cdot \frac{P}{H}$$

$$= \overline{qr} \cdot \frac{P}{H} = \overline{Er} \cdot \frac{P}{H} = \frac{P^2}{H \cos(\varrho - \varepsilon)},$$

also:

$$\overline{tu} = \overline{Au} \cdot \cos\varepsilon = \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varrho - \varepsilon)} \cdot \frac{P^2}{H}$$

$$\frac{\overline{tu}}{H} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varrho - \varepsilon)} \left(\frac{P}{H}\right)^2 = \frac{\mathfrak{w}}{g},$$

indem man unter einem die Gleichung (293) benützt, und hiebei beachtet, dass $\cos(\varepsilon - \varrho) = \cos(\varrho - \varepsilon)$ ist.

Wird in der Relation (296) die Linie $\overline{tu}$ in dem Verhältnisse wie $1 : \cos\varrho$ verkleinert, oder die Druckhöhe H in dem umgekehrten Verhältnisse vergrössert, so kann man selbstverständlich auch die Relation (295) grafisch darstellen.

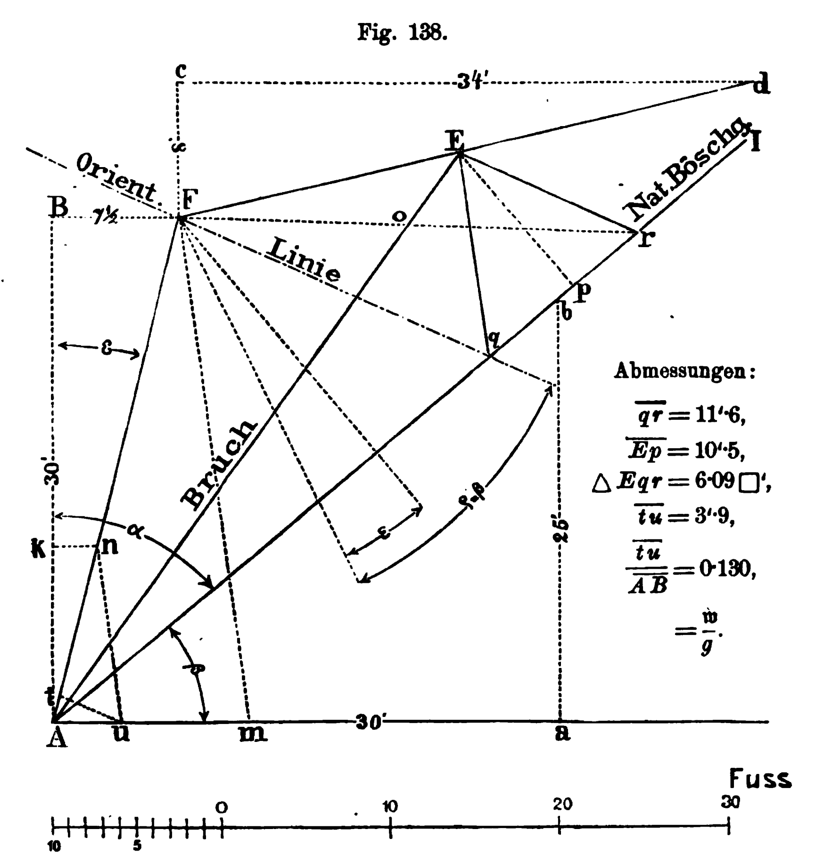
Beispiel.

Um das so eben Gesagte speciell zu erläutern, und unter Einem damit das grafische Verfahren zur Bestimmung des Erddruckes überhaupt zu verbinden, wird im Nachfolgenden das in Figur 103 (pag. 222) gegebene Beispiel neuerdings, und zwar jetzt mit Rücksicht auf die Reibung zwischen

der Erde und Stützwand aufgelöset, während dort von einer solchen Reibung abgesehen wurde. Zu diesem Behufe werden die am Anfange der Seite 223 bemerkten Daten unverändert beibehalten und es wird nur beigefügt, dass der dermal in Betracht kommende Coefficient für die Reibung an der Stützwand eben so gross sein soll, wie jener für die Reibung zwischen den Erdtheilchen, nämlich $\mu = \text{tg}\,\varrho = \text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(90^\circ - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha = {}^5/_6$, also $\varrho = \beta = (90^\circ - \alpha)$.

Die grafische Auflösung dieser Aufgabe ist in der Figur 138 nach dem daselbst angedeuteten Massstabe durchgeführt. Vor allem wurde das

Fig. 138.



Erdprofil $AFdI$ genau so, wie in der Figur 103, gezeichnet. Sodann hat man die Bruchböschung $\overline{AE}$ auf Grund einer der im §. 67 (lit. B) erwähnten Methoden derart ermittelt, dass hiedurch das Constructionsviereck $AFEr$, worin die Abschlusslinie $\overline{Er}$ parallel zur Orientirungslinie läuft,

in zwei gleiche Theile getheilt, also $\overline{Fo} = \overline{or}$ wird, wie dies die erste Hauptregel (288) verlangt.

Weiter wurde in Gemässheit der zweiten Hauptregel (289) $\overline{Er} = \overline{qr}$ und hiedurch das gleichschenklige Dreieck Eqr construirt, welches das Profil desjenigen Erdprismas vorstellt, dessen Gewicht dem schiefen Erddrucke an die Stützwand gleichkommt.

Auf dem Massstab gemessen, findet man in Bezug auf dieses Dreieck:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Basis } \overline{qr} = 11'\cdot 6 \\ \text{Höhe } \overline{Ep} = 10'\cdot 5 \end{array}\right\} \triangle Eqr = \frac{11\cdot 6 \times 10\cdot 5}{2} = 6\cdot 09 \,\square'.$$

Es ist daher der schiefe Erddruck:

$$\mathfrak{D} = g \,.\, \triangle Eqr = 6\cdot 09 \times 75 \text{ Pfd.} = 45\cdot 7 \text{ Ctr.};$$

somit der normale Erddruck:

$$D = \mathfrak{D} \cos\varrho = 35\cdot 1 \text{ Ctr.};$$

der Reibungswiderstand an der Stützwand aber:

$$R = \mathfrak{D} \sin\varrho = R \operatorname{tg}\varrho = 29\cdot 2 \text{ Ctr.},$$

wenn man beachtet, dass, wegen $\operatorname{tg}\varrho = \mu = \frac{5}{6}$,

$$\cos\varrho = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{6}{61}\sqrt{61} = 0\cdot 768$$

$$\sin\varrho = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{5}{\sqrt{61}} = \frac{5}{61}\sqrt{61} = 0\cdot 640$$

zu setzen ist.

Uebrigens könnte man mit Berücksichtigung der Andeutungen in der Figur 132 auch D und R construiren.

Schliesslich hat man den Ausdruck (296) bestimmt, indem $\overline{Ak} = \overline{Ep}$, $\overline{Am} = \overline{qr}$, $\overline{kn} \parallel \overline{Aa}$, $\overline{nu} \parallel \overline{Fm}$ und $\overline{tu} \perp \overline{AF}$ gemacht, dieses Perpendikel $\overline{tu}$ auf dem Massstab abgemessen und das Resultat hiefür durch die Druckhöhe $\overline{AB} = H$ dividirt wurde.

Demzufolge ist:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\overline{tu}}{H} = \frac{3'\cdot 9}{30'} = 0\cdot 130 \text{ und } \mathfrak{w} = 0\cdot 13\, g = 9\cdot 8 \text{ Pfd.},$$

somit auch:

$$w = \mathfrak{w} \cos\varrho = 7\cdot 5 \text{ Pfd.};$$

d. h.: Eine tropfbare Flüssigkeit mit dem Gewichte von $9\cdot 8$, beziehungsweise von $7\cdot 5$ Pfd. per Cubikfuss würde auf die Stützwand $\overline{AB}$ einen Druck ausüben, welcher eben so gross ist, wie der schiefe Erddruck $\mathfrak{D}$, beziehungsweise der normale Erddruck D.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit jenen auf pag. 223 und 224, so erkennt man den Einfluss der jetzt in Rechnung genommenen Reibung zwischen der Erde und der Stützwand. Mit Rücksicht darauf beträgt näm-

lich der schiefe Erddruck nur 89%, der normale aber nur 68% von demjenigen, welcher unter der Annahme einer absolut glatten Wand sich ergeben hat.

§. 69.

Allgemeine grafische Methode zur Bestimmung der Erddruckveränderungs-Curve, aus welcher die Zunahme des Erddruckes von oben nach unten, so wie der Mittelpunkt des Druckes sich ergibt. Besondere Eigenschaften in dieser Beziehung. Alles das, was in der angedeuteten Hinsicht schon in den §§. 54 und 55 für den Fall, wenn die Reibung zwischen Erde und Stützwand gleich Null gesetzt wird, gesagt wurde, gilt auch gegenwärtig, wo jene Reibung nicht Null ist, wenn nur die bezügliche Orientirungslinie den jetzt in Betracht kommenden Verhältnissen entsprechend, also in Uebereinstimmung mit der hiefür gegebenen Regel im §. 66 construirt wird.

§. 70.

Grösster Reibungscoefficient, welcher bei cohäsionslos angenommenem Erdreiche für die Reibung zwischen diesem und der Stützwand in Rechnung kommen darf. Das Maximum dieses rechnungsmässig zulässigen Reibungscoefficienten ergibt sich aus den Erörterungen im §. 12 mit Rücksicht auf die dortige Figur 17, und zwar insbesondere nach der Gleichung (13).

So lange nämlich der wirkliche Reibungscoefficient $\mu = \operatorname{tg}\varrho \overline{\overline{<}} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$ ist, hat man diesen wirklichen Werth von μ, beziehungsweise ϱ, einzuführen; wenn aber $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ grösser, als $\operatorname{tg}\beta$ ist, so darf man nicht mehr den wirklichen, sondern man muss dann einen kleineren Reibungscoefficienten in Rechnung nehmen, welcher geradezu gleich $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha$ zu setzen ist.

Die beiden Grenzwerthe, ausserhalb welchen der in Rechnung kommende Reibungscoefficent $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ nicht liegen darf, sind daher 0 und $\operatorname{cotg}\alpha$, vorausgesetzt, dass (wenigstens bezüglich

des zweiten Grenzfalles) cohäsionslos gedachtes Erdmateriale in Betracht steht. Indem die Untersuchungen im zweiten Abschnitte bereits auf den ersten Grenzwerth $\mu = \varrho = 0$ Bezug nehmen, wird im laufenden dritten Abschnitte gelegenheitlich auch der zweite Grenzfall $\mu = \operatorname{cotg} \alpha$ in's Auge gefasst werden.

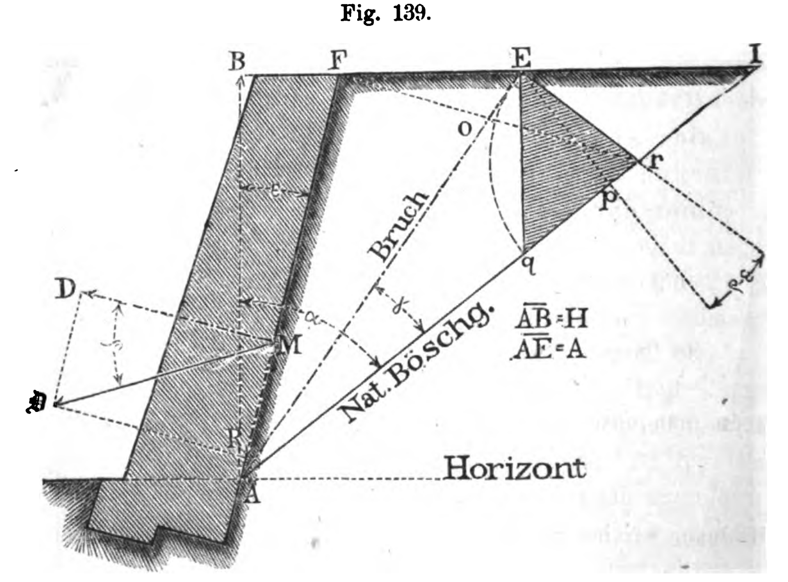
Zweites Capitel.

Druck eines cohäsionslosen Erdreiches an eine um den Winkel ε geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn dasselbe eine horizontale Oberfläche im gleichen Niveau mit der Wandkrone hat.

§. 71.

Bruchböschung und Grösse des Erddruckes in diesem Falle. (Fig. 139.) Nach der ersten in der Gleichung

Fig. 139.



(288) ausgedrückten Hauptregel liegt die um den Winkel γ über die natürliche Erdböschung sich erhebende Bruchfläche $\overline{AE}$ so,

dass in dem Constructionsvierecke $AFEr$, wobei $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ und $\measuredangle pEr = (\varrho - \varepsilon)$ ist, die beiden Dreiecke AFE und AEr gleich grossen werden.

Es ist aber einerseits:

$$\triangle AFE = \tfrac{1}{2} \overline{AF} . \overline{AE} . \sin(\alpha - \gamma - \varepsilon)$$
$$= \tfrac{1}{2} \overline{AE}^2 . \frac{\cos(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \gamma - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}$$
$$= \tfrac{1}{2} A^2 . \frac{\cos(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \gamma - \varepsilon)}{\cos \varepsilon},$$

und andererseits zu Folge der bezogenen Gleichung (288):

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2} A^2 . \frac{\sin \gamma \cos(\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos(\varepsilon - \varrho)};$$

es ergibt sich daher, wegen $\triangle AFE = \triangle AEr$, die Bedingungsgleichung:

$$\sin(\alpha - \gamma - \varepsilon) \cos(\alpha - \gamma) \cos(\varepsilon - \varrho) = \sin \gamma \cos(\gamma + \varepsilon - \varrho) \cos \varepsilon,$$

woraus der Bruchwinkel γ abzuleiten ist.

Einfacher wird es hier sein, unmittelbar nicht γ, sondern $(\alpha - \gamma)$ zu bestimmen, zu welchem Zwecke die einzelnen Factoren der gefundenen Bedingungsgleichung umgestaltet werden, wie folgt:

$$\sin(\alpha - \gamma - \varepsilon) = \sin[(\alpha - \gamma) - \varepsilon]$$
$$= \cos(\alpha - \gamma) \cos \varepsilon \, [x - b],$$
$$\cos(\varepsilon - \varrho) \ldots . = \cos[(\alpha + \varepsilon - \varrho) - \alpha]$$
$$= \sin(\alpha + \varepsilon - \varrho) \cos \alpha \, [a + n],$$
$$\sin \gamma \ldots\ldots\ldots = \sin[\alpha - (\alpha - \gamma)]$$
$$= \cos \alpha \cos(\alpha - \gamma) \, [a - x],$$
$$\cos(\gamma + \varepsilon - \varrho) = \cos[(\alpha + \varepsilon - \varrho) - (\alpha - \gamma)]$$
$$= \sin(\alpha + \varepsilon - \varrho) \cos(\alpha - \gamma) \, [n + x],$$

wenn man unter Einem die abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = a \\ \operatorname{tg} \varepsilon = b \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho) = n \\ \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = x \end{array}\right\} \ldots\ldots . \quad (297).$$

Hiernach nimmt die obige Bedingungsgleichung die Form an:

$$(x - b)(a + n) = (a - x)(n + x),$$

oder:

$$x^2 + 2nx = an + b(a + n),$$

und die Auflösung derselben nach x ergibt:

$$\left.\begin{array}{r} x = -n + \sqrt{(a+n)(b+n)} \ldots\ldots\ldots \\ \operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = -\operatorname{cotg}(\alpha+\varepsilon-\varrho) + \\ + \sqrt{[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}(\alpha+\varepsilon-\varrho)][\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{cotg}(\alpha+\varepsilon-\varrho)]} \ldots \end{array}\right\} (298),$$

wenn man hiebei beachtet, dass von dem Doppelzeichen der Wurzelgrösse, weil x nicht negativ werden soll, das positive zu wählen ist.

Zieht man den trigonometrischen Ausdruck zusammen, so findet man noch:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = \frac{-\cos(\alpha+\varepsilon-\varrho) + \sqrt{\frac{\cos(\alpha-\varrho)}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos(\varepsilon-\varrho)}{\cos\varepsilon}}}{\sin(\alpha+\varepsilon-\varphi)} \quad (299),$$

worin man auch $\cos(\varrho-\varepsilon)$ anstatt $\cos(\varepsilon-\varrho)$ setzen kann.

Für $\varrho = 0$ ist insbesondere:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = \frac{1-\cos(\alpha+\varepsilon)}{\sin(\alpha+\varepsilon)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon),$$

$$(\alpha-\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha+\varepsilon) \text{ und } \gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha-\varepsilon),$$

was in der That mit den Resultaten (87) und (88) im §. 27, wo gleich von vorne herein $\varrho = 0$ angenommen ward, übereinstimmt.

Der schiefe Erddruck ist gleich dem Gewichte des Erdprismas mit dem Profile Eqr mit den gleichen Schenkeln $\overline{Er} = \overline{qr}$, und zu Folge der allgemeinen Gleichung (287) im vorliegenden Falle insbesondere:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin^2\gamma}{\cos(\varepsilon-\varrho)} = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin^2\gamma}{\cos(\varepsilon-\varrho)\cos^2(\alpha-\gamma)},$$

weil man jetzt $A = \overline{AE} = \frac{H}{\cos(\alpha-\gamma)}$ zu setzen hat.

Nach Umstaltung dieser Formel erhält man:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g H^2 \cdot \frac{\sin^2[\alpha-(\alpha-\gamma)]}{\cos[(\alpha+\varepsilon-\varrho)-\alpha]\cos^2(\alpha-\gamma)},$$

und, wenn man die oben gegebenen Werthe für die trigonometrischen Factoren substituirt:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\varepsilon-\varrho)} \cdot \frac{[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)]^2}{[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}(\alpha+\varepsilon-\varrho)]}$$

$$= \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\varepsilon-\varrho)} \cdot \frac{(a-x)^2}{(a+n)}$$

$$= \tfrac{1}{2} g H^2 \sqrt{\frac{1+n^2}{1+a^2}} \cdot \frac{(a-x)^2}{(a+n)}$$

$$= \tfrac{1}{2} g H^2 \sqrt{\frac{1+n^2}{1+a^2}} \cdot \frac{\left[a+n-\sqrt{(a+n)(b+n)}\right]^2}{(a+n)}$$

daher:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \tfrac{1}{2} g H^2 \sqrt{\frac{1+n^2}{1+a^2}} \cdot \left[\sqrt{a+n} - \sqrt{b+n}\right]^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{w} H^2 \sqrt{1+b^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (300),$$

wobei:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \sqrt{\frac{(1+n^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}} \cdot \left[\sqrt{a+n} - \sqrt{b+n}\right]^2 \quad (301),$$

ist, und $\mathfrak{w}$ das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche denselben Druck $\mathfrak{P}$ ausüben würde.

Bei Benützung dieser Formeln kann man die Rechnung ohne Zuhilfename trigonometrischer Tafeln durchführen, insoferne, wie es in der Regel vorkommt, die Tangentenwerthe der Winkel α, ε und ϱ gegeben sind, somit auch n bekannt ist; denn man hat:

$$n = \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg} \varrho} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon) \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon - (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon) \operatorname{tg} \varrho} = \frac{1 - ab + (a+b)\mu}{a + b + (1 - ab)\mu},$$

wo $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ den Reibungscoefficienten für die Reibung an der Stützwand vorstellt.

Substituirt man jedoch in die Gleichung (301) die Werthe für a, b und n zurück, so erscheint dieselbe nach erfolgter Reducirung in der trigonometrischen Form:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\cos \alpha \cos \varepsilon}{\sin(\alpha + \varepsilon - \varrho)} \left[\sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho)} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho)}\right]^2$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left[\frac{\sqrt{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon - \varrho)} - \sqrt{\cos \alpha \cos(\alpha - \varrho)}}{\sin(\alpha + \varepsilon - \varrho)}\right]^2 \ldots \\ &= \left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\sqrt{\cos \varepsilon \cos(\varepsilon - \varrho)} + \sqrt{\cos \alpha \cos(\alpha - \varrho)}}\right]^2 \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (302).$$

Das Einheitsgewicht w derjenigen tropfbaren Flüssigkeit, deren Druck dem normalen Erddrucke $D = \mathfrak{P} \cos \varrho = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{1+\mu^2}}$ gleich wäre, ergibt sich aus der Relation:

$$w = \mathfrak{w} \cos \varrho = \frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1+\mu^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (303);$$

der Reibungswiderstand an der Stützwand aber ist:

$$R = \mathfrak{P} \sin \varrho = \mathfrak{P} \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = D \operatorname{tg} \varrho = D \mu \ldots\ldots (304).$$

Für $\mu \doteq \varrho = 0$ geht der untersuchte Fall in den besonderen des §. 27 über; in der That findet man hiefür in Uebereinstimmung mit dem dortigen Resultate (95) aus den jetzigen Formeln (302) und (303):

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{w}{g} = \left[\frac{\cos \varepsilon - \cos \alpha}{\sin(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 = \left[\frac{\sin(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon + \cos \alpha}\right]^2 = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2.$$

Ex. Es sei, wie in dem Beispiele auf Seite 91, der Erddruck an eine liegende Stützmauer zu berechnen, wenn die Oberfläche des Erdreichs horizontal im gleichen Niveau mit der Mauerkrone liegt, und dasselbe keine Cohäsion besitzt; nur dass jetzt die Reibung zwischen der Erde und Stützmauer mit in Berücksichtigung gezogen, und hiefür der Reibungs-Coefficient mit $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \frac{1}{2}$ in Rechnung kommen soll. Die sonstigen Daten werden ebenso wie auf Seite 91 angenommen, nämlich: $H = 30$ Fuss, $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$ $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$ und $g = 85$ Pfd.

Die entsprechenden Winkel sind hiernach: $\alpha = 51° 47'$, $\varepsilon = 9° 28'$, $\varrho = 26° 34'$.

Macht man zunächst die Rechnung nach den trigonometrischen Formeln (299) und (302), so findet man, wegen $(\alpha + \varepsilon - \varrho) = 34° 41'$, $(\alpha - \varrho) = 25° 13'$ und $(\varepsilon - \varrho) = -17° 6'$, einerseits:

$x = \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = 0 \cdot 6469$, $(\alpha - \gamma) = 32° 54'$, somit Bruchwinkel $\gamma = 18° 53'$,

und andererseits:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = 0 \cdot 153,\ \mathfrak{w} = 0 \cdot 153\, g = 13 \cdot 00 \text{ Pfd.} = 0 \cdot 13 \text{ Ctr.},$$

wonach der schiefe Erddruck $\mathfrak{P}$ eben so gross ist, wie der einer tropfbaren Flüssigkeit mit dem Gewichte von 13 Pfunden per Cubikfuss.

Führt man dagegen die Rechnung nach den in der algebraischen Form erscheinenden Gleichungen (298) und (301) durch, so hat man hierin zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l} a = \mathrm{tg}\,\alpha = 1\cdot 27 \\ b = \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \text{ und } n = \mathrm{cotg}\,(\alpha + \varepsilon - \varrho) = \frac{1808}{1251},$$

wodurch man die gleichen Resultate, wie vorhin, erhält.
Hiernach ist der schiefe Erddruck:

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 59\cdot 3 \text{ Ctr.};$$

der normale Erddruck:

$$D = \mathfrak{D}\cos\varrho = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{1+\mu^2}} \ldots = 53\cdot 0 \text{ Ctr.};$$

die Reibung an der Stützwand:

$$R = \mathfrak{D}\sin\varrho = D\,\mathrm{tg}\,\varrho = D\,\mu = 26\cdot 5 \text{ Ctr.}$$

Hiebei hat man, wegen $\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{1}{6}$, nach der Tabelle III (pag. 19) $\frac{1}{\cos\varepsilon} = 1\cdot 0138$; ferner, wegen $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = \frac{1}{2}$, einerseits $\cos\varrho = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0\cdot 8944$ und andererseits $\sin\varrho = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} = 0\cdot 4472$ einzusetzen.

Das Gewicht per Cubikfuss von derjenigen tropfbaren Flüssigkeit, welche eine mit dem normalen Erddruck D übereinstimmende Wirkung hervorbringen würde, ist: $w = \mathfrak{w}\cos\varrho = 11\cdot 63$ Pfd.

Vergleicht man diese Resultate mit jenen auf pag. 91 und 92, so bemerkt man, dass jetzt die Bruchfläche im Erdkörper sanfter geneigt, und der normale Erddruck an die Stützmauer geringer ist, als dort, wie dies nach den Bemerkungen im §. 66 (pag. 311, 312) in der That zu erwarten war. Aber auch der schiefe Erddruck ist im vorliegenden Beispiele noch immer kleiner, als der auf pag. 92 ohne Rücksicht auf die an der Stützmauer entstehende Reibung berechnete, obwohl ein ähnliches Verhalten nicht in allen Fällen stattfindet.

§. 72.

Besonderer Fall, wo die Stützwand lothrecht steht. Jetzt vereinfachen sich die Formeln des vorigen §. Zunächst ist:

$$\varepsilon = 0,\ a = \mathrm{tg}\,\alpha,\ b = \mathrm{tg}\,\varepsilon = 0,\ \mu = \mathrm{tg}\,\varrho,$$

$$n = \mathrm{cotg}\,(\alpha + \varepsilon - \varrho) = \mathrm{cotg}\,(\alpha - \varrho) = \frac{1 + a\mu}{a - \mu},$$

daher:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = -n + \sqrt{n(a+n)} = \sqrt{n}\left[\sqrt{a+n} - \sqrt{n}\right]$$
$$= \frac{-(1+a\mu) + \sqrt{(1+a^2)(1+a\mu)}}{(a-\mu)}$$
$$= \frac{\sqrt{1+a\mu}}{a-\mu}\left[\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+a\mu}\right]$$
$$= \frac{a\sqrt{1+a\mu}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (305),$$

ferner:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \sqrt{\frac{1+n^2}{1+a^2}}\left[\sqrt{a+n} - \sqrt{n}\right]^2$$
$$= \sqrt{1+\mu^2}\left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+a\mu}}{a-\mu}\right]^2$$
$$= \sqrt{1+\mu^2}\left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a\mu}}\right]^2 \ldots\ldots \quad (306),$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \left[\frac{\sqrt{\cos\varrho} - \sqrt{\cos\alpha\cos(\alpha-\varrho)}}{\sin(\alpha-\varrho)}\right]^2$$
$$= \left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos\varrho}+\sqrt{\cos\alpha\cos(\alpha-\varrho)}}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (307),$$

endlich, wegen $w = \mathfrak{w}\cos\varrho = \frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1+\mu^2}}$, noch:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+a\mu}}{a-\mu}\right]^2$$
$$= \left[\frac{a}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+a\mu}}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (308).$$

Insoferne $a = \operatorname{tg}\alpha$ und $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ in der Regel gegeben sind, empfehlen sich insbesondere die beiden letzten Formeln für $\frac{w}{g}$ zum Gebrauche, wofür zur Bequemlichkeit die nachfolgende Tabelle XIII zusammengestellt wurde.

XIII. Tabelle.

Nach Formel (308) $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ =	Coefficient der Reibung zwischen Erde und Stützwand $\mu = \operatorname{tg} \varrho$, wenn $\mu =$ ist: 0*)	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	$\frac{1}{a}$
Natürliches Böschungsverhältniss: $\operatorname{tg} \alpha = a$ 1·0	0·172	0·165	0·159	0·153	0·148	0·144	0·139	0·135	0·132	0·128	0·125
1·1	0·196	0·188	0·180	0·174	0·168	0·162	0·157	0·152	0·148	0·144	0·144
1·2	0·219	0·210	0·201	0·193	0·187	0·180	0·174	0.169	0·164	0·163	0·163
1·3	0·242	0·231	0·221	0·213	0.205	0·198	0·191	0.185			0·181
1·4	0·265	0·252	0·241	0·231	0·222	0·214	0·207	0·200			0·199
1·5	0·286	0·272	0·260	0·249	0·239	0·230	0·222				0·217
1·6	0·307	0·291	0·278	0·266	0·255	0·246	0·237				0·235
1·7	0·327	0 310	0·295	0·282	0·271	0·260					0·252
1·8	0·346	0·327	0·311	0·298	0·285	0·274					0·269
1·9	0·364	0·344	0·327	0·312	0·299	0·287					0·285
2·0	0·382	0·360	0·342	0·326	0·312						0·300
2·1	0·399	0·376	0·356	0·340	0·325						0·315

$$R = D\mu$$

$$\mathfrak{w} = \frac{w}{\cos\varrho} = w\sqrt{1+\mu^2},$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}H^2,\ D = \tfrac{1}{2}wH^2.$$

Fig. 140.

*) Die Zahlen in dieser Verticalspalte, sind, wie einleuchtet, dieselben, welche schon in der für $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$ entsprechenden Verticalspalte der Tabelle VI (pag. 90) vorkommen.

Diese Tabelle enthält eine Reihe berechneter Resultate von $\frac{w}{g}$ für verschiedene Werthe von a und μ. Von Zehntel zu Zehntel vorschreitend, variiren die Werthe von a zwischen den gewöhnlichen praktischen Grenzen 1 und 2·1, jene von μ aber zwischen $\mu = 0$, wenn somit die Reibung an der Stützwand gleichfalls Null ist, bis $\mu = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$, wo dann diese Reibung ihr Maximum erreicht. Mit Benützung der Tabelle kann man für die jeweilig vorkommenden Werthe von a und μ, nöthigenfalls mittelst Interpolation, zunächst die Grösse des normalen Erddruckes ($D = \frac{1}{2} w H^2$) bestimmen, und hieraus weiter sowohl auf die Grösse des schiefen Erddruckes $\left(\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho}\right)$, als auch auf jene der an der Stützwand entstehenden Reibung ($R = \mu D$) schliessen.

Zur Einführung des hiebei nöthigen Factors $\frac{1}{\cos \varrho}$ für die betreffenden Werthe von μ, einschliesslich des oberen Grenzwerthes $\mu = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$, dient die nächste Tabelle XIV.

XIV. Tabelle.

Für $\mu = \operatorname{tg} \varrho =$

0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
ist $\frac{1}{\cos \varrho} = \sqrt{1 + \mu^2} =$										
1	1·0050	1·0198	1·0440	1·0770	1·1180	1·1662	1·2207	1·2806	1·3454	1·4142

Für $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$ und für $a = \operatorname{tg} \alpha =$

1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0	2·1
ist $\frac{1}{\cos \varrho} = \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} =$										
1·3515	1·3017	1·2616	1·2289	1·2019	1·1792	1·1602	1·1440	1·1300	1·1180	1·1076

Was den in den Tabellen bereits berücksichtigten Grenzfall für die Reibung an der Stützwand betrifft, in welchem dem §. 70 zu Folge $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{a}$ zu setzen ist, so vereinfachen sich die bezüglichen Berechnungsformeln des laufenden §. noch wesentlich.

Man erhält nämlich aus der Gleichung (305):

$$\mathrm{tg}\,(\alpha - \gamma) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + a^2}} = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{1 + a^2}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 45^\circ}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\cos\left(\frac{\alpha + 45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (309),$$

somit, wegen $\gamma = \alpha - (\alpha - \gamma)$, auch:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,(\alpha - \gamma)}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(\alpha - \gamma)} = \frac{a}{1 + \sqrt{2(1 + a^2)}}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (310).$$

Auch ist:

$$\frac{\mathrm{tg}\,(\alpha - \gamma)}{\mathrm{tg}\,\gamma} = \frac{\cos\alpha + \sqrt{2}}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2}} > 1,$$

daher .... $(\alpha - \gamma) > \gamma$ und $\gamma < \frac{\alpha}{2}$.

Die Formel (309) für $\mathrm{tg}\,(\alpha - \gamma)$ ist mit jener unter (162) übereinstimmend, daher kann man hier den Winkel $(\alpha - \gamma)$ eben so construiren, wie dies dort in der Figur 68 rücksichtlich des Winkels γ geschehen ist; selbstverständlich ganz abgesehen von der allgemein giltigen Construction der Bruchböschung, welche im §. 67 (lit. B) erläutert ist.

Weiter ergibt sich in dem betrachteten Grenzfalle aus der Formel (308):

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + a^2}}\right]^2 = \left[\frac{\sin\alpha}{1 + \sqrt{2}\cos\alpha}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 45^\circ}\right]^2$$

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha + 45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right)}\right]^2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2(\alpha - \gamma) \ldots (311),$$

wonach wegen Formel (303) auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\sin\alpha}{[1 + \sqrt{2}\cos\alpha]^2} = \frac{1}{8}\,\frac{\sin\alpha}{\left[\cos\left(\frac{\alpha + 45^\circ}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{45^\circ}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^2(\alpha - \gamma)}{2\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (312).$$

Für $\alpha = 45^\circ$ ist $a = 1$ und $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

$\mathrm{tg}(\alpha - \gamma) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{1}{3}$, $\frac{w}{g} = \frac{1}{8} = 0{\cdot}125$, $\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{1}{8}\sqrt{2} = 0{\cdot}177$.

In diesem speciellen Falle wird der Bruchpunkt E (Fig. 141) gefunden, wenn man die Horizontale $\overline{BI}$ halbirt. Diese Horizontale ist zugleich die Orientirungslinie, somit stellt, wenn $\overline{EI} = \overline{Iq}$ ist, das Dreieck EIq das Profil des Erdprismas vor, dessen Gewicht der Grösse des schiefen Erddruckes $\mathfrak{D}$, der jetzt die Stützwand unter dem Winkel von 45 Graden trifft, gleich kommt.

Fig. 141.

Der normale Erddruck D beträgt hiebei, wegen $w = \frac{1}{8}g$, geradezu den achten Theil von dem hydrostatischen Drucke einer tropfbaren Flüssigkeit, welche eben so schwer wie das Erdreich gedacht wird, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, eine tropfbare Flüssigkeit mit dem Einheitsgewichte $\frac{1}{8}g = 12\frac{1}{2}\%$ von g würde auf die Stützwand eben so stark, wie das Erdreich normal darauf, drücken; welches Ergebniss auch in der Tabelle XIII enthalten ist, indem man dort für $a = 1$ und $\mu = \frac{1}{a} = 1$ ebenfalls den Werth von $\frac{w}{g} = 0{\cdot}125$ eingeschrieben findet.

Der schiefe Erddruck $\mathfrak{D}$ ist jedoch gleich $D\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\,D$, nämlich: $\mathfrak{w} = w\sqrt{2} = 0{\cdot}177\,g$, wonach die tropfbare Flüssigkeit, welche eben so stark drücken würde, $17{\cdot}7\%$ des Erdgewichtes haben müsste. Diese Resultate beziehen sich, wie oben angenommen, auf den Fall, in welchen der Reibungswinkel sowohl für die Reibung zwischen den Erdtheilchen, als auch für jene zwischen diesen und der Stützwand 45 Grade beträgt.

Nach der Tabelle VI (pag. 90) hat man dagegen für den bei keiner Reibung an der Stützwand entstehenden Erddruck, unter sonst gleichen

Verhältnissen ($\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\varepsilon = 0$), anstatt $\frac{w}{g}$ den Werth 0·172 in Rechnung zu nehmen, woraus folgt, dass im Vergleiche zu diesem Drucke wohl der vorberechnete normale Erddruck kleiner ist, indessen der schiefe Erddruck nahezu ebenso gross, eigentlich noch etwas grösser, entfällt. Es tritt also hier die schon auf Seite 312 hervorgehobene Eigenschaft ein, dass bei Berücksichtigung der Reibung an der Stützwand wohl der normale, aber nicht immer auch der schiefe Erddruck kleiner werden muss, dieser vielmehr mitunter grösser werden kann, als der ohne Rücksicht auf jene Reibung berechnete.

§. 73.

Besondere Resultate für den Fall, wenn die Stützwand geneigt, und die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand ebenso gross, wie jene zwischen den Erdtheilchen, in Rechnung zu nehmen ist. Dieser bereits am Schlusse des vorigen §. für eine verticale Stützwand erörterte Fall soll nun auch für eine geneigte Stützwand in Betracht kommen. Derselbe tritt nach den Erklärungen im §. 70 nicht nur bei der factischen Gleichheit der beiderseitigen Reibungscoefficienten, sondern auch dann ein, wenn der Coefficient für die ersterwähnte Reibung denjenigen der anderen Reibung überschreitet, wenn also $\varrho \gtreqq [\beta = (90^0 - \alpha)]$ ist, wo dann anstatt ϱ, beziehungsweise $\operatorname{tg}\varrho = \mu$, in den bezüglichen Formeln jederzeit zu setzen ist:

$$\varrho = \beta = (90^0 - \alpha),\ \mu = \operatorname{tg}\varrho = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Hiernach erhalten die mit a, b und n bezeichneten Abkürzungswerthe (297) folgende Form:

$$a = \operatorname{tg}\alpha \quad\Big|\quad n = \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho) = \operatorname{cotg}(-90^0 + 2\alpha + \varepsilon)$$
$$b = \operatorname{tg}\varepsilon \quad\Big|\quad = -\operatorname{cotg}(90^0 - 2\alpha - \varepsilon) = -\operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon),$$

und es ergeben sich weiter die Relationen:

Nach Formel (298):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \gamma) =$$
$$= \operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon) + \sqrt{[\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon)][\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon)]}$$
$$= \operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon) - \sqrt{[\operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha][\operatorname{tg}(2\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg}\varepsilon]} \quad (313)$$

oder auch:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)=\frac{\sin(2\alpha+\varepsilon)-\sqrt{2\sin(\alpha+\varepsilon)\frac{\sin\alpha}{\cos\varepsilon}}}{\cos(2\alpha+\varepsilon)}\ldots(314).$$

Nach den Formeln (302):

$$\frac{w}{g}=\frac{\cos\alpha\cos\varepsilon}{\cos(2\alpha+\varepsilon)}\left[\sqrt{\operatorname{tg}(2\alpha+\varepsilon)-\operatorname{tg}\varepsilon}-\sqrt{\operatorname{tg}(2\alpha+\varepsilon)-\operatorname{tg}\alpha}\right]^2$$
$$=\left[\frac{\cos\alpha\sqrt{2\sin\alpha}-\sqrt{\cos\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon)}}{\cos(2\alpha+\varepsilon)}\right]^2$$
$$=\left[\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos\alpha\sqrt{2\sin\alpha}+\sqrt{\cos\varepsilon\sin(\alpha+\varepsilon)}}\right]^2\ldots\ldots.(315).$$

Mit Rücksicht auf die Formel (303), worin $\cos\varrho=\sin\alpha$ zu setzen kommt, endlich:

$$\frac{w}{g}=\frac{w}{g}\sin\alpha=\left[\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{2}.\cos\alpha+\sqrt{\sin(\alpha+\varepsilon)\frac{\cos\varepsilon}{\sin\alpha}}}\right]^2\ldots(316).$$

Um derlei Rechnungen ohne Zuhilfenahme von trigonometrischen Tafeln durchzuführen, stalte man den zuletzt gegebenen Ausdruck so um, dass darin blos die unmittelbar bekannten Grössen $\operatorname{tg}\alpha=a$ und $\operatorname{tg}\varepsilon=b$ vorkommen.

Hiernach erhält man:

$$\frac{w}{g}=\left[\frac{\cos\alpha\cos\varepsilon\,(a-b)}{\sqrt{2}.\cos\alpha+\cos\varepsilon\sqrt{\left(\frac{a+b}{a}\right)}}\right]^2$$
$$=\left[\frac{(a-b)\sqrt{a}}{\frac{\sqrt{2a}}{\cos\varepsilon}+\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{a+b}}\right]^2$$
$$=\frac{a(a-b)^2}{[\sqrt{2a(1+b^2)}+\sqrt{(a+b)(1+a^2)}]^2},$$

daher:

$$\frac{w}{g}=a\left[\frac{(a-b)}{\sqrt{(a+b)(1+a^2)}+\sqrt{2a(1+b^2)}}\right]^2$$
$$=a\left[\frac{\sqrt{(a+b)(1+a^2)}-\sqrt{2a(1+b^2)}}{a^2+2ab-1}\right]^2\ldots\ldots(317).$$

Die folgende Tabelle XV enthält eine Reihe berechneter Resultate von $\frac{w}{g}$ für verschiedene Werthe von a und b.

XV. Tabelle.

Nach Formel (347) $\frac{g}{s} =$	tg $\varepsilon = b$, für die innere Neigung der Stützwand:								Anmerkung
	0*)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	
tg $\alpha = a$, für die natürliche Erdböschung: 1·0	0·125	0·101	0·096	0·093	0·089	0·079	0·072	0·061	Oberfläche des Erdreichs horizontal im gleichen Niveau mit der Stützwandkrone. Cohäsion zwischen den Erdtheilchen gleich Null. Reibung zwischen denselben eben so gross, wie jene zwischen ihnen und der Stützwand.
1·1	0·144	0·118	0·113	9·110	0·106	0·095	0·087	0·075	
1·2	0·163	0·135	0·130	0·127	0·123	0·111	0·102	0·090	
1·3	0·181	0·153	0·148	0·144	0·140	0·127	0·118	0·105	
1·4	0·199	0·170	0·165	0·161	0·157	0·144	0·134	0·120	
1·5	0·217	0·188	0·183	0·178	0·174	0·160	0·150	0·135	
1·6	0·235	0·204	0·199	0·195	0·190	0·176	0·165	0·150	
1·7	0·252	0·221	0·215	0·211	0·206	0·192	0·181	0·165	
1·8	0·269	0·237	0·231	0·227	0·222	0·207	0·196	0·180	
1·9	0·285	0·253	0·247	0·243	0·238	0·223	0·211	0·194	
2·0	0·300	0·268	0·262	0·258	0·253	0·238	0·226	0·209	
2·1	0·315	0·283	0·277	0·273	0·268	0·253	0·240	0·223	

*) Die Zahlen in dieser Vertical-Spalte müssen offenbar dieselben sein, welche in der letzten Vertical-Spalte der XIII. Tabelle vorkommen.

Aus der vorstehenden Tabelle erhält man, unter den in der letzten Verticalspalte angegebenen Voraussetzungen, vermittelst der Daten $a = \mathrm{tg}\,\alpha$ und $b = \mathrm{tg}\,\varepsilon$ entweder unmittelbar, oder, wenn nöthig, auf dem Wege der Interpolation den dazu gehörigen Werth für $\frac{w}{g}$, wobei w das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche normal auf die Stützwand denselben Druck (D) wie das Erdreich ausüben würde.

Ist auf diese Weise w bestimmt, so kann hiernach $\mathfrak{w} = \frac{w}{\cos\varrho} = \frac{w}{\sin\alpha} = w\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ berechnet werden, wobei $\mathfrak{w}$ das Einheitsgewicht derjenigen sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit anzeigt, deren Druck auf die Stützwand mit dem schiefen Erddruck ($\mathfrak{D}$) gleich gross wäre. Die erwähnten beiden Druckwerthe ergeben sich dann aus den Gleichungen:

$$D = \tfrac{1}{2}\,w\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon} \text{ und } \mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon}.$$

Hiebei ist der Werth von $\frac{1}{\cos\varepsilon} = \sqrt{1+b^2}$ zu setzen, welcher entweder eigens berechnet, oder auch aus der Tabelle III (pag. 19) entnommen werden kann.

Was endlich den an der Stützwand entstehenden Reibungswiderstand betrifft, so hat man hiefür:

$$R = D\,\mathrm{tg}\,\mu = D\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{D}{a}.$$

Um sogleich die Anwendung dieser Tabelle auf einen besonderen Fall zu zeigen, werde dasjenige Beispiel, welches zuerst auf pag. 91, für $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = 0$, dann auf pag. 332 für $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = \frac{1}{2}$ berechnet worden ist, nunmehr für den grössten zulässigen Werth von $\mu = \mathrm{tg}\,\varrho = \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{a}$ aufgelöset.

Die Daten für dieses Beispiel sind folgende:

Höhe der Stützwand .... $H = 30$ Fuss,

Neigungswinkel dieser letzteren gegen das Loth $= \varepsilon$, und hiefür .... $\mathrm{tg}\,\varepsilon = b = \frac{1}{6}$,

Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der natürlichen Erdböschung .... $\mathrm{tg}\,\alpha = a = 1{\cdot}27$,

Erdgewicht per Cubikfuss .... $g = 85$ Pfd.

Aus der Tabelle XV findet man unter Festhaltung des Werthes von $\operatorname{tg} \varepsilon = b = \frac{1}{6}$:

$$\text{Für } \operatorname{tg} \alpha = a = 1\cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{w}{g} = 0\cdot 111,$$

$$\text{„ } \operatorname{tg} \alpha = a = 1\cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{w}{g} = 0\cdot 127,$$

$$\text{Differenz: } \ldots\ldots 0\cdot 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0\cdot 016,$$

daher, wenn man — da $\operatorname{tg} \alpha = a = 1\cdot 27$ ist — interpolirt:

$$0\cdot 1 : 0\cdot 016 = (1\cdot 3 - 1\cdot 27) : x,$$

woraus folgt:

$$x = 0\cdot 005,$$

und

$$\frac{w}{g} = (0\cdot 127 - x) = 0\cdot 122.$$

Wegen $g = 85$ Pfd. erhält man:

$$w = 0\cdot 122\, g \ldots\ldots = 10\cdot 37 \text{ Pfd.},$$

somit ist, mit Berücksichtigung des Werthes von $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1\cdot 0138$ aus der Tabelle III (pag. 19), der normale Erddruck:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots = 47\cdot 3 \text{ Ctr.},$$

der schiefe Erddruck aber:

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho} = \frac{D}{\sin \alpha} \ldots\ldots = 60\cdot 2 \text{ Ctr.},$$

endlich die Reibung an der Stützwand:

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = D \operatorname{cotg} \alpha = 37\cdot 3 \text{ Ctr.}$$

Hiebei kann man den Werth von $\frac{1}{\sin \alpha}$, falls man ihn nicht directe berechnen will, mit Hilfe der Tabelle XIV durch Interpolation bestimmen.

Es ist interessant, die nach Massgabe des Grades der Reibung zwischen Erde und Stützwand gefundenen dreifachen Resultate in dem sonst gleich gewählten beispielsweisen Falle neben einander zu stellen, was hiemit im Folgenden geschieht:

1. Für $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$:
   $\mathfrak{D} = \ldots\ldots\ldots D = 68\cdot 2,\ R = 0$ Ctr.
2. Für $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \frac{1}{2}$:
   $\mathfrak{D} = 59\cdot 3, \ldots\ldots D = 53\cdot 0,\ R = 26\cdot 5$ Ctr.
3. Für $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{1\cdot 27}$:
   $\mathfrak{D} = 60\cdot 2, \ldots\ldots D = 47\cdot 3,\ R = 37\cdot 3$ Ctr.

§. 74.

Mittelpunkt des Erddruckes. In allen Fällen, auf welche die vorstehenden §§. 71, 72 und 73 Bezug nehmen, liegt der Mittelpunkt des Erddruckes zu Folge der am Schlusse des §. 67 gemachten Bemerkung in dem dritten Theil der Druckhöhe, von der Basis dieser letzteren an gerechnet; so dass hierauf der Umstand, ob und welche Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand in Betracht kommt, von keinem Einflusse ist.

§. 75.

Einfluss einer zufälligen Belastung auf der Oberfläche des hinter der Stützwand aufgeschichteten Erdreiches. Unter den in der Ueberschrift des laufenden Capitels angedeuteten Umständen und unter der Voraussetzung, dass die auf die Quadrateinheit der Oberfläche des Erdreiches entfallende zufällige Belastung p Gewichtseinheiten betrage, kann die im §. 31 unter (115) gegebene Relation und die unmittelbar daran geknüpfte Regel offenbar auch gegenwärtig angewendet werden.

Daher hat man in Gemässheit der dortigen Formeln (123) und (134):

$$D' = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (318)$$

$$R' = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (319)$$

$$\mathfrak{D}' = \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) \mathfrak{D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (320)$$

$$e' = \left(\frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}}\right) e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (321),$$

wenn man unter D' den normalen Erddruck, unter R' die Reibung des Erdreiches an der Stützwand, unter $\mathfrak{D}'$ den schiefen Erddruck, unter e' aber die Distanz des Erddruckmittelpunktes von dem durch den Stützwandfuss gedachten Horizonte — und

zwar mit Rücksicht auf die Wirkung der angenommenen zufälligen Belastung — versteht, während die gleichen Buchstaben ohne Strich die analoge Bedeutung, jedoch ohne Rücksicht auf eine zufällige Belastung haben; d. h. die Werthe von D, R und $\mathfrak{P}$ sind nach den Anleitungen der vorstehenden §§. 71, 72 und 73 zu berechnen, und weiter ist der Abstand $e = \frac{1}{3} H$ zu setzen.

Anmerkung.

Schon in der Anmerkung auf Seite 83 wurde darauf hingewiesen, dass — insoferne es sich um die Durchführung von praktischen Versuchen in der Absicht handelt, die Resultate derselben mit jener der Theorie zu vergleichen, und so die Richtigkeit der letzteren zu prüfen — bei den theoretischen Bestimmungen alle Umstände möglichst genau berücksichtiget werden müssen, daher unter Anderem auch der Einfluss der Reibung zwischen Erde und Stützwand gehörig in Rechnung zu nehmen sei, indem eine solche Reibung doch jedenfalls vorhanden ist.

Bei den von Martony gemachten — obwohl in mancher Beziehung recht schätzenswerthen Versuchen — geschah dies jedoch nicht, indem hiebei die Resultate der Theorie nach Coulomb und Français (welche mit jenen im ersten Capitel des zweiten Abschnittes übereinstimmen) zu Grunde gelegt wurden, worin die oberwähnte Reibung an der Stützwand nicht berücksichtiget erscheint. Zudem wurde das Versuchserdreich stets in einen Kasten eingezwängt, an dessen Seitenwänden ebenfalls eine Reibung entstand, welche Martony nicht in Rechnung nahm.

Hagen's Versuche erscheinen an und für sich zweckmässiger durchgeführt, indem hiebei ein solcher Kasten nicht benützt wurde. Indessen ist die von ihm vorgenommene Vergleichung der bezüglichen Versuchsresultate mit den theoretischen Formeln gleichfalls insoferne unstatthaft, als diese letzteren den Einfluss der besagten Reibung an der Stützwand nicht in sich enthalten. Hiedurch erklärt es sich, dass die von Hagen zunächst in's Auge gefassten Formeln nach Coulomb, Français und Prony (abgesehen von den durch Letzteren aufgestellten, anerkannt unrichtigen Resultaten bezüglich schiefer Stützwände, wovon am Kopfe der Seite 46 die Rede war) den Druck des Hinterfüllungsmateriales jedesmal grösser, als Hagen's Versuche, ergaben; es kann aber daraus nicht gefolgert werden, dass die theoretischen Untersuchungen der genannten Autoren in Bezug auf die von diesen vorgenommene Kräftenzerlegung principiell unrichtig sein müssen. In der Nichtübereinstimmung seiner Versuchsresultate mit den Formeln jener Autoren liegt noch kein Beweis einer solchen Unrichtigkeit; denn diese Formeln

dürfen hiebei gar nicht zur Anwendung kommen, weil sie eben ein wichtiges Element, nämlich den Einfluss der Reibung zwischen dem Hinterfüllungsmateriale und der Stützwand, gar nicht enthalten. Dass dieser Einfluss kein geringfügiger ist, geht aus der Vergleichung der zwei Tabellen VI (pag. 90) und XV (pag. 341) deutlich hervor, indem sich die jeweiligen zwei Resultate für den Druck eines cohäsionslosen Hinterfüllungsmateriales mit horizontaler Oberfläche einmal ohne, und das andere Mal mit Berücksichtigung der Reibung (und zwar der grössten Reibung) an der Stützwand eben so verhalten, wie die Zahlen der einen Tabelle zu jenen der anderen, also (innerhalb der dort eingehaltenen Grenzen für tg α und tg ε) wie 100 zu 65 bis 79. Hagen glaubte dagegen die Nichtübereinstimmung der Formeln der besagten Autoren mit seinen Versuchs-Resultaten nicht dem eben angedeuteten Umstande zuzuschreiben, sondern stellte die Behauptung auf, es seien überhaupt die Kräfte, welche bei der Berechnung des Erddruckes in Betracht kommen, in einer anderen Weise, als dies von den genannten Autoren geschehen, zu zerlegen. Hagen führte in der That eine solche andere Kräftenzerlegung ein, berücksichtigte aber dabei ebenfalls nicht den Einfluss der an der Stützwand entstehenden Reibung, und er fand schliesslich die in der Anmerkung auf Seite 49 bezogene Berechnungs-Formel, welche die Eigenschaft hat, dass man hiernach den normalen Erddruck an die Stützwand bedeutend kleiner findet, als nach den Formeln von Coulomb, Français und Prony. Indem nun nach den letzterwähnten Formeln aus der oben angegebenen Ursache — nämlich wegen Vernachlässigung des Einflusses der Reibung zwischen der Erde und Stützwand — wirklich zu grosse Resultate zum Vorschein kommen müssen, so erklärt es sich, dass die von Hagen nach seiner Theorie entwickelten Rechnungsergebnisse mit den Resultaten seiner Versuche wohl besser übereinstimmen konnten; allein dieserwegen ergibt sich keineswegs — wie Hagen glaubt — die Berechtigung zu dem Schlusse, dass seine Theorie, beziehungsweise die von ihm eingeführte Kräftenzerlegung, die richtigere sein müsse. Dies ist durchaus nicht der Fall. Denn die Art und Weise, wie Hagen die Wirksamkeit der bezüglichen Kräfte sich vorstellt, widerspricht den Lehren der Mechanik über die Keilwirkung, welche letztere doch jedenfalls in erster Linie in Betracht zu kommen hat, weil das Bruchprisma offenbar als ein Keil anzusehen ist, der zwischen dem noch unterhalb gelegenen Erdreiche und der Stützwand eingezwängt liegt*). Hätte Hagen seine Theorie noch durch die Einrechnung der Reibung zwischen Erdreich

---

*) Aus dem Werke Woltmann's „Beiträge zur Hydraulichen Architectur, III. und IV. Band, Göttingen 1794 und 1799"; ist zu ersehen, dass schon Hofrath Kästner bei der Berechnung des Erddruckes ein Ver-

und Stützwand ergänzt, so würde die von ihm wahrgenommene schöne Uebereinstimmung der berechneten mit den experimentellen Resultaten vollends verschwunden sein; denn dann hätte sich offenbar ergeben müssen, dass seine Rechnungswerthe für den Druck des Hinterfüllungsmateriales im Allgemeinen viel zu klein ausfallen. Letzteres hat man schon bei einem früheren Anlasse, nämlich im §. 16, wo von dem Zusammenhange zwischen der Theorie des Erddruckes und der Hydrostatik die Rede ist, wahrgenommen, denn in der Anmerkung zu diesem §. ist nachgewiesen, dass in dem Falle, wenn keine Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den Theilchen des Hinterfüllungsmateriales vorhanden sind, und auch die Reibung an der Stützwand gleich Null gesetzt wird, aus der von Hagen aufgestellten Formel keineswegs, wie zu erwarten, das Resultat für den hydrostatischen Druck, sondern ein kleineres zum Vorschein kommt, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn die Stützwand lothrecht steht, in welchem der im Allgemeinen beobachtete Fehler verschwindet. Es ist daher vollkommen begründet, wenn am Schlusse der bezogenen Anmerkung gesagt wurde, dass die Ansicht Hagen's, als wäre die Richtigkeit seiner Theorie durch seine Versuche bestätiget worden, auf einer Täuschung beruhe; denn die nach Hagen's Theorie sich ergebenden Rechnungsresultate für den normalen Erddruck sind einerseits wegen der hierin unrichtigen Kräftenzerlegung zu klein, andererseits aber wegen der Nichtberücksichtigung der an der Stützwand entstehenden Reibung zu gross; und da die beiderseitigen Differenzen sich mehr oder weniger aufheben müssen, so ist eine annähernde Uebereinstimmung von Hagen's Theorie mit manchen Versuchen durchaus nicht ausgeschlossen, aus einer solchen zufälligen Uebereinstimmung aber kann ein allgemeiner Rückschluss auf die Statthaftigkeit der erwähnten Theorie nicht gemacht werden, und zwar um so weniger, als Hagen seine Versuche, bei welchen Druckhöhen von nur wenigen Zollen vorkamen, in einem für die praktische Verwerthung derselben viel zu kleinen Masstabe angestellt hatte.

Will man eine nutzbringende Vergleichung von Experimenten mit den theoretischen Formeln zu dem Zwecke, um die Richtigkeit der letzteren zu

---

fahren befolgte, mit dem jenes von Hagen grundsätzlich übereinstimmt. Woltmann konnte sich jedoch damit nicht befreunden; überdiess findet man in dem IV. Bande seines Werkes pag. 307 — 310 den Auszug eines Briefes, welchen der Mathematikus C. L. Brünings unterm 19. December 1798 an Woltmann schrieb, mitgetheilt, aus dem hervorgeht, dass auch Brünings sich gegen Kästner's Verfahren aussprach, das er für nichts weniger, als einen Verstoss gegen die ganze Mathematik von Archimedes bis de la Grange erklärte.

prüfen, durchführen, so ist nothwendig, dass solche Experimente in einem ausreichend grossen Massstabe stattfinden, und dass in den theoretischen Formeln auch auf die Reibung zwischen dem Hinterfüllungsmateriale und der Stützwand, eventuell auf die Mitwirkung der Erdcohäsion und der Reibung an den Seitenwänden des Versuchskastens die gehörige Rücksicht genommen werde. Insoferne die Versuche mit Streusand, Schrotkörnern, Schotter oder cohäsionslosem Sande gemacht werden, also keine Cohäsion zwischen den Theilchen des Hinterfüllungsmateriales in Betracht kommt, werden es die in dem letztbehandelten Capitel aufgestellten Berechnungsformeln sein, welche behufs der Vergleichung mit den Versuchsergebnissen zu benützen sind, vorausgesetzt, dass man für den Fall der Verwendung eines Kastens zu den Versuchen noch ausserdem die Reibung an den Seitenwänden desselben entsprechend in Rechnung nimmt.

Die Versuche des Professors Dr. E. Winkler, welche im Civilingenieur vom Jahre 1865 beschrieben sind, entsprechen so ziemlich diesen Bedingungen. Er hat hiezu cohäsionslosen Sand unter einer Druckhöhe von 25 Centimetern verwendet, die Reibung an den Seitenwänden des Versuchskastens in einer angemessenen Weise berücksichtiget, und im Uebrigen für den normalen Erddruck und die Reibung an der Stützwand — bei lothrechter Stellung dieser Letzteren und bei horizontaler Begrenzung der Oberfläche des dahinter aufgeschütteten Materiales — geeignete Formeln (welche mit der im vorstehenden Capitel enthaltenen Theorie im Einklange sind) zur Anwendung gebracht.

Zugleich hat er den Vergleich seiner Versuchsresultate auch mit den bekannten Formeln nach Prony und Français (ohne Rücksicht auf die Reibung an der Stützwand) und mit der Theorie nach Hagen durchgeführt. Wie zu erwarten, ergaben gegenüber der Wirklichkeit nur die Rechnungsresultate, worin die Reibung an der Stützwand mitberücksichtiget war, relativ die beste Uebereinstimmung, während jene nach Hagen's Theorie sogar noch weiter von der Wahrheit (obwohl im entgegengesetzten Sinne) abwichen, als die Resultate nach Prony und Français.

Allein nicht nur relativ betrachtet, sondern auch an und für sich kann jene Uebereinstimmung, wenigstens in Bezug auf den normalen Erddruck, als eine befriedigende erklärt werden, indem die Differenzen zwischen der Rechnung und den Versuchen sich durchschnittlich nur mit 2·2 Percenten herausstellten.

Weniger gut stimmten zwar die verglichenen Resultate für die Reibungsgrösse an der Stützwand; indessen müssen wohl noch weitere Versuche ähnlicher Art abgewartet werden, um sich auch in dieser Beziehung ein massgebendes Urtheil bilden zu können.

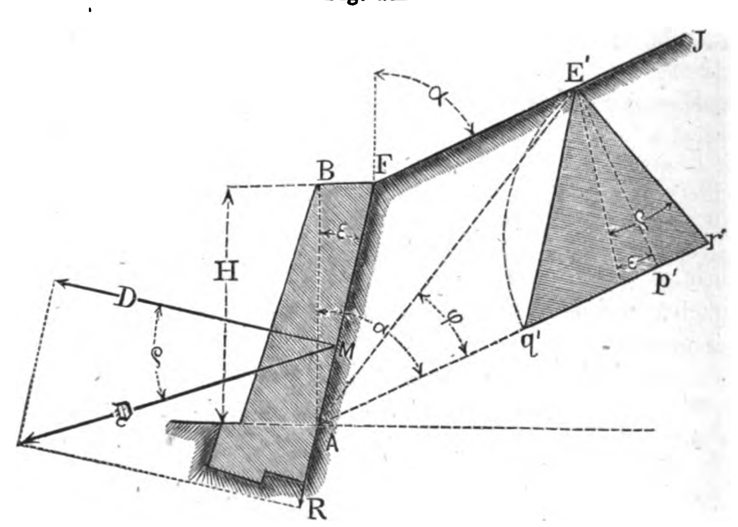
Drittes Capitel.

Druck eines cohäsionslosen Erdreiches an eine um den Winkel ε geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn dasselbe von der Wandkrone an nach der natürlichen Böschung ansteigt.

§. 76.

B r u c h f l ä c h e i m E r d k ö r p e r. G r ö s s e d e s E r d- d r u c k e s u n d M i t t e l p u n k t d e s s e l b e n i n d i e s e m F a l l e. Schon aus der Figur 91, welche sich auf die analoge Untersuchung, jedoch ohne Rücksicht auf die Reibung zwischen Erdreich und Stützwand bezieht, ergibt sich, dass in dem Constructionsvierecke $AFE'r'$ die beiden Dreiecke AFE' und $AE'r'$ nicht einander gleich werden können, insolange φ einen von Null verschiedenen Werth hat. In dem gegenwärtigen Falle, in welchem auf die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stütz-

Fig. 142.



wand Bedacht genommen werden soll, kommt die Linie $\overline{F'r'}$ näher an das Perpendikel $\overline{E'p'}$, in der Regel sogar jenseits dieses

letzteren zu liegen, wie es beispielsweise in der Figur 142 angedeutet ist, daher kann die Gleichheit der beiden Dreiecke AFE' und $AE'r'$ um so weniger stattfinden, wenn φ nicht Null ist. Hieraus geht hervor, dass auch jetzt der Bruchwinkel $\varphi = \gamma = 0$ sein muss.

Was die Grösse des Erddruckes betrifft, so hat hierauf für die Durchführung der bezüglichen grafischen Darstellung die Richtung der Bruchlinie keinen Einfluss, was aus den Bemerkungen auf pag. 314 erhellet.

Zu diesem Zwecke kann daher auch die Linie AE' als Bruchlinie gelten, und hiernach die Construction für die Grösse des schiefen Erddruckes $\mathfrak{D}$ nach der unter (289) gegebenen zweiten Hauptregel stattfinden, der zu Folge anzuordnen ist:

$$\overline{E'p'} \perp \overline{Ap'},\ \measuredangle p'E'r' = (\varrho - \varepsilon) \text{ und } \overline{q'r'} = \overline{E'r'},$$

um zu erhalten:

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{matrix} \text{Gewicht des Erd-} \\ \text{prismas } E'q'r' \end{matrix} \right\} = g \cdot \triangle E'q'r'.$$

Uebersetzt man diese Construction in die Rechnung, so findet man:

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2} g \cdot \overline{q'r'} . \overline{E'p'} = \tfrac{1}{2} g . \overline{E'r'} . \overline{E'p'} = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{\overline{E'p'}^2}{\cos(\varrho - \varepsilon)}$$

$$= \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{\overline{AF}^2 \sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\varrho - \varepsilon)} = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cos(\varrho - \varepsilon)}$$

$$= \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos(\varrho - \varepsilon)} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \dots\dots\dots\dots (322)$$

worin $\mathfrak{w}$ das Gewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche den gleichen Druck ausüben würde, und insbesondere

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos(\varrho - \varepsilon)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (323)$$

zu setzen ist.

Der normale Erddruck ist daher:

$$D = \mathfrak{D} \cos \varrho = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\cos \varrho \sin^2(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cos(\varrho - \varepsilon)}$$

$$= \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (324)$$

und die den gleichen Druck bewirkende tropfbare Flüssigkeit hat das Einheitsgewicht w, welches sich ergibt aus der Formel:

$$\frac{w}{g} = \frac{\mathfrak{w}}{g} \cos \varrho = \frac{\cos \varrho \sin^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos (\varrho - \varepsilon)} \ldots\ldots\ldots\ldots (325)$$

der Reibungswiderstand an der Stützwand endlich ist:

$$R = \mathfrak{D} \sin \varrho = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin \varrho \sin^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cos (\varrho - \varepsilon)} \ldots\ldots\ldots (326).$$

Für $\varepsilon = 0$ steht die Stützwand vertical, und es wird insbesondere:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (327)$$

$$\frac{w}{g} = \sin^2 \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (328)$$

$$R = \tfrac{1}{2} g H^2 \operatorname{tg} \varrho \sin^2 \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (329),$$

wobei bemerkenswerth ist, dass jetzt die Gleichung (328) mit der früheren unter (146) identisch wird. *Der berechnete normale Erddruck ist also in diesem Falle ausnahmsweise der gleiche, ob man hiebei auf die Reibung an der Stützwand Rücksicht nimmt oder nicht, überhaupt ist derselbe von dieser Reibung völlig unabhängig*, weshalb zu einer solchen Berechnung die Zahlenwerthe in der Tabelle IX (pag. 144) für $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$ ohne weiters verwendbar sind.

Ueberhaupt lässt sich dermalen die bezogene Tabelle und die ihr zu Grunde liegende Formel (144, beziehungsweise 145) auch für andere Werthe von $\operatorname{tg} \varepsilon$ benützen, wenn man Folgendes beachtet:

Nennt man

den normalen Erddruck ohne Rücksicht auf die Reibung an der Stützwand, also für $\varrho = 0$, ... D_0

jenen mit Rücksicht auf diese Reibung .... D_ϱ

und bezeichnet man die hiemit correspondirenden Werthe für w mit .... w_0 und w_ϱ,

so hat man offenbar:

$$D_\varrho : D_0 = w_\varrho : w_0,$$

oder:

$$D_\varrho = \frac{w_\varrho}{w_0} D_0 \ldots \qquad (330),$$

wobei einerseits laut Formel (144):

$$w_0 = g \frac{\sin^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon}$$

und andererseits laut Formel (325):

$$w_\varrho = g \frac{\cos \varrho \sin^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos (\varrho - \varepsilon)}$$

ist.

Hiernach ergibt als Verhältniss:

$$\frac{w_\varrho}{w_0} = \frac{\cos \varrho \cos \varepsilon}{\cos (\varrho - \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \varepsilon} \ldots \qquad (331)$$

also auch:

$$D_\varrho = \frac{D_0}{1 + \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \varepsilon} \ldots \qquad (332),$$

so zwar, dass, wenn man D_0 mit Hilfe der Tabelle IX berechnet hat, das Resultat nur durch $(1 + \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \varepsilon)$ zu dividiren ist, um den jetzt in Betracht kommenden normalen Erddruck D_ϱ zu finden, woraus dann weiter auch auf den schiefen Erddruck und auf die Reibung an der Stützwand geschlossen werden kann.

Der Mittelpunkt des Erddruckes liegt dem §. 69 zu Folge in dem dritten Theile der Höhe.

Ex. Es werde der Erddruck mit Rücksicht auf die an der Stützwand entstehende Reibung berechnet, wenn, wie in dem Beispiele auf Seite 145, folgende Daten bekannt sind:

Höhe der Stützmauer ..... $H = 30$ Fuss,
Verhältniss zwischen der Anlage und Höhe der inneren Mauerböschung ..... $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{6}$,
Erdgewicht per Cubikfuss ..... $g = 85$ Pfd.,
Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der natürlichen Erdböschung ..... $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 27$,
Ausserdem sei der Coefficient der Reibung zwischen Erde und Stützwand ..... $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0 \cdot 6$.

Nach der Bestimmung auf Seite 145 hat man, da der dortige Werth von D jetzt mit D_0 zu bezeichnen ist:

$$D_0 = 180 \cdot 7 \text{ Ctr.},$$

also, wegen $(1 + \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \varepsilon) = 1 \cdot 1$, nach der Formel (332):

$$D_\varrho = 164 \cdot 3 \text{ Ctr.}$$

Ferner erhält man (unter Beachtung der Tabelle XIV) für den schiefen Erddruck:

$$\mathfrak{D} = \frac{D_\rho}{\cos \varrho} = D_\rho \sqrt{1 + \mu^2} = 1{\cdot}1662\, D_\rho = 191{\cdot}6 \text{ Ctr.},$$

für die Reibung an der Stützmauer aber:

$$R = D_\rho \operatorname{tg} \varrho = \mu D_\rho = 0{\cdot}6\, D_\rho \ldots\ldots\ldots = \;\; 98{\cdot}6 \text{ Ctr.}$$

§. 77.

Erddruck bei dem Stattfinden des Maximums der Reibung zwischen Erdreich und Stützwand. In diesem Falle ist laut §. 70 der Reibungswinkel $\varrho = 90^0 - \alpha$, somit $\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha$, und man erhält, bezüglich des normalen Erddruckes D, zu Folge der Formel (325) das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit von der gleichen Druckwirkung aus der Relation:

$$\frac{w}{g} = \frac{\sin \alpha \sin^2 (\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \sin (\alpha + \varepsilon)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon)^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varepsilon)}$$

$$= \frac{a (a - b)^2}{(1 + a^2)(a + b)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (333),$$

wenn $\operatorname{tg} \alpha = a$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = b$ ist.

Die entsprechenden Werthe ergeben sich somit, wenn man die analogen Resultate in der IX. Tabelle mit $\frac{a}{a + b}$ multiplicirt, welche Bemerkung übrigens auch aus der Gleichung (332) folgt.

Viertes Capitel.

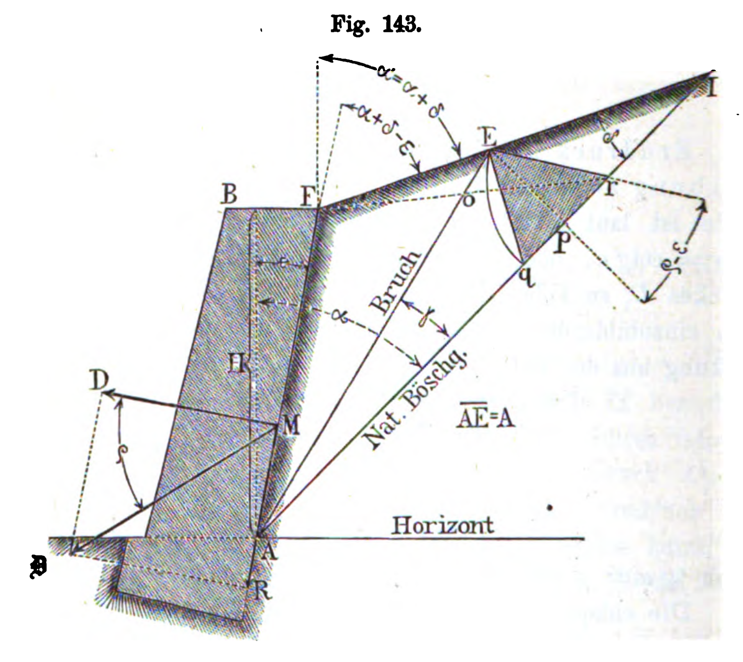
Erddruck an eine um den Winkel ε geneigte Stützwand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich, von der Wandkrone an, nach einer beliebigen Richtung ansteigt, welche mit der natürlichen Böschung der Winkel δ einschliesst.

§. 78.

Rechnungsmässige Behandlung des in der Ueberschrift bezeichneten Falles. Dieser in der Figur 143 ver-

zeichnete Fall ist derselbe, welcher auch im vierten Capitel des ersten Abschnittes mit Bezug auf die Figur 75 untersucht wurde, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt die dort vernachlässigte

Fig. 143.



Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand in Rechnung zu kommen hat. $\overline{AE}$ ist die auf Grundlage der Hauptregel (288) und der darauf Bezug nehmenden Construction (§. 67, lit. B.) ausgemittelte Bruchlinie, wonach $\triangle AFE = \triangle AFr$, mithin $\overline{Fo} = \overline{or}$ werden muss, und der schiefe Erddruck 𝔇 wird der zweiten Hauptregel (289) zu Folge durch das Gewicht des Erdprismas $\overline{Eqr}$ (wobei $\overline{qr} = \overline{Er}$ ist) dargestellt.

Verfolgt man diese Eigenschaften auf den Weg der Rechnung, so findet man:

$$\overline{AF} = \overline{AE} \cdot \frac{\sin \measuredangle AEF}{\sin \measuredangle AFE} = A \frac{\sin (\gamma + \delta)}{\sin (\alpha + \delta - \varepsilon)}$$

$$\triangle AFE = \tfrac{1}{2} \overline{AF} \cdot \overline{AE} \cdot \sin (\alpha - \varepsilon - \gamma)$$

$$= \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin (\alpha - \varepsilon - \gamma) \sin (\gamma + \delta)}{\sin (\alpha + \delta - \varepsilon)}.$$

Weiter ist nach Gleichung (288):

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2}\,\overline{AE}\,.\,\overline{Ar}\,.\sin\gamma = \tfrac{1}{2}\,A^2\,\frac{\sin\gamma\cos(\gamma+\varepsilon-\varrho)}{\cos(\varepsilon-\varrho)},$$

folglich, da die erwähnten Dreiecke gleich gross sind, die Bedingungsgleichung vorhanden:

$$\sin(\alpha-\varepsilon-\gamma)\sin(\gamma+\delta)\cos(\varepsilon-\varrho)$$
$$=\sin\gamma\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)\cos(\gamma+\varepsilon-\varrho),$$

woraus der Bruchwinkel γ zu bestimmen ist.

Setzt man:

$$(\alpha-\varrho)=\alpha_1 \text{ und } (\varepsilon-\varrho)=\varepsilon_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (334),$$

so erhält man die umgestaltete Bedingungsgleichung:

$$\sin(\alpha_1-\varepsilon_1-\gamma)\sin(\gamma+\delta)\cos\varepsilon_1$$
$$=\sin\gamma\sin(\alpha_1+\delta-\varepsilon_1)\cos(\gamma+\varepsilon_1),$$

welche sich von jener auf Seite 201 (zur Figur 92 gehörig) nur dadurch unterscheidet, dass hier die Buchstaben α und ε mit dem Zeiger 1 behaftet sind, was dort nicht der Fall ist. Dieser Wahrnehmung gemäss muss daher das Resultat für $x = \operatorname{tg}\gamma$, welches aus der jetzigen Bedingungsgleichung folgt, die Gestalt der Gleichung (169) annehmen; es muss nämlich sein:

$$\left.\begin{aligned} x = \operatorname{tg}\gamma &= \frac{-bc+\sqrt{bc(a+b)(c-a)}}{(c-a-b)} \\ &= \frac{\sqrt{bc}}{(c-a-b)}\left[-\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b)(c-a)}\right] \end{aligned}\right\} (335),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} a &= \operatorname{tg}(\alpha_1-\varepsilon_1) = \operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon) \ldots\ldots\ldots \\ b &= \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha'-\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c &= \operatorname{cotg}\varepsilon_1 = \operatorname{cotg}(\varepsilon-\varrho) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (336).$$

Auf die Gleichung für den schiefen Erddruck übergehend, so hat man nach der Gleichung (289), beziehungsweise (287):

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\,g\,A^2\,\frac{\sin^2\gamma}{\cos(\varepsilon-\varrho)},$$

daher wegen:

$$A = \frac{H}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\sin(\alpha+\delta-\varepsilon)}{\sin(\gamma+\delta)}$$

auch:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\sin^2(\alpha + \delta - \varepsilon)\sin^2\gamma}{\sin^2(\gamma + \delta)\cos^2\varepsilon\cos(\varepsilon - \varrho)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}\frac{H^2}{\cos\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (337).$$

Der normale Erddruck ist hiernach:

$$D = \mathfrak{P}\cos\varrho$$

$$= \tfrac{1}{2} g H^2 \frac{\cos\varrho\sin^2(\alpha + \delta - \varepsilon)\sin^2\gamma}{\sin^2(\gamma + \delta)\cos^2\varepsilon\cos(\varepsilon - \varrho)}$$

$$= \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (338),$$

wenn in:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{1}{\cos\varepsilon\cos(\varepsilon - \varrho)}\left[\frac{\sin(\alpha + \delta - \varepsilon)\sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)}\right]^2 \quad \ldots\ldots (339)$$

und in:

$$\frac{w}{g} = \frac{\cos\varrho}{\cos\varepsilon\cos(\varepsilon - \varrho)}\left[\frac{\sin(\alpha + \delta - \varepsilon)\sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)}\right]^2 \quad \ldots\ldots (340)$$

$\mathfrak{w}$ und $w = \mathfrak{w}\cos\varrho$ das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeiten bedeuten, welche den gleichen Druck $\mathfrak{P}$ und beziehungsweise D ausüben würden.

Der Ausdruck (340) kann mit Rücksicht auf die eingeführten Bezeichnungen a, b und c umgestaltet werden, wie folgt:

$$\cos\varepsilon = \cos(\varepsilon - \varrho + \varrho) = \sin(\varepsilon - \varrho)\cos\varrho\,[\operatorname{cotg}(\varepsilon - \varrho) - \operatorname{tg}\varrho]$$

$$= \sin(\varepsilon - \varrho)\cos\varrho\,[c - \mu],$$

wenn — wie in den früheren Fällen — auch jetzt $\operatorname{tg}\varrho = \mu$ ist.

$$\frac{\cos\varrho}{\cos\varepsilon\cos(\varepsilon - \varrho)} = \frac{1}{(c - \mu)\sin(\varepsilon - \varrho)\cos(\varepsilon - \varrho)}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{cotg}^2(\varepsilon - \varrho)}{(c - \mu)\operatorname{cotg}(\varepsilon - \varrho)}$$

$$= \frac{1 + c^2}{c(c - \mu)}.$$

$$\sin^2(\alpha + \delta - \varepsilon) = \cos^2(\alpha - \varepsilon)\cos^2\delta\,[\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) + \operatorname{tg}\delta]^2,$$

$$= \frac{\cos^2\delta}{(1 + a^2)}(a + b)^2,$$

$$\left[\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \delta)}\right]^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\cos^2\delta(\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\gamma)^2} = \frac{1}{\cos^2\delta}\left(\frac{x}{b + x}\right)^2;$$

also:

$$\frac{w}{g} = \frac{(a+b)^2(1+c^2)}{c(c-\mu)(1+a^2)}\left(\frac{x}{b+x}\right)^2.$$

Nun ist aber:

$$b + x = \frac{\sqrt{b(a+b)}}{c-a-b}\left[\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}\right],$$

$$\left(\frac{x}{b+x}\right)^2 = \frac{c}{(a+b)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}}\right]^2,$$

somit endlich:

$$\frac{w}{g} = \frac{(a+b)(1+c^2)}{(c-\mu)(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)(c-a)} - \sqrt{bc}}{\sqrt{c(c-a)} - \sqrt{b(a+b)}}\right]^2 \quad (341),$$

und:

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{\cos\varrho}\frac{w}{g} = \frac{w}{g}\sqrt{1+\mu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (342).$$

Der Ausdruck (341) unterscheidet sich der Form nach von jenem unter (170) nur dadurch, dass dermalen als erster Factor im Nenner $(c - \mu)$ anstatt, wie dort, c steht.

In der obigen Gleichung ist, wie bereits früher angedeutet, zu setzen:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon),\ b = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)$$
$$c = \operatorname{cotg}(\varepsilon - \varrho) \text{ und } \mu = \operatorname{tg}\varrho.$$

Für $\mu = 0$ werden die Gleichungen (170), (341) und (342) identisch, was erklärlich ist, weil in der erstgenannten gleich von vorne herein $\mu = 0$ angenommen ward.

Die Resultate (335), (341) und (342) können ohne Benützung trigonometrischer Tafeln berechnet werden, wenn — wie in der Regel — gegeben sind:

$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha'$, $\operatorname{tg}\varepsilon$ und $\mu = \operatorname{tg}\varrho$, denn dann hat man:

$$a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \ldots\ldots\ldots = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\varepsilon}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}$$

$$b = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}$$

$$c = \operatorname{cotg}(\varepsilon - \varrho) \ldots\ldots = \frac{1 + \mu\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\mu}$$

Ex. Es stehe dasselbe Beispiel in Betracht, welches auf den Seiten 172 und 173 ohne Rücksicht auf die Reibung an der Stützwand, also für $\mu = 0$,

berechnet wurde; und zwar sei jetzt der Coefficient dieser Reibung nach §. 70 mit seinem Maximalwerthe ($\mu = \text{tg}\,\varrho = \text{cotg}\,\alpha$) in Rechnung zu nehmen. Hiernach hat man folgende Daten:
$\text{tg}\,\alpha = 1\cdot2$, $\text{tg}\,\alpha' = 4\frac{1}{4}$, $\text{tg}\,\varepsilon = \frac{1}{4}$, $H = 30$ Fuss und $g = 75$ Pfd., daher:
$a = \frac{19}{26}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = -\frac{29}{14}$ und $\mu = \text{cotg}\,\alpha = \frac{5}{6}$.

Mit diesen Daten findet man:

$$x = \text{tg}\,\gamma = 0\cdot2587 \;\; (\gamma = 14^\circ\, 30'),$$

$\frac{w}{g} = 0\cdot101$, $\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{0\cdot101}{\cos\varrho} = 0\cdot131$, $w = 0\cdot101\,g = 7\cdot57$ und $\mathfrak{w} = 0\cdot131\,g = 9\cdot82$ Pfd., somit:

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}\,\frac{H^2}{\cos\varepsilon} = 45\cdot6 \text{ Ctr.},$$
$$D = \mathfrak{D}\cos\varrho \;\; = 35\cdot0 \;\;\text{„}$$
$$R = D\,\text{tg}\,\varrho \;\; = 29\cdot2 \;\;\text{„}$$

wenn man die Reibung R an der Stützwand ebenfalls aufsucht, und überhaupt beachtet, dass (nach Tabelle XIV, pag. 336) $\cos\varrho = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} = 0\cdot768$, $\frac{1}{\cos\varrho} = \sqrt{1+\mu^2} = 1\cdot302$, und (nach Tabelle III, pag. 19) $\frac{1}{\cos\varepsilon} = 1\cdot031$ zu setzen ist.

In der Figur 138 (pag. 325) hat man die gleiche Aufgabe grafisch aufgelöset. Die Vergleichung der dortigen Resultate mit den jetzigen zeigt eine gute Uebereinstimmung*).

§. 79.

Besonderer Fall, wenn die Stützwand lothrecht steht. Dann ist in den Formeln des vorigen §. $\varepsilon = 0$ zu setzen, wodurch man erhält:

---

*) Insoferne, wie in dem gegebenen Beispiele, der Werth von c negativ, etwa $c = -\mathfrak{c}$ wird, wobei jetzt $\mathfrak{c}$ eine positive Zahl bedeutet, kann man, um diese letztere unmittelbar in Rechnung zu nehmen, die Formeln (335) und (341) auch so schreiben:

$$x = \text{tg}\,\gamma = \frac{-b\,\mathfrak{c} + \sqrt{b\,\mathfrak{c}\,(a+b)\,(a+\mathfrak{c})}}{a+b+\mathfrak{c}}$$
$$= \frac{\sqrt{b\,\mathfrak{c}}}{a+b+\mathfrak{c}}\left[-\sqrt{b\,\mathfrak{c}} + \sqrt{(a+b)\,(a+\mathfrak{c})}\right]$$
$$\frac{w}{g} = \frac{(a+b)\,(1+\mathfrak{c}^2)}{(\mathfrak{c}+\mu)\,(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{(a+b)\,(a+\mathfrak{c})} - \sqrt{b\,\mathfrak{c}}}{\sqrt{\mathfrak{c}\,(a+\mathfrak{c})} \qquad + \sqrt{b\,(a+b)}}\right]^2.$$

$a = \operatorname{tg} \alpha$, $b = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha)$, $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ und $c = -\operatorname{cotg} \varrho = -\frac{1}{\mu}$, und hiernach:

$$x = \operatorname{tg} \gamma = \frac{-b + \sqrt{b(a+b)(1+a\mu)}}{1+(a+b)\mu}$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{1+(a+b)\mu}\left[-\sqrt{b} + \sqrt{(a+b)(1+a\mu)}\right] \quad (343),$$

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{a+b}{1+a^2}\right)\left[\frac{\sqrt{(a+b)(1+a\mu)} - \sqrt{b}}{\sqrt{1+a\mu} + \mu\sqrt{b(a+b)}}\right]^2 \ldots \quad (344).$$

Für $\mu = 0$ gehen diese Gleichungen, wie es sein soll, in jene unter (156) und (159) über.

Für die grösste Reibung an der Stützwand, welche möglicher Weise in Betracht kommen könnte, ist laut §. 70 der Reibungs-Coefficient $\mu = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$ zu setzen. In diesem Falle findet man:

$$x = \operatorname{tg} \gamma = a\left(\frac{-b + \sqrt{2b(a+b)}}{2a+b}\right)$$

$$= \frac{a\sqrt{b}}{2a+b}\left[-\sqrt{b} + \sqrt{2(a+b)}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (345),$$

$$\frac{w}{g} = \frac{a^2(a+b)}{(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{2(a+b)} - \sqrt{b}}{a\sqrt{2} + \sqrt{b(a+b)}}\right]^2 \ldots\ldots \quad (346),$$

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{1}{\sin \alpha}\, w = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,\frac{w}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (347).$$

Ex. Nimmt man hier das auf Seite 154 begonnene und auf Seite 156 fortgesetzte Beispiel (dort ohne Berücksichtigung der Reibung an der Stützwand) in der Absicht auf, um den Bruchwinkel und die Grösse des Erddruckes nunmehr, wenn der Coefficient für die erwähnte Reibung mit dem Maximalwerthe von $\mu = \operatorname{cotg} \alpha$ in Rechnung genommen wird, zu bestimmen, so hat man zu setzen; $a = \operatorname{tg} \alpha = 1{\cdot}2$, $b = \operatorname{tg} \delta = 0{\cdot}5$, $\mu = \frac{1}{a} = \frac{5}{6}$, $g = 75$ Pfd. und $H = 30$ Fuss.

Hiernach ergibt sich:

$$x = \operatorname{tg} \gamma = \frac{6}{145}(\sqrt{170} - 5) = 0{\cdot}333,$$

$$\gamma = 18^\circ\, 49',$$

$$\frac{w}{g} = \frac{1224}{305}\left(\frac{\sqrt{170} - 5}{\sqrt{170} + 14}\right)^2 = \frac{1224}{2989}(13 \cdot 5 - \sqrt{170}) = 0 \cdot 189,$$

$$w = 0 \cdot 189\, g = 14 \cdot 2 \text{ Pfd.};$$

somit der normale Erddruck an die Stützwand:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w H^2 = 63 \cdot 9 \text{ Ctr.},$$

und, wegen $\frac{1}{\cos \varrho} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} = \frac{1}{6}\sqrt{61} = 1 \cdot 302$ der schiefe Erddruck:

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\cos \varrho} = 1 \cdot 302\, D = 83 \cdot 2 \text{ Ctr.},$$

endlich die Reibung an der Stützwand:

$$R = \mu D = \tfrac{5}{6} D = 53 \cdot 3 \text{ Ctr.}$$

Vergleicht man diese Resultate mit jenen auf den Seiten 154 und 156, so gibt sich der Einfluss der Reibung an der Stützwand dadurch kund, dass in Folge dessen der Bruchwinkel kleiner, also das Bruchprisma grösser wird, und der normale Erddruck sich nur mit 76% von dem ohne jene Reibungsberücksichtigung entzifferten herausstellt, während dieser letztere mit dem jetzigen schiefen Erddruck nahezu dieselbe Grösse hat.

Zur Vereinfachung derartiger Rechnungen dient die jenseits folgende Tabelle Nr. XVI, welche, wie die dazu gehörige Figur 144 zeigt, sich auf den Fall bezieht, wenn die Stützwand lothrecht steht, die Oberfläche des dahinter liegenden Erdreiches von einer Ebene, die mit der natürlichen Böschung den Winkel δ einschliesst, begrenzt, und die Reibung zwischen der Stützwand und den Erdtheilchen ein Maximum, also eben so gross, ist, wie jene zwischen diesen letzteren, während eine Cohäsion zwischen ihnen nicht in Betracht kommt.

So würde man in dem vorhergehenden Beispiele für $a = 1 \cdot 2$ und $b = 0 \cdot 5$ den entsprechenden Werth von $\frac{w}{g} = 0 \cdot 189$ unmittelbar aus der Tabelle entnehmen, und darauf gestützt die weitere Rechnung durchführen.

Finden sich die gegebenen Werthe für a und b nicht genau in der Tabelle vor, so muss man zur Erreichung des Resultates für $\frac{w}{g}$ das bekannte Interpolationsverfahren anwenden.

XVI. Tabelle.

Natürliches Böschungsverhältniss $\operatorname{tg}\alpha = a$ — $\frac{w}{g} =$	Werthe für $\operatorname{tg}\delta = b$: 0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
1·0	0·500	0·246	0·201	0·177	0·162	0 152	0·144	0·138	0·132	0·128	0·125
1·1	0.548	0·276	0·227	0·200	0·183	0·171	0·162	0·154	0·149	0·144	
1·2	0·590	0·305	0·251	0 221	0·203	0 189	0·179	0·171	0·164		
1·3	0·628	0·331	0 273	0·242	0·221	0·206	0·195	0·186			
1·4	0·662	0·355	0·294	0·261	0·238	0·222	0·210	0·201			
1·5	0 692	0·378	0·314	0·278	0·255	0·238	0·224				
1·6	0·719	0·399	0·332	0·295	0·270	0·252	0·238				
1·7	0·743	0·418	0·349	0·310	0·284	0·265					
1·8	0·764	0·436	0·365	0·325	0·297	0·277					
1·9	0·783	0·452	0·379	0·338	0·310	0·289					
2·0	0·800	0·467	0·393	0·351	0·322	0·300					
2·1	0·815	0·481	0·306	0·362	0·333						

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} D$$

$$R = \frac{D}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{D}{a}$$

Fig. 144.

$$\frac{w}{g} = \frac{a^2(a+b)}{(1+a^2)}\left[\frac{\sqrt{2(a+b)} - \sqrt{b}}{a\sqrt{2} \qquad + \sqrt{b(a+b)}}\right]^2$$

Vergleicht man die Zahlen dieser Tabelle mit jenen der X. Tabelle auf pag. 157, so ergibt sich der jeweilige Unterschied zwischen den Resultaten des normalen Erddruckes, wenn dieser einmal mit Berücksichtigung der grössten an der Stützwand entstehenden Reibung, und das anderemal ohne Rücksicht auf eine jede solche Reibung beziffert wird. Für $b = 0$, wenn also von der Wandkrone angefangen das Erdreich nach der natürlichen Böschung fortansteigt, ist in der angedeuteten Beziehung kein Unterschied vorhanden, was mit dem Ergebnisse der Gleichung (328) und der daran geknüpften Bemerkung geradezu übereinstimmt; sonst aber besteht ein solcher Unterschied, indem der mit Rücksicht auf die erwähnte Maximalreibung resultirende normale Erddruck mitunter bis um 28% kleiner wird, als der nach der X. Tabelle berechnete.

§. 80.

Besondere Fälle in Bezug auf die Richtung der Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales. In dieser Beziehung gilt im Allgemeinen dasselbe, was schon im Eingange des §. 42, so wie im §. 44 (Punkt 4) gesagt wurde, wonach der Winkel $\delta = (\alpha' - \alpha)$ zwischen den Grenzen $\delta = 0$ und $\delta = (180^0 - 2\,\alpha)$ variiren kann.

Hiebei erhält man für $\delta = 0$ den Fall Fig. 142, für $\delta = (90^0 - \alpha)$ jenen in der Fig. 139 und für $\delta = (180^0 - 2\,\alpha)$ denjenigen Fall, wo, von der Wandkrone angefangen, das Erdreich nach der natürlichen Böschung abfällt. Eine abfallende Oberflächenböschung überhaupt entsteht für $\delta > (90^0 - \alpha)$ und unter diesen Fällen ist insbesondere jener bemerkenswerth, in welchem die gedachte Böschung mit dem Horizontale den Reibungswinkel ϱ einschliesst, so dass dann, wie die nebige Figur 145 zeigt, zu setzen ist:

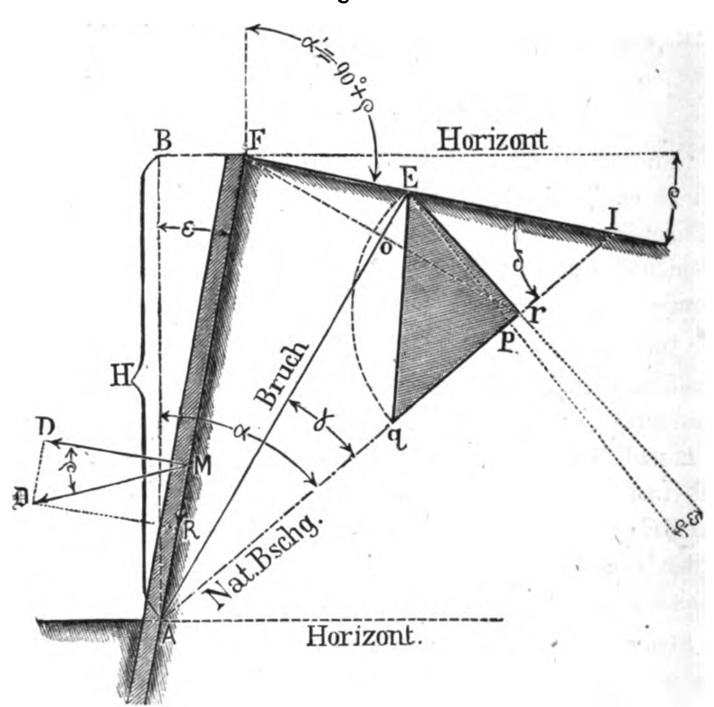
$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= 90^0 + \varrho \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta &= (\alpha' - \alpha) = 90^0 - (\alpha - \varrho) \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (348).$$

Dann erhält man nach den Relationen (336) die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} a = \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b = \operatorname{tg}\delta = \operatorname{cotg}(\alpha - \varrho) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c = \operatorname{cotg}(\varepsilon - \varrho) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (349),$$

welche zunächst in die Gleichung (335) zu substituiren sind, um

Fig. 145.



hieraus den Bruchwinkel γ zu finden. Geschieht dies, so ergibt sich nach durchgeführter Reduction in ganz einfacher Weise:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (350).$$

Die Bruchfläche halbirt also den Winkel zwischen der Stützwand und der durch ihren Fuss gezogenen natürlichen Böschung, und es ist hiernach:

$$\sphericalangle FAE = \sphericalangle EAI = \tfrac{1}{2} \sphericalangle FAI = \tfrac{1}{2}(\alpha - \varepsilon) \ldots (351).$$

Um die Grösse des Erddruckes zu finden, hat man auf die Gleichungen (341) und (342)), oder — was hier zweckmässiger sein wird — auf jene unter (339) und (340) zurückzugreifen. Geschieht dieses, so ergibt sich nach einiger Reduction:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{w}}{g} &= \frac{\cos(\varepsilon - \varrho)}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2} - \varrho\right)} \right]^2 \ldots\ldots\ldots \\ \frac{w}{g} &= \cos \varrho \left(\frac{\mathfrak{w}}{g}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (352).$$

Für $\varrho = 0$ führen beide Werthe auf die Relation (95), was auch zu erwarten war, weil jetzt die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales horizontal wird, und keine Reibung zwischen diesem und der Stützwand in Rechnung zu kommen hat, welche Voraussetzungen geradezu jener Relation (95) zu Grunde liegen.

Die Richtigkeit des Resultates (350) für die Lage der Bruchfläche leuchtet übrigens sogleich ein, wenn man die Hauptregel (288) in's Auge fasst, und hiernach die beiden Dreiecke AFE und AEr gleich gross construirt, wenn hiebei $\overline{Ep} \perp \overline{AI}$ steht und $\sphericalangle pEr = (\varrho - \varepsilon)$ gemacht wird. Denn dann ist $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ArE = (90^\circ + \varepsilon - \varrho)$, folglich können die gedachten zwei Dreiecke nur dann gleich gross werden, wenn sie zugleich congruent sind.

Hiernach ergibt sich:

$$\overline{AF} = \overline{Ar},\ \overline{FE} = \overline{Er},\ \sphericalangle AEF = \sphericalangle AEr,$$

endlich gleichfalls, wie oben:

$$\sphericalangle FAE = \sphericalangle EAI = \tfrac{1}{2}(\alpha - \varepsilon).$$

Ferner folgt, dass die Diagonalen des Constructions-Viereckes $AFEr$, nämlich $\overline{AE}$ und $\overline{Fr}$, wovon diese durch jene in o halbirt wird, auf einander senkrecht stehen.

Die Grösse des schiefen Erddruckes $\mathfrak{D}$ kann nach der Hauptregel (289) durch das Gewicht des Erdprismas Eqr, wobei $\overline{Er} = \overline{qr}$ ist, ausgedrückt werden, wodurch man selbstverständ-

lich ebenfalls auf die Gleichungen (352) gelangt, wenn beachtet wird, dass die Relationen:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}\, \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos\varepsilon},\ D = \frac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \text{ und } D = \mathfrak{D} \cos\varrho$$

stattfinden.

Erreicht ϱ den nach §. 70 möglichen Maximalwerth, nämlich: $\varrho = (90^0 - \alpha)$, so fällt die Oberfläche des Erdreiches $\overline{BI}$ nach der natürlichen Böschung ab, und es wird dann insbesondere:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \frac{\sin(\alpha + \varepsilon)}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\alpha + \varepsilon}{2}\right)} \right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (353).$$

Ist zudem die Stützwand lothrecht, also $\varepsilon = 0$, so hat man:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \sin\alpha \left[\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}\right]^2 = \sin\alpha \left[\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}\right]^2$$

$$= \frac{\sin^3\alpha}{[\sin 2\alpha + \sin\alpha]^2} = \frac{\sin\alpha}{[2\cos\alpha + 1]^2},$$

also auch:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\mathfrak{w}}{g}\right)\cos\varrho = \left(\frac{\mathfrak{w}}{g}\right)\sin\alpha = \left[\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha + 1}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (354).$$

Diese Relation bezieht sich auf den normalen Erddruck für den Fall, wenn die Stützwand lothrecht steht, von der Wandkrone angefangen das Erdreich nach der natürlichen Böschung abfällt, und der Coefficient für die Reibung zwischen der Stützwand und dem Erdreiche mit seinem Maximalwerthe, d. h. eben so gross in Rechnung kommt, wie jener für die Reibung zwischen den Erdtheilchen selbst.

Vergleicht man das Resultat (354) mit jenem unter (164*), welches letztere auf demselben Fall, nur mit Beiseitelassung der

---

*) Zu Folge dieses Resultates ist mit Rücksichtsnahme auf die Formel (163):

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}}\right]^2 = \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}\right]^2.$$

Wirkung der Reibung zwischen Erdreich und Stützwand, also für $\varrho = 0$, Bezug nimmt, so ersieht man den Einfluss dieser Reibung auf die Wirkung des Erddruckes.

§. 81.

Vergleichung zwischen den Resultaten für den Erddruck bei verschiedenen Richtungen der Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales. Man findet leicht, dass mit der Zunahme des Winkels α', beziehungsweise δ (Figur 143), der Erddruck unter sonst gleichen Umständen abnimmt, so dass für den Einen Grenzwerth $\delta = 0$ das Maximum, für den anderen Grenzwerth $\delta = (180^0 - 2\alpha)$ aber das Minimum des Erddruckes eintritt.

Um dies beispielsweise zu erläutern, stehe eine verticale Stützwand in Betracht, und es sei für das Hinterfüllungsmateriale $a = \text{tg}\,\alpha = 1 \cdot 2$, der Coefficient der Reibung zwischen demselben und der Stützwand aber (wie in der XVI. Tabelle vorausgesetzt) $\mu = \text{tg}\,\varrho = \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{a}$. Hiernach ist

$$\frac{1}{\cos\varrho} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} = 1 \cdot 3017 \text{ (siehe Tabelle XIV).}$$

Man betrachte nun folgende fünf Fälle:

I.

(Fig. 146.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt nach der natürlichen Böschung an. Hier ist nach der Tabelle XVI (für $a = 1 \cdot 2$ und $b = 0$) oder auch zu Folge der Gleichung (328) nach der IX. Tabelle (für $\text{tg}\,\alpha = 1 \cdot 2$ und $\text{tg}\,\varepsilon = 0$):

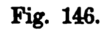
$$\frac{w}{g} = \sin^2\alpha = 0 \cdot 590 \text{ und } \frac{\mathfrak{w}}{g} = \sin\alpha = 0 \cdot 768.$$

II.

(Fig. 147.) Die Oberfläche des Erdreiches steigt etwas sanfter an, so dass das Verhältniss zwischen der Anlage und Höhe der bezüglichen Böschung, das Doppelte von jenem des I. Falles (also $\text{tg}\,\alpha' = 2\,\text{tg}\,\alpha$) beträgt. Hier ist $a = 1 \cdot 2$ und, wegen der zweiten Gleichung in (336), $b = \frac{30}{97}$

$= 0{\cdot}3093$, somit erhält man nach der XVI. Tabelle im Wege des Interpolirens, oder nach den Formeln (346) und (347):

$$\frac{w}{g} = 0{\cdot}219 \text{ und } \frac{\mathfrak{w}}{g} \doteq 0{\cdot}285.$$


Fig. 146.

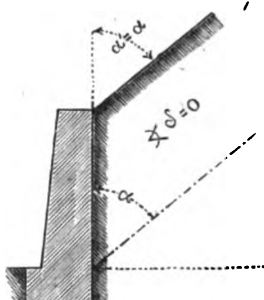
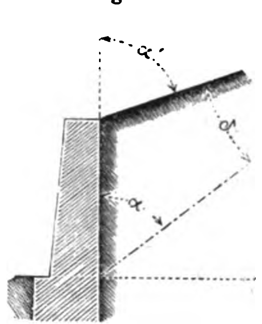


Fig. 147.



III.

(Fig. 148.) Die Oberfläche des Erdreiches ist horizontal. Jetzt ist $a = \operatorname{tg} \alpha = 1{\cdot}2$ und $b = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{5}{6}$, und man kann entweder, wie

Fig. 148.

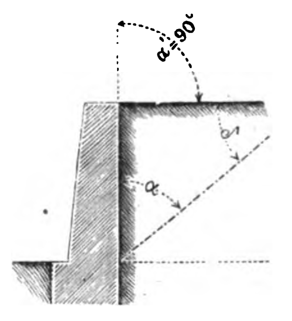
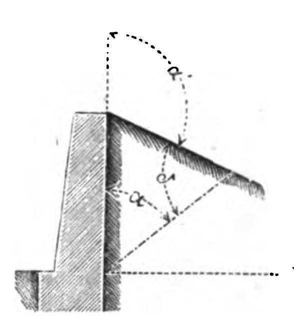


Fig. 149.



vorhin, oder, was bequemer ist, so verfahren, dass man auf das zweite Capitel des laufenden Abschnittes zurückblickt, und die dortige Formel (317) oder die dazu gehörige XV. Tabelle (für $\operatorname{tg} \alpha = 1{\cdot}2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$) berücksichtiget. Hiernach findet man:

$$\frac{w}{g} = 0{\cdot}163 \text{ und } \frac{\mathfrak{w}}{g} = 0{\cdot}212.$$

Derselbe Werth für $\frac{w}{g}$ kommt zum Vorschein aus der XIII. Tabelle, wenn $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\mu = \frac{1}{a}$ gesetzt wird.

IV.

(Fig. 149.) Die Oberfläche des Erdreiches ist nach rückwärts abfallend, und zwar soll das Gefälle eben so gross sein, wie die Steigung in der Fig. 147. Nunmehr hat man:

$a = 1 \cdot 2$ und $b = \frac{90}{47} = 1 \cdot 9149$, also, indem man die Rechnung nach den Formeln (346) und (347) durchführt:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 133 \text{ und } \frac{\mathfrak{w}}{g} = 0 \cdot 173.$$

V.

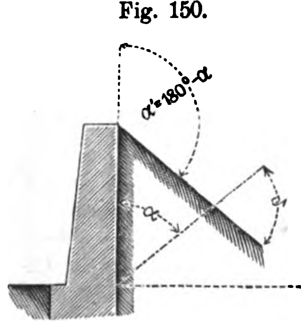
(Fig. 150.) Die Oberfläche des Erdreiches fällt nach der natürlichen Böschung ab. Dann ist:

$a = \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und, wegen $\delta = 180 - 2\alpha$, $b = \operatorname{tg} \delta = - \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a}{a^2 - 1} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$, somit erhält man nach den vorbezogenen Formeln, oder mit Benützung der Relation (354):

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 114 \text{ und } \frac{\mathfrak{w}}{g} = 0 \cdot 148.$$

Ueberall ist g das Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches, und w, beziehungsweise $\mathfrak{w}$, zeigt dasjenige Einheitsgewicht an, welches einer tropfbaren Flüssigkeit zukommen müsste, die auf die Stützwand einen Druck von gleicher Grösse mit dem normalen, beziehungsweise schiefen Erddrucke ausüben würde, wobei selbstverständlich die Oberfläche der jeweilig sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit immer horizontal, und der Druck dieser Letzteren stets normal auf die Stützwand sich vorzustellen ist.

Fig. 150.



Da in den verglichenen Fällen der normale Erddruck immer durch die Formel $D = \frac{1}{2} w H^2$, der schiefe aber durch die Formel $\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \mathfrak{w} H^2$ ausgedrückt erscheint, und hiebei stets $w = \mathfrak{w} \sin \alpha$ ist, so stehen sowohl die fünf Werthe für den normalen, als auch jene für den schiefen Erddruck aufeinanderfolgend in demselben Verhältniss zu ein-

ander, wie die obengefundenen fünf Resultate für $\frac{w}{g}$, beziehungsweise $\frac{m}{g}$, also wie:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
0·590	:	0·219	:	0·163	:	0·133	:	0·114

oder wie:

0·768	:	0·285	:	0·212	:	0·173	:	0·148.

Stellt man das dritte Glied, welches auf die horizontale Oberfläche des Erdreiches Bezug nimmt, als die Einheit dar, so erhält man beiderseits das Verhältniss:

(I)		(II)		(III)		(IV)		(V)
3·62	:	1·34	:	1	:	0·82	:	0·70,

wodurch zugleich eine bessere Uebersichtlichkeit insoferne geboten ist, als man jetzt den Percenten-Antheil erkennt, um welchen der Druck zu- oder abnimmt, wenn die Oberfläche des Erdreiches, von der Wandkrone an, über den dortigen Horizont sich erhebt, oder unter demselben abfällt.

Vergleicht man die gefundenen Ergebnisse mit jenen auf Seite 167, wo dieselbe Aufgabe mit Vernachlässigung der Reibung an der Stützwand durchgeführt wurde, so ersieht man den Einfluss, welchen die fragliche, jetzt in Rechnung gebrachte Reibung äussert.

Fünftes Capitel.

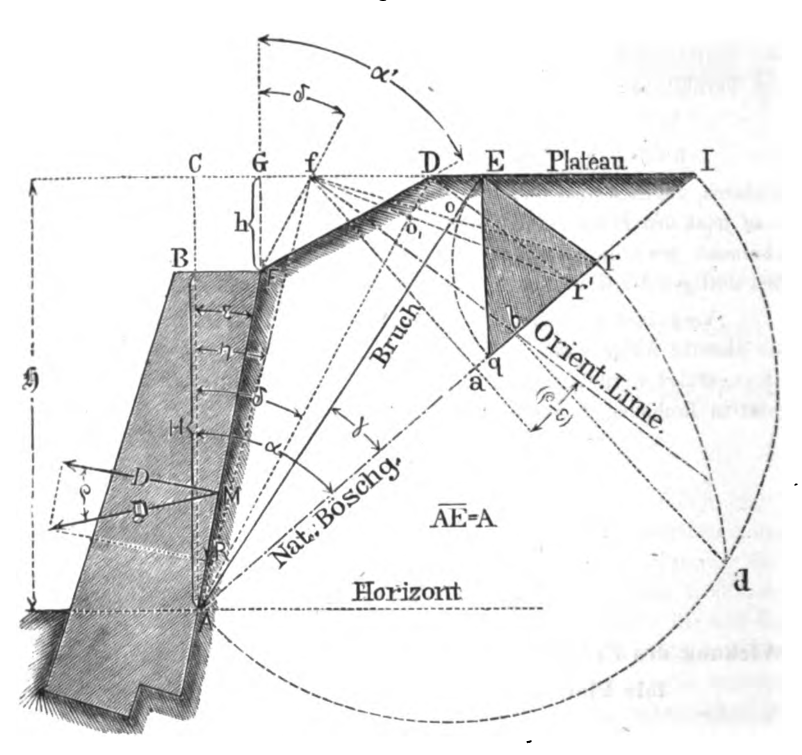
Wirkung des Erddruckes an eine Stützwand, wenn das horizontale Plateau höher liegt, als die Wandkrone.

§. 82.

Allgemeiner Fall. Dieser ist in der Figur 151 dargestellt. Die Bezeichnungen H, h, $\mathfrak{H}$, α, α', δ, γ, ε und η sind dieselben, wie im §. 63, nur kommt jetzt noch der Reibungswinkel (ϱ) für die Reibung zwischen Erde und Stützwand in Betracht, der dort gleich Null gesetzt ward. Die Auflösung in grafischer Weise erfolgt nach den Erläuterungen im ersten Capitel des laufenden Abschnittes. Hiernach hat man die Bruchlinie $\overline{AE}$

derart zu zeichnen, dass area $AFDE = \triangle AEr$ wird, wobei $\overline{Er}$ parallel zur Orientirungslinie $\overline{fb}$, diese aber so zu ziehen ist, dass — wenn $\overline{fa} \perp \overline{AI}$ steht — der Winkel $afb = (\varrho - \varepsilon)$ wird, was zur Folge hat, dass man auch $\overline{fo} = \overline{or} = \frac{1}{2}\overline{fr}$ erhält. Der Punkt f ergibt sich aus der Verwandlung des Drei-

Fig. 151.



eckes AFD in das gleich grosse Dreieck AfD, von welchem die Seite $\overline{Df}$ in das Niveau des Plateaus zu liegen kommt, was dadurch erreicht wird, dass man $\overline{Ff} \parallel \overline{AD}$ zieht. Um den Punkt r zu finden, hat man mit Rücksicht auf den Inhalt der §§. 51 und 67 (lit. C) $\overline{bd} \perp \overline{AI}$ zu stellen, über $\overline{AI}$ als Diameter einen Halbkreis zu ziehen und mit dem Radius $\overline{Ad}$ von A aus den Bogen $\widehat{dr}$ zu beschreiben.

Was die Grösse des schiefen Erddruckes betrifft, so wird diese durch das Gewicht des Erdprismas Eqr (wobei $\overline{qr} = \overline{Er}$ ist) dargestellt, daher ist:

$$\mathfrak{P} = g \cdot \triangle Eqr.$$

Ferner hat man für den normalen Erddruck und für die Reibung an der Stützwand:

$$D = \mathfrak{P} \cos \varrho \text{ und } R = \mathfrak{P} \sin \varrho.$$

Verfolgt man diese grafische Darstellung auf dem Wege der Rechnung, so findet man Folgendes:

Zu Folge der Gleichung (288):

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos (\varepsilon - \varrho)},$$

oder, wegen $A = \overline{AE} = \dfrac{\mathfrak{H}}{\cos (\alpha - \gamma)}$ auch:

$$\triangle AEr = \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \frac{\sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos^2 (\alpha - \gamma) \cos (\varepsilon - \varrho)};$$

ferner nach der Figur:

$$\text{area } AFDE = \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}^2 [\operatorname{tg} (\alpha - \gamma) - \operatorname{tg} \eta];$$

somit, durch Gleichsetzung beider Resultate:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \gamma) - \operatorname{tg} \eta = \frac{\sin \gamma \cos (\gamma + \varepsilon - \varrho)}{\cos^2 (\alpha - \gamma) \cos (\varepsilon - \varrho)},$$

aus welcher Bedingungsgleichung der Bruchwinkel γ abzuleiten ist.

Um diese Ableitung in einer möglichst einfachen Weise zu veranlassen, bestimme man zunächst nicht γ, sondern $(\alpha - \gamma)$, beziehungsweise $\operatorname{tg} (\alpha - \gamma)$, und führe nebstbei folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= a \\ \operatorname{tg} \eta &= m \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{cotg} (\alpha + \varepsilon - \varrho) &= n \\ \operatorname{tg} (\alpha - \gamma) &= x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (355).$$

Hiernach erhält man für die Factoren in dem Bruche der vorigen Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \ldots\ldots\ldots &= \sin [\alpha - (\alpha - \gamma)] \\ &= \cos \alpha \cos (\alpha - \gamma) [a - x], \\ \cos (\gamma + \varepsilon - \varrho) &= \cos [(\alpha + \varepsilon - \varrho) - (\alpha - \gamma)] \\ &= \cos (\alpha - \gamma) \sin (\alpha + \varepsilon - \varrho) [n + x], \\ \cos (\varepsilon - \varrho) \ldots\ldots &= \cos [(\alpha + \varepsilon - \varrho) - \alpha] \\ &= \cos \alpha \sin (\alpha + \varepsilon - \varrho) [a + n], \end{aligned}$$

mit deren Benützung jene Bedingungsgleichung in eine neue übergeht, welche heisst:

$$x - m = \frac{(a - x)(n + x)}{(a + n)},$$

oder, indem man nach der Unbekannten x ordnet:

$$x^2 + 2nx = an + m(a + n).$$

Die Auflösung nach x ergibt:

$$x = -n + \sqrt{(a + n)(m + n)} \qquad \ldots\ldots\ldots (356).$$

Der schiefe Erddruck ist nach der Formel (287) mit gleichzeitiger Berücksichtigung des oben erwähnten Werthes von A:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g A^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos(\varepsilon - \varrho)} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2(\alpha - \gamma)\cos(\varepsilon - \varrho)}.$$

Setzt man hierin zu Folge der obigen Bezeichnungen:

$$\sin^2 \gamma = \sin^2[\alpha - (\alpha - \gamma)] = \cos^2 \alpha \cos^2(\alpha - \gamma)[a - x]^2,$$

$$\cos(\varepsilon - \varrho) = \cos \alpha \sin(\alpha + \varepsilon - \varrho)[a + n],$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \varepsilon - \varrho)} \cdot \frac{(a - x)^2}{(a + n)}.$$

Nun ist aber:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha + \varepsilon - \varrho)} = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2(\alpha + \varepsilon - \varrho)} = \sqrt{1 + n^2}$$

$$\frac{(a - x)^2}{(a + n)} = \left[\sqrt{a + n} - \sqrt{m + n}\right]^2,$$

Folglich findet man schliesslich für die Grösse des **schiefen Erddruckes**:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \sqrt{\frac{1 + n^2}{1 + a^2}} \cdot \left[\sqrt{a + n} - \sqrt{m + n}\right]^2 \quad (357),$$

für jene des **normalen Erddruckes**:

$$D = \mathfrak{P} \cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \mathfrak{P} \qquad \ldots\ldots\ldots (358),$$

und für die Grösse der **Reibung an der Stützwand**:

$$\left.\begin{aligned} R &= \mathfrak{P} \sin \varrho = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \mathfrak{P} \ldots\ldots \\ &= D \operatorname{tg} \varrho = \mu D \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (359),$$

wenn wieder, wie früher, $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ gesetzt wird.

Die im Eingange des §. bezeichneten Grössen stehen unter sich in derselben Verbindung, wie solche in den Gleichungen (265) bis (271) angedeutet erscheint, daher hierauf, namentlich wegen Bestimmung der Werthe $\operatorname{tg}\delta = b$ und $\operatorname{tg}\eta = m$ Rücksicht zu nehmen ist.

Auch hat man:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}$$

$$= \frac{a + c}{1 - a c} = d \ldots\ldots\ldots\ldots (360)$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon)\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg}\varrho}$$

$$= \frac{1 + d\mu}{d - \mu} = n \ldots\ldots\ldots\ldots (361).$$

Ex. Es seien, wie in dem Beispiele auf Seite 302, folgende Daten bekannt:

$H = 10$, $h = 3$, somit $\mathfrak{H} = 13$ Fuss, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha' = 1\frac{1}{2}$, $g = 100$ Pfd., ferner $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$. Nur soll hier nicht, wie dort, die Reibung zwischen Erde und Stützwand ausser Acht bleiben, sondern hiefür der Reibungscoefficient mit seinem grössten Werthe, nämlich mit $\mu = \operatorname{tg}\varrho = \operatorname{cotg}\alpha = 1$ angenommen werden.

Hiernach hat man mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Formeln (265) bis (271), dann (360) und (361), zu setzen:

$a = \operatorname{tg}\alpha = 1$

$a' = \operatorname{tg}\alpha' = 1\frac{1}{2}$

$b = \operatorname{tg}\delta = \frac{37}{78}$

$c = \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$

$d = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = \frac{7}{5}$

$\mu = \operatorname{tg}\varrho = 1$

$m = \operatorname{tg}\eta = \frac{241}{1014}$

$n = \operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon - \varrho) = 6$,

somit findet man zunächst nach der Gleichung (356):

$$x = \operatorname{tg}(\alpha - \gamma) = 0{\cdot}608,$$

$$\alpha - \gamma = 31^\circ 18', \quad \gamma = 13^\circ 42',$$

daher etwas kleiner, als in dem Beispiele auf Seite 302.

Nach den Formeln (357), (358) und (359) erhält man weiter:

$\mathfrak{D} = 7{\cdot}98$, $D = 5{\cdot}64$ und $R = 5{\cdot}64$ Ctr., wobei der normale Erddruck D kleiner ist, als jener auf Seite 303 erhaltene, welcher letztere nämlich ohne Rücksicht auf die Reibung an der Stützwand, unter sonst gleichen Umständen, berechnet wurde.

Ist die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand gleich Null, also auch $\mu = \text{tg}\,\varrho = 0$, so erhält man die Resultate im §. 63.

Ist dagegen für μ der grösste Reibungscoefficient in Rechnung zu bringen, so hat man überall $\varrho = (90^0 - \alpha)$, somit $\mu = \text{tg}\,\varrho = \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\alpha}$ zu setzen.

Was die Lage des Druckmittelpunktes betrifft, so sind zur genauen, eventuell zur approximativen Bestimmung derselben die Erörterungen in den §§. 69, beziehungsweise 64, massgebend.

§. 83.

Besonderer Fall, wenn die Stützwand lothrecht steht und das Erdreich, von der Wandkrone an, bis zum Plateau nach der natürlichen Böschung ansteigt. Unter diesen Voraussetzungen hat man in der vorstehenden Untersuchung und der dazu gehörigen Figur 151 zunächst $\varepsilon = 0$ und $\alpha' = \alpha$ zu setzen. Geschieht dies, so ergeben sich folgende Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} a = \text{tg}\,\alpha = a' = d \ldots\ldots \\ b = \text{tg}\,\delta = \frac{h}{\mathfrak{H}}\,\text{tg}\,\alpha = \frac{h}{\mathfrak{H}}\,a \ldots\ldots \\ c = \text{tg}\,\varepsilon = 0 \ldots\ldots \\ m = \text{tg}\,\eta = \frac{\text{tg}^2\,\delta}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{\mathfrak{H}^2}\,a \ldots\ldots \\ n = \text{cotg}\,(\alpha - \varrho) = \frac{1 + a\mu}{a - \mu} \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (362)$$

$$x = \text{tg}\,(\alpha - \gamma) = \frac{\sqrt{(1 + a^2)\left[1 + b^2 + \frac{\mu}{a}(a^2 - b^2)\right]} - (1 + a\mu)}{a - \mu} \quad (363)$$

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\,g\,\mathfrak{H}^2\sqrt{1 + \mu^2} \times \left[\frac{\sqrt{1 + a^2} - \sqrt{1 + b^2 + \frac{\mu}{a}(a^2 - b^2)}}{a - \mu}\right]^2 \ldots\ldots (364).$$

Der normale Erddruck ist:

$$D = \mathfrak{P}\cos\varrho = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

also:

$$D = \frac{1}{2} g \mathfrak{H}^2 \left[\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1 + b^2 + \frac{\mu}{a}(a^2 - b^2)}}{a - \mu}\right]^2 \quad \ldots (365),$$

und wenn man hierin den Zähler rational macht, ferner in Folge der auch hieher passenden Relation (194)

$$\mathfrak{H} = H\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\delta}\right) = \left(\frac{a}{a-b}\right) H$$

setzt:

$$D = \frac{1}{2} g H^2 \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1 + b^2 + \frac{\mu}{a}(a^2 - b^2)}}\right]^2 \quad \ldots (366).$$

Diese Formel geht für $\mu = 0$ in jene unter (207) über, wie dies auch zu erwarten war; überhaupt enthält dieselbe das hydrostatische Gesetz, denn man hat:

$$D = \frac{1}{2} w H^2,$$

wenn hiebei

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1 + b^2 + \frac{\mu}{a}(a^2 - b^2)}}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots (367)$$

gesetzt wird, und w das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche an die Wand von der Höhe H den gleichen Druck ausüben würde.

Für $\operatorname{tg}\delta = b = 0$ ist keine Ueberhöhung des Erdplateaus über der Wandkrone vorhanden, dasselbe liegt vielmehr im Niveau der letzteren und man erhält auf diese Weise den in der Fig. 140 dargestellten Fall. Hiefür folgt aus der lotzten Formel:

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1 + a\mu}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+a\mu}}{a - \mu}\right)^2,$$

also in der That dasselbe Resultat, welches schon unter (308) für den erwähnten Special-Fall gefunden wurde.

Für $a = b$ gelangt das Plateau in eine unendlich grosse Entfernung somit kommt der in der Figur 142 angedeutete Fall (für $\varepsilon = 0$) zum Vorschein. Dann erhält man in Uebereinstimmung mit der Formel (328):

$$\frac{w}{g} = \frac{a^2}{1+a^2} = \sin^2\alpha.$$

Tritt an der Stützwand das Maximum der Reibung ein, ist nämlich $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$, so erhält man für die Bestimmung des normalen Erddruckes D die Hilfsrelation:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{a + b}{\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{2 + b^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}} \right]^2 \dots\dots\dots (368).$$

Sodann ist der normale Erddruck:

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2 \dots\dots\dots (369),$$

der schiefe Erddruck:

$$E = \frac{D}{\cos \varrho} = \frac{D}{\sin \alpha} = D \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \dots\dots\dots (370),$$

und die Reibung an der Stützwand:

$$R = D \operatorname{tg} \varrho = D \operatorname{cotg} \alpha = \frac{D}{a} \dots\dots\dots (371).$$

Zur bequemeren Bestimmung des Werthes in (368) dient die jenseits stehende Tabelle Nr. XVII.

Anmerkung.

Die in diesem §. gegebenen Formeln sind insoferne allgemeine, als sie für jede beliebige Wandhöhe gelten. Der Fall, dass die Bruchfläche die vordere Böschung $\overline{FD}$ trifft, kommt nämlich hier gar nicht vor, denn die bezügliche Bruchfläche muss stets in das Plateau ausmünden. Die Ursache davon ist leicht einzusehen. Zu Folge der Figur 111 und der dazu gehörigen Erörterungen auf Seite 239 ist nämlich die erwähnte Eigenschaft in dem betrachteten Falle schon dann vorhanden, wenn auf die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand unberücksichtigt bleibt. Um so mehr muss also jene Eigenschaft Platz greifen, wenn die bezeichnete Reibung in Rechnung kommt, da ja dann nach der Beweisführung auf Seite 311 die jeweilige Bruchfläche noch eine sanftere Neigung annimmt.

XVII. Tabelle.

Normaler Erddruck D (innerhalb der Höhe H) $= \frac{1}{2} w H^2$; $\frac{w}{g} = \left[\frac{a+b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{2 + b^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}}\right]^2$

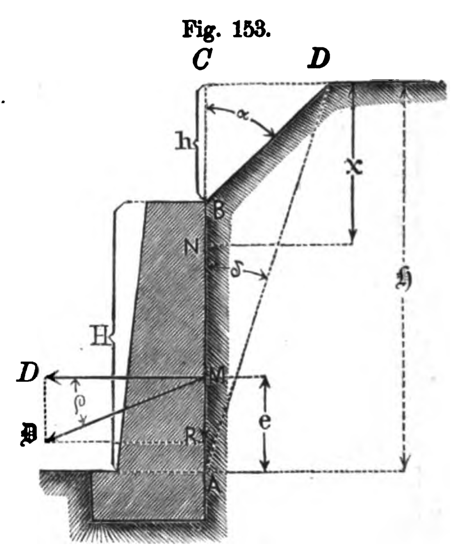
$a = \operatorname{tg} \alpha$, für die natürliche Erdböschung: $\frac{w}{g} =$	$b = \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{(H+h)} \operatorname{tg} \alpha$, für das Niveau von dem die Stützwandkrone überragenden Erdplateau:																				
	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1.3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
2·0	0·300	0·330	0·361	0·392	0·423	0·453	0·483	0·512	0·540	0·567	0·593	0·619	0·643	0·666	0·688	0·709	0·729	0·748	0·766	0·783	0·800
1·9	0·285	0·315	0·346	0·377	0·408	0·439	0·469	0·499	0·528	0·556	0·583	0·609	0·635	0·659	0·682	0·704	0·725	0·746	0·765	0·783	
1·8	0·269	0·299	0·330	0·361	0·392	0·424	0·455	0·485	0·515	0·544	0·573	0·600	0·627	0·652	0·676	0·700	0·722	0·744	0·764		
1·7	0·252	0·282	0·313	0·345	0·376	0·408	0·440	0·471	0·502	0·533	0·562	0·591	0·619	0·645	0·671	0·696	0·720	0·743			
1·6	0·235	0·265	0·296	0·327	0·360	0·392	0·425	0·457	0·489	0·521	0·551	0·581	0·611	0·639	0·667	0·693	0·719				
1·5	0·217	0·247	0·278	0·310	0·342	0·375	0·408	0·442	0·475	0·508	0·540	0·572	0·603	0·634	0·663	0·692					
1·4	0·199	0·229	0·259	0·291	0·324	0·358	0·392	0·426	0·461	0·495	0·529	0·563	0·597	0·630	0·662						
1·3	0·181	0·210	0·240	0·272	0·305	0·333	0·374	0·410	0·446	0·482	0·519	0·556	0·592	0·628							
1·2	0·163	0·191	0·221	0·252	0·286	0·321	0·357	0·394	0·432	0·471	0.510	0·550	0·590								
1·1	0·144	0·171	0·200	0·232	0·266	0·301	0·338	0·377	0·418	0·460	0·503	0·548									
1·0	0·125	0·151	0·180	0·211	0·245	0·281	0·320	0·361	0·405	0·451	0·500										

Fig. 152.

Der Coefficient für die Reibung zwischen der Stützwand und den Erdtheilchen ist gleich jenem für die Reibung zwischen diesen letzteren.

Uebergehend auf die Bestimmung des Erddruck-Mittelpunktes M in dem besprochenen Falle (Fig. 153), so ist zunächst mit Berücksichtigung der auf Seite 376 beigefügten Anmerkung zu beachten, dass die Bruchlinie, welche irgend einer Wandhöhe $\overline{BN}$ entspricht, niemals die Seitenböschung $\overline{BD}$, sondern stets

Fig. 153.



das Plateau trifft, folglich das Gesetz für die Veränderung des Erddruckes mit der Druckhöhe innerhalb der ganzen Ausdehnung dieser letzteren durch ein und dieselbe Formel ausgedrückt werden kann.

Nennt man daher y den normalen Erddruck an den Wandtheil $\overline{BN}$, wofür $\overline{CN} = x$ ist, so hängt y in derselben Weise von x ab, wie der normale Erddruck auf die ganze Wandhöhe $\overline{AB}$ von der Höhe $\mathfrak{H}$.

Nun hat man aber nach der Relation (365), wenn dort $b = \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\mathfrak{H}} a$ gesetzt wird:

$$D = \tfrac{1}{2} g \left[\frac{\mathfrak{H} \sqrt{1 + a^2} - \sqrt{a (a - \mu) h^2 + (1 + a \mu) \mathfrak{H}^2}}{a - \mu} \right]^2$$
$$= \mathfrak{A} \left[\mathfrak{H} \sqrt{1 + a^2} - \sqrt{a (a - \mu) h^2 + (1 + a \mu) \mathfrak{H}^2} \right]^2 \quad (372),$$

wobei $\mathfrak{A} = \frac{g}{2 (a - \mu)^2}$ ein von $\mathfrak{H}$ unabhängiger Factor ist.

Der vorigen Bemerkung gemäss kann man daher auch schreiben:

$$y = \mathfrak{A}\,[x\sqrt{1+a^2} - \sqrt{a\,(a-\mu)\,h^2 + (1+a\,\mu)\,x^2}\,]^2 \,..\,(373),$$

wodurch die Abhängigkeit zwischen y und x gekennzeichnet ist.

In Folge der Gleichung (191), welche nach der Bemerkung im §. 69 auch für den gegenwärtigen Fall, wenn die Reibung an der Stützwand in Betracht kommt, Anwendung findet, hat man nunmehr:

$$D\,e = \int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} y.\,d\,x,$$

wenn man hiebei beachtet, dass die beiden Integrationsgrenzen für die Variable x die Höhen h und $\mathfrak{H}$ sind.

Hiernach ergibt sich:

$$e = \frac{\int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} d\,x\,[x\sqrt{1+a^2} - \sqrt{a\,(a-\mu)\,h^2 + (1+a\,\mu)\,x^2}\,]^2}{[\mathfrak{H}\sqrt{1+a^2} - \sqrt{a\,(a-\mu)\,h^2 + (1+a\,\mu)\,\mathfrak{H}^2}\,]^2}$$

$$= \frac{\int_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} \mathfrak{f}\,(x)\,.\,d\,x}{\mathfrak{f}\,(\mathfrak{H})} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(374^*).$$

Um eine bequeme Bestimmung dieses Werthes zu ermöglichen, setze man zunächst:

$$\mathrm{tg}\,(\alpha - \varrho) = \nu\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

und beachte, dass man nach den vorausgegangenen Bezeichnungen hat:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = a,\ \mathrm{tg}\,\varrho = \mu,\ \mathrm{tg}\,\delta = \frac{h}{\mathfrak{H}}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{\mathfrak{H}}\,a = b.$$

Der neu eingeführte Coefficient ν ist daher:

$$\nu = \frac{\mathrm{tg}\,(\alpha - \varrho)}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{(a-\mu)}{a\,(1+a\,\mu)} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(375).$$

Mit Rücksicht darauf findet man:

$$\mu = \frac{a\,(1-\nu)}{1+\nu\,a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(376),$$

---

*) $\mathfrak{f}$ ist das bezügliche Functionszeichen.

$$a - \mu = \frac{a\,\nu\,(1 + a^2)}{1 + \nu\,a^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (377),$$

$$1 + a\mu = \frac{1 + a^2}{1 + \nu\,a^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (378);$$

somit:

$$\mathfrak{F}\,(x) = \left(\frac{1 + a^2}{1 + \nu\,a^2}\right)\left(x\sqrt{(1 + \nu\,a^2)} - \sqrt{\nu\,a^2 h^2 + x^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 + a^2}{1 + \nu\,a^2}\right)\mathfrak{f}\,(x) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (379),$$

$$\mathfrak{F}\,(\mathfrak{H}) = \left(\frac{1 + a^2}{1 + \nu\,a^2}\right)\left(\mathfrak{H}\sqrt{1 + \nu\,a^2} - \sqrt{\nu\,a^2 h^2 + \mathfrak{H}^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 + a^2}{1 + \nu\,a^2}\right)\mathfrak{f}\,(\mathfrak{H}) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (380).$$

Hiernach erhält man auch:

$$e = \frac{\int\limits_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} \mathfrak{f}\,(x)\,.\,d\,x}{\mathfrak{f}\,(\mathfrak{H})} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (381),$$

wobei man anstatt $\mathfrak{f}\,(x)$ zu setzen hat:

$$\mathfrak{f}\,(x) = \left(x\sqrt{1 + \nu\,a^2} - \sqrt{\nu\,a^2 h^2 + x^2}\right)^2$$

$$= \nu\,a^2 h^2 + (2 + \nu\,a^2)\,x^2 - 2\,x\sqrt{(1 + \nu\,a^2)\,(\nu\,a^2 h^2 + x^2)}.$$

Das zu suchende Integrale ist allgemein:

$$\int \mathfrak{f}\,(x)\,.\,d\,x = \tfrac{1}{3}\left[3\,\nu\,a^2 h^2\,x + (2 + \nu\,a^2)\,x^3 - 2\sqrt{1 + \nu\,a^2}\,(\nu\,a^2 h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

somit wird das begrenzte:

$$\int\limits_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} \mathfrak{f}\,(x)\,.\,d\,x$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[2\,\nu^2 a^4 h^3 + 3\,\nu\,a^2 h^2\,\mathfrak{H} + (2 + \nu\,a^2)\,\mathfrak{H}^3 - 2\sqrt{1 + \nu\,a^2}\,(\mathfrak{H}^2 + \nu\,a^2 h^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

oder, wegen $b\,\mathfrak{H} = a\,h$, auch:

$$\int\limits_{x=h}^{x=\mathfrak{H}} \mathfrak{f}\,(x)\,.\,d\,x = \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{H}^3\left[2 + \nu\,a^2 + 3\,\nu\,b^2 + 2\,\nu^2 a\,b^3 - 2\sqrt{1 + \nu\,a^2}\,(1 + \nu\,b^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Setzt man in (380) ebenfalls $b\,\mathfrak{H} = a\,h$, so wird weiter:

$$\mathfrak{f}\,(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}^2\left[\sqrt{1 + \nu\,a^2} - \sqrt{1 + \nu\,b^2}\right]^2,$$

daher ergibt sich aus Gleichung (381):

$$e = \frac{1}{3} \mathfrak{H} \frac{2 + \nu a^2 + 3 \nu b^2 + 2 \nu^2 a b^3 - 2 \sqrt{1 + \nu a^2} (1 + \nu b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + \nu a^2} - \sqrt{1 + \nu b^2})^2},$$

und, indem man hierin $\mathfrak{H}$ durch H ausdrückt, daher $\mathfrak{H} = \left(\frac{a}{a-b}\right) H$ substituirt, gleichzeitig aber wieder, wie auf Seite 266, $e = \frac{1}{3} m H$ setzt:

$$m = \left(\frac{a}{a-b}\right) \frac{2 + \nu a^2 + 3 \nu b^2 + 2 \nu^2 a b^3 - 2 \sqrt{1 + \nu a^2} (1 + \nu b^2)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{1 + \nu a^2} - \sqrt{1 + \nu b^2})^2}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem auf Seite 266 für m gegebenen, so ersieht man, dass man dort $a\sqrt{\nu}$ und $b\sqrt{\nu}$ anstatt a und b zu setzen hat, um auf das jetzige Resultat zu gelangen, wenn man hiebei berücksichtiget, dass in diesem letzteren anstatt $\frac{a}{a-b}$ auch $\frac{a\sqrt{\nu}}{a\sqrt{\nu} - b\sqrt{\nu}}$ geschrieben werden kann.

Die auf Seite 268 zusammengestellten Ergebnisse für m können somit auch gegenwärtig benützt werden, wenn man nur anstatt a und b überall $a\sqrt{\nu}$ und $b\sqrt{\nu}$ setzt.

Dieser Wahrnehmung zu Folge findet man analog mit den Gleichungen (224) bis (227) folgende bemerkenswerthe Formeln:

$$e = \frac{1}{3} m H \quad \text{.......... (382)}$$

$$m = \left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 + \frac{2b\sqrt{1 + \nu b^2}}{a\sqrt{1 + \nu b^2} + b\sqrt{1 + \nu a^2}}\right] \quad \text{... (383)}$$

$$= 1 + \left(\frac{b}{a-b}\right)\left[\frac{a\sqrt{1 + \nu b^2} - b\sqrt{1 + \nu b^2}}{a+b}\right]^2 \quad \text{... (384)}$$

$$= 1 + \frac{b(a-b)}{(a\sqrt{1 + \nu b^2} + b\sqrt{1 + \nu a^2})^2} \quad \text{.......... (385).}$$

Ist keine Reibung zwischen Erde und Stützwand in Rechnung zu nehmen, also $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$, so wird nach der Relation (375) $\nu = 1$, und die vorigen Formeln gehen unmittelbar in jene auf Seite 268 über.

Kommt dagegen das Maximum des Reibungscoefficienten für μ in Betracht, ist daher im Sinne des §. 70 $\varrho = (90^0 - \alpha)$

oder $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{a}$, so folgt zunächst aus der Relation (375):

$$\nu = \frac{a^2 - 1}{2a^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (386),$$

und es ist dann dieser specielle Werth in die Formeln für m einzuführen.

Zur bequemeren Bestimmung des diesfälligen Werthes von m, beziehungsweise von e, dient die jenseits stehende Tabelle Nr. XVIII*).

---

*) Zu Folge der Anmerkung auf Seite 376 gilt auch diese Tabelle für alle Höhenwerthe von H und h, indem der Fall, dass die Bruchfläche in die, von der Wandkrone an, aufsteigende Erdböschung trifft, unter dem vorausgesetzten Umstande, dass diese Erdböschung die natürliche Neigung hat, nicht vorkommt, sondern die bezügliche Bruchfläche stets in das horizontale Plateau ausmündet.

XVIII. Tabelle.

Werthe von: $\frac{e}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1+\frac{2b\sqrt{1+\nu b^2}}{a\sqrt{1+\nu b^2}+b\sqrt{1+\nu a^2}}\right] = \frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{b}{a-b}\right)\left[\frac{a\sqrt{1+\nu b^2}-b\sqrt{1+\nu a^2}}{a+b}\right]^2\right\} =$

$a = \operatorname{tg}\alpha$, für die natürliche Erdböschung: / $\frac{e}{H} =$	$b = \operatorname{tg}\delta = \frac{h}{(H+h)}\operatorname{tg}\alpha$, für das Niveau von dem die Stützwand überragenden Erdplateau:																				
	0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	2·0
2·0	0·333	0·347	0·355	0·360	0·363	0·363	0·363	0·361	0·360	0·357	0.355	0·353	0·350	0·348	0·346	0·343	0·341	0·339	0·337	0·335	0·333
1·9	0·333	0 348	0·356	0·361	0·364	0.364	0·364	0·362	0·360	0·357	0·355	0·352	9·349	0·346	0·344	0·342	0·339	0·337	0·335	0·333	
1·8	0·333	0·348	0·358	0·363	0·365	0·365	0·364	0 362	0·360	0·358	0·355	0·352	0·349	0·346	0·343	0·340	0·338	0·335	0·333		
1·7	0·333	0·349	0·359	0·364	0·366	0·366	0·365	0·363	0·360	0·357	0·354	0·351	0·348	0·345	0·342	0·339	0·336	0·333			
1·6	0·333	0·350	0·360	0·365	0·367	0·367	0·366	0·363	0·360	0·357	0·353	0·350	0·346	0·343	0·340	0·336	0·333				
1·5	0·333	0·351	0·361	0·367	0·368	0·368	0·366	0·363	0·360	0·356	0·352	0·348	0·344	0·341	0·337	0·333					
1·4	0·333	0·352	0·363	0·368	0·370	0·369	0·367	0·363	0·359	0·355	0·351	0·346	0·342	0·337	0·333						
1·3	0·333	0·353	0·365	0·370	0·372	0·370	0·368	0·364	0·359	0·354	0·349	0·343	0·338	0·333							
1·2	0·333	0·355	0·366	0·371	0·372	0·370	0·367	0·262	0·357	0·351	0·345	0·339	0·333								
1·1	0·333	0·356	0·368	0·373	0·373	0·371	0·366	0·360	0·354	0·347	0·340	0·333									
1·0	0·333	0·358	0·370	0·375	0·374	0·370	0·365	0·358	0·350	0·342	0·333										

$= \frac{1}{3}\left\{1+\frac{b(a-b)}{(a\sqrt{1+\nu b^2}+b\sqrt{1+\nu a^2})^2}\right\}$, zur Berechnung des Hebelsarmes e für den Erddruck, wobei $\nu = \frac{a^2-1}{2a^2}$ ist.

Fig. 154.

Ex. Es werde das Beispiel auf Seite 249 und 269 zu dem Behufe wieder aufgenommen, um dermalen den Erddruck und den Mittelpunkt desselben für den Fall zu bestimmen, wenn hiebei die Reibung zwischen dem Erdreich und der Stützwand in Betracht kommt, wofür der Reibungs-Coefficient $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 1$ sein soll. Die sonstigen Daten für das Beispiel sind: $H = h = 10$ Fuss, $a = \operatorname{tg} \alpha = 1$, $g = 100$ Pfund, also $\mathfrak{H} = 20$ Fuss und $b = \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\mathfrak{H}} a = \frac{1}{2}$.

Zur Berechnung des normalen Erddruckes kann man entweder die Formel (367), oder, weil hier $\mu = \frac{1}{a}$ ist, auch die Formel (368) benützen, oder endlich sogleich von der XVII. Tabelle Gebrauch machen.

Hiernach findet man:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 281,\quad w = 0 \cdot 281\, g = 28 \cdot 1 \text{ Pfd.},$$

daher wird nach der hydrostatischen Formel (369) der normale Erddruck:

$$D = \tfrac{1}{2} w H^2 = 14 \cdot 05 \text{ Ctr.}$$

Nach der Formel (370) wird der schiefe Erddruck:

$$\mathfrak{D} = D \sqrt{2} = 19 \cdot 87 \text{ Ctr.},$$

endlich nach der Formel (371) der Reibungwiderstand an der Stützwand:

$$R = D = 14 \cdot 05 \text{ Ctr.}$$

Wie man sieht, ist der schiefe Erddruck grösser und der normale kleiner, als der für dasselbe Beispiel auf Seite 249 berechnete Werth für die Intension des Druckes (17·5 Ctr.) unter der dortigen Voraussetzung, wonach die Reibung an der Stützwand gleich Null gesetzt wurde.

Für die Lage des Druckmittelpunktes erhält man ferner jetzt nach der XVIII. Tabelle für $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$:

$$\frac{e}{H} = 0 \cdot 370,\quad e = 3 \cdot 70 \text{ Fuss},$$

während man auf Seite 269 bei Vernachlässigung der Stützwandreibung $e = 3 \cdot 58$ Fuss gefunden hat. Die hier zum Vorschein kommende Differenz von $0 \cdot 12$ Fuss $= 1 \cdot 44$ Zoll ist übrigens von keinem praktischen Belange.

Eben so, wie auf den Seiten 268 und 269, ergibt sich bei der Betrachtung der für e gefundenen Relationen (382) bis (385), dass einerseits für $b = \operatorname{tg} \delta = 0$ und andererseits für $b = a$ oder $\delta = \alpha$ jedesmal $m = 1$, also $e = \frac{1}{3} H$ wird, was auch zu erwarten war, weil hiedurch die beiden Grenzfälle in Beziehung auf die Erdüberhöhungsgrösse h (nämlich: $h = 0$ und $h = \infty$) gekennzeichnet sind. Sonst aber ist jedenfalls $m > 1$ und $e > \frac{1}{3} H$,

daher man mit Einbeziehung jener Grenzfälle analog, wie in der Relation (228) zu setzen hat:

$$m \overline{\gtrless} 1 \text{ und } e \overline{\gtrless} \tfrac{1}{3} H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (386),$$

was nunmehr allgemein gilt, ob und mit welchem Reibungscoefficienten immer die Reibung zwischen Erde und Stützwand in Betracht gezogen werden will.

Uebrigens ergibt die Vergleichung der beiden Tabellen XII und XVIII, dass überhaupt die erwähnte Reibung auf die in Rede stehende Lage des Erddruckmittelpunktes keinen bemerkenswerthen Einfluss nimmt.

Dasjenige, was auf Seite 271 mit Rücksicht auf die Figur 121 wegen der Veränderung der Lage dieses Mittelpunktes gesagt worden ist, gilt der Hauptsache nach auch in dem gegenwärtigen Falle, es muss nämlich jetzt gleichfalls für eine gewisse Höhenlage des Erdplateaus der Werth von e ein Maximum werden.

Um diese besondere Höhenlage zu finden, beachte man, dass zu Folge der Gleichung (229) für den dort untersuchten Fall $\delta = \frac{1}{3} \alpha$ resultirte, was mit dem Ausdrucke arc . tg . $b =$ $\frac{1}{3}$ arc . tg . a gleichbedeutend ist.

Da nun nach der Bemerkung, welche den Fingerzeig zur sogleichen Aufstellung der Formeln (382) bis (385) gab, auch jetzt, nämlich so vorgegangen werden kann, dass man in dem zuletzt angegebenen Ausdrucke νa und νb anstatt a und b schreibt, um die geeignete Formel für den dermaligen Fall, wo die Reibung an der Stützwand mit in Rechnung kommt, zu finden, so ergibt sich:

$$\text{arc} . \text{tg} . \nu b = \tfrac{1}{3} \text{arc} . \text{tg} . \nu a.$$

Es ist aber $a = \text{tg}\, \alpha$ und $b = \text{tg}\, \delta$, ferner nach (375):

$$\nu = \frac{\text{tg}\,(\alpha - \varrho)}{\text{tg}\, \alpha},$$

somit hat man:

$$\text{arc} . \text{tg} . \left[\frac{\text{tg}\, \delta\, \text{tg}\,(\alpha - \varrho)}{\text{tg}\, \alpha}\right] = \tfrac{1}{3} \text{arc} . \text{tg} . [\text{tg}\,(\alpha - \varrho)]$$
$$= \tfrac{1}{3} (\alpha - \varrho),$$

oder:

$$\frac{\text{tg}\, \delta\, \text{tg}\,(\alpha - \varrho)}{\text{tg}\, \alpha} = \text{tg}\, \tfrac{1}{3} (\alpha - \varrho),$$

und hieraus:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{3}(\alpha-\varrho)}{\operatorname{tg}(\alpha-\varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (387).$$

Der entsprechende Maximalwerth von e (dieser sei e') ergibt sich, und zwar nach der Gleichung (230) und wieder mit Rücksicht darauf, dort νa anstatt a zu setzen, wie folgt:

$$e' = \tfrac{1}{8}\left[3 - \operatorname{tg}^2 \left\{\tfrac{1}{3}\operatorname{arc}.\operatorname{tg}.\nu a\right\}\right] H$$
$$= \tfrac{1}{8}\left[3 - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{3}(\alpha-\varrho)\right] H \ldots\ldots\ldots\ldots (388).$$

Für $\varrho = 0$ gehen die Gleichungen (387) und (388), wie es sein soll, in jene unter (229) und (230) über.

Für $\varrho = \alpha$ erhält man $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$ und $e' = \frac{3}{8} H \ldots\ldots (389)$, und dieser letztere Werth ist der grösste, der eintreten kann; höher hinauf kann der Erddruckmittelpunkt keinesfalls rücken.

Für den Maximalwerth von ϱ wird $\varrho = 90^0 - \alpha$, somit hat man in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta &= -\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}2\alpha \,.\, \operatorname{tg}\left(\tfrac{4}{3}\alpha - 30^0\right) \ldots\ldots \\ e' &= \tfrac{1}{8}\left[3 - \operatorname{tg}^2\left(\tfrac{4}{3}\alpha - 30^0\right)\right] H \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (390),$$

wobei $\operatorname{tg}\delta$ dennoch positiv sein wird, weil für die verschiedenen Erdgattungen der Böschungswinkel α nicht unter 45 Graden ist.

Noch bestehen, was leicht einzusehen ist, analog mit den Gleichungen (232) und (233) folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h'}{H} &= 2\cos^2\left(\frac{\alpha-\varrho}{3}\right) - \tfrac{3}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= 2\sin\left(30^0 + \frac{\alpha-\varrho}{3}\right)\sin\left(30^0 - \frac{\alpha-\varrho}{3}\right) \ldots \end{aligned}\right\} (391),$$

wenn h' dass Mass der Erdüberhöhung für den Fall bezeichnet, in dem der Erddruckmittelpunkt die höchste Lage einnimmt.

Endlich ist die Gleichung (234) auch jetzt vollkommen giltig, man hat nämlich ebenfalls:

$$\frac{e'}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{H+h'}{H+\frac{1}{2}h'}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (392),$$

nur haben e' und h' dermalen etwas andere Werthe als dort.

Anmerkung zu diesem Capitel. Die allgemeinen Formeln im §. 82 (Fig. 151) gelten nur insolange, als die Bruchlinie das Plateau trifft, wozu $\overline{fo_1} \overline{\lessgtr} \overline{o_1 r'}$ sein muss, wenn $\overline{fr'} \parallel$ zur Orientirungslinie gezogen wird. Im Gegenfalle gelten die Formeln des vorhergehenden Capitels.

Zweites Hauptstück.

Passiver Erddruck oder Widerstand der Erde.

§. 84.

Rückblick auf §. 4. Mit Rücksicht auf die dortige Eintheilung des Erddruckes, und bei dem Umstande, als der active Erddruck in dem ersten Hauptstücke bereits abgehandelt erscheint, wird nunmehr auf die Untersuchung des passiven Erddruckes oder des Widerstandes der Erde übergegangen.

Erster Abschnitt.

Allgemeiner Fall bezüglich des passiven Erddruckes gegen eine ebene Wand.

§. 85.

Umstände, welche als allgemeine angenommen werden. Sonstige Voraussetzungen. In Bezug auf die Stellung der an das Erdreich angedrückten ebenen Wand, auf die Form der Oberfläche desselben hinter dieser Wand, auf die bezüglichen Gewichts-, Reibungs- und Cohäsionsverhältnisse, so wie in Bezug auf die Grösse der Reibung zwischen Erde und Wand, werden vorerst keinerlei einschränkende Voraussetzungen

gemacht, so dass die diessfälligen Umstände als ganz allgemeine aufzufassen sind. Hiebei soll die Wand als absolut steif und unpressbar, ferner auf vollkommen fester, unnachgiebiger Basis stehend angenommen werden.

Was die Bruch- oder gefährliche Fläche im Erdkörper betrifft, welche in der Fig. 5 im Allgemeinen angedeutet ist, so soll dieselbe aus ähnlichen Gründen, wie solche bei der Untersuchung des activen Erddruckes im §. 11 geltend gemacht wurden, neuerdings als eine Ebene, welche durch den Fuss der Wand geht, vorausgesetzt werden. Die Länge des Erdkörpers, senkrecht auf seine Profilebene, werde unbegrenzt gedacht, und es soll hievon stets ein Theilkörper mit der Einheit als Länge in Rechnung genommen werden; eben so, wie dies früher bei der Bestimmung des activen Erddruckes der Fall war.

§. 86.

Allgemeine Formel zur Berechnung des passiven Erddruckes. I. Methode (neu). Der hiebei zu beobachtende Vorgang ist dem analog, welcher im §. 13 bei der Bestimmung des activen Erddruckes eingehalten wurde. Es sei nämlich (Fig. 155) hinter der Wand $\overline{AF}$, mit dem Neigungswinkel ε gegen das Loth $\overline{AB}$, anliegendes Erdreich vorhanden, an welches die Wand mit einer solchen Intension angepresst wird, dass das Erdreich geradezu im Grenzzustande des Gleichgewichtes sich befindet. In diesem Augenblicke beginnt die Gefahr, dass sich in dem Erdreiche eine Bruchfläche ($\overline{AE}$) bildet, die Wand nach rückwärts ausweicht, und das keilförmige Bruchprisma AFE über die Bruchfläche und an der Wand nach aufwärts verschoben wird. Der normale Druck, welchen hiebei die Wand an das Erdreich überträgt, wird mit D bezeichnet, und eben so gross ist offenbar auch der passive Erddruck oder der Widerstand des Erdreiches normal gegen jene Wand.

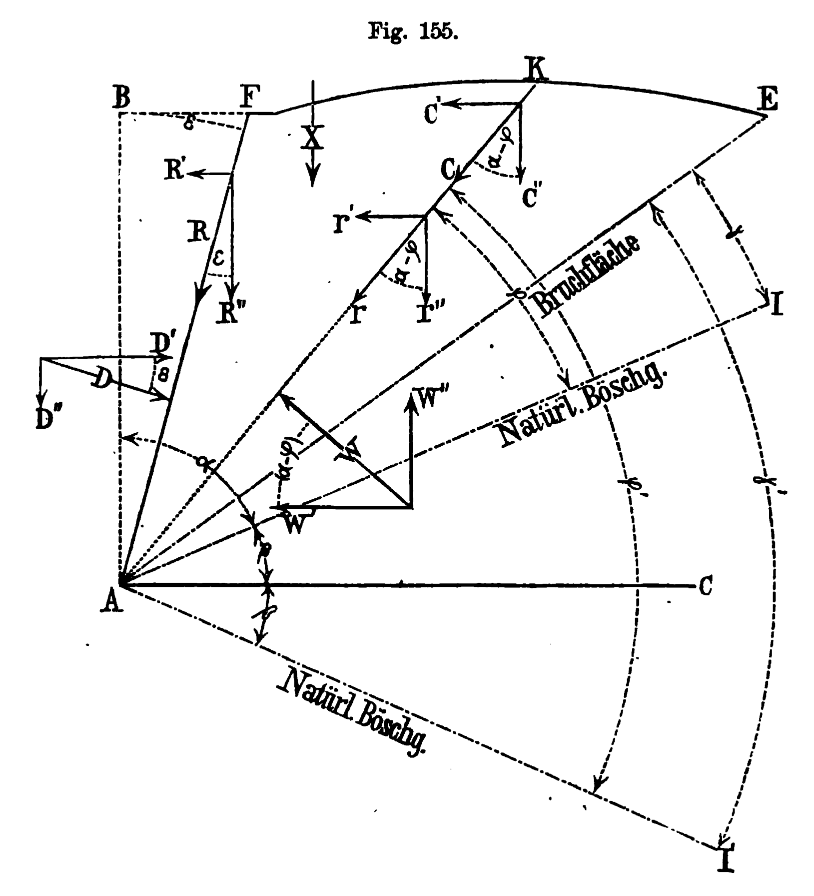
Der erwähnten Verschiebung setzen sich in der Bruchfläche die Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den Erdtheilchen entgegen, an der Wand aber tritt als Widerstand noch die Reibung

auf, welche dort in Folge des Anpressens derselben an das Erdreich entsteht. Dieser Reibungswiderstand, er sei R, ist eben so wie in der Gleichung (6) auszudrücken, nämlich:

$$R = \mu D = D \operatorname{tg} \varrho \qquad (393),$$

wobei $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ den diessfälligen Reibungscoefficienten bezeichnet.

Fig. 155.



Nur geht die Richtung desselben nicht, wie in der Fig. 18, nach aufwärts, sondern, wie in der Fig. 155 bereits angedeutet, nach abwärts. Im Uebrigen gilt in dieser Beziehung wieder dasselbe, worauf bei der Besprechung des activen Erddruckes vermittelst der Relationen (8) bis (14) aufmerksam gemacht wurde.

Die beiden Kräfte D und R sind es nun, welche unmittelbar an der Wand auftreten, und durch den in Betracht stehenden Grenzzustand des Gleichgewichtes im Erdreiche bedingt werden, wonach nämlich die Reibungs- und Cohäsionswiderstände in der Bruch- oder gefährlichen Fläche geradezu aufgehoben werden müssen. In jeder anderen Böschungsfläche $\overline{AK}$, welche von der Bruchböschung abweicht, also mit der natürlichen Böschung $\overline{AI}$ nicht den Bruchwinkel γ, sondern einen davon verschiedenen Winkel (dieser sei φ) einschliesst, werden die bezüglichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände nicht vollständig aufgehoben, sondern es bleibt ein Theil derselben unbeansprucht zurück, der zwar in der Lagerfläche schlummert, indessen zur Wirksamkeit nicht erweckt wird.

Betrachtet man daher den Gleichgewichtszustand irgend eines Erdprismas AFK, an welches vorne die Wand angepresst wird, und welches rückwärts die unter dem Winkel φ geneigte Lagerfläche hat, so treten hiebei folgende Kräfte auf:

1. Die den passiven Normal-Erddruck an die Wand repräsentirende, von φ offenbar unabhängige Kraft ...... D, welche zugleich die Stärke anzeigt, mit welcher die Wand an das Erdreich in offensiver Weise angepresst wird;

2. Der an der Wand entstehende, von φ gleichfalls nicht abhängige Reibungswiderstand .... R, welcher sich dort der Verschiebung der Erdtheilchen nach aufwärts entgegensetzt;

3. das mit φ variable Gewicht des in Betracht stehenden Erdprismas .... AFK, nämlich .... $X = g \cdot \triangle AFK$, wenn g das Gewicht der cubischen Einheit des Erdreiches vorstellt;

4. die von φ abhängige normale Reaction .... W des unter der Lagerfläche $\overline{AK}$ gelegenen Erdreiches;

5. Die Reibung.............................. r
und

6. die Cohäsion.............................. C,

welche zwei Widerstände sich dem Verschieben des Erdreiches in der Lagerfläche $\overline{AK}$ entgegensetzen, wobei die Grösse dieser Widerstände von φ abhängt, und der Richtungspfeil derselben offenbar nach abwärts anzunehmen ist, weil die Verschiebungstendenz daselbst nach aufwärts geht.

Diese sechs Kräfte müssen unter einander im Gleichgewichte sein. Man bemerkt bei der Vergleichung der in Betracht stehenden Figur 155 mit der früheren Figur 18, welche sich auf den activen Erddruck bezieht, dass sich dieselben nur dadurch unterscheiden, dass die Widerstandskräfte R, r und C dermalen im entgegengesetzten Sinne auftreten, während alles Uebrige in der Hauptsache dasselbe bleibt.

Indem man sich der Kürze wegen behufs des weiteren Vorgehens zur Gewinnung der nöthigen Bedingungsrelationen für das Gleichgewicht auf die in Ansehung des activen Erddruckes geschehenen Ausführungen auf den Seiten 34, 35 und 36, welche auch gegenwärtig anwendbar sind, bezieht, und indem man die dortigen Bezeichnungen und die allgemeine Bedeutung derselben beibehält, ergibt sich Folgendes:

$$\left.\begin{aligned} r &= f' W \leqq f W \\ C &= c' S \leqq c S \end{aligned}\right\} \quad (394)$$

$$\left.\begin{aligned} f &= \operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha \\ f' &= \operatorname{tg} \beta' = \operatorname{cotg} \alpha' \end{aligned}\right\} \quad (395)$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta'} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha'} \leqq 1 \quad (396)$$

$$\left.\begin{aligned} (\alpha + \beta) &= (\alpha' + \beta') = 90^0 \\ \beta' &\leqq \beta, \quad \alpha' \geqq \alpha \end{aligned}\right\} \quad (397)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} D' &= D \cos \varepsilon \\ D'' &= D \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} R' &= R \sin \varepsilon = D \operatorname{tg} \varrho \sin \varepsilon \\ R'' &= R \cos \varepsilon = D \operatorname{tg} \varrho \cos \varepsilon \end{aligned} \\
&\left.\begin{aligned} W' &= W \cos(\alpha - \varphi) \\ W'' &= W \sin(\alpha - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} r' &= r \sin(\alpha - \varphi) \\ &= W \operatorname{cotg} \alpha' \sin(\alpha - \varphi) \\ r'' &= r \cos(\alpha - \varphi) \\ &= W \operatorname{cotg} \alpha' \cos(\alpha - \varphi) \end{aligned} \\
&C' = C \sin(\alpha - \varphi) = c' S \sin(\alpha - \varphi) \\
&C'' = C \cos(\alpha - \varphi) = c' S \cos(\alpha - \varphi)
\end{aligned}\right\} \quad (398)$$

$$\left.\begin{array}{l} D' - R' - W' - r' - C' = 0 \ldots\ldots\ldots \\ X + D'' + R'' - W'' + r'' + C'' = 0 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (399)$$

$$D[\cos\varepsilon - \operatorname{tg}\varrho\sin\varepsilon] - W[\cos(\alpha-\varphi) + \operatorname{cotg}\alpha'\sin(\alpha-\varphi)] -$$
$$- c'S\sin(\alpha-\varphi) = 0$$

$$X + D[\sin\varepsilon + \operatorname{tg}\varrho\sin\varepsilon] - W[\sin(\alpha-\varphi) - \operatorname{cotg}\alpha'\cos(\alpha-\varphi)] +$$
$$+ c'S\cos(\alpha-\varphi) = 0$$

$$D\frac{\cos(\varrho+\varepsilon)}{\cos\varrho} - W\frac{\sin(\alpha+\alpha'-\varphi)}{\sin\alpha'} - c'S\sin(\alpha-\varphi) = 0$$

$$X + D\frac{\sin(\varrho+\varepsilon)}{\cos\varrho} + W\frac{\cos(\alpha+\alpha'-\varphi)}{\sin\alpha'} + c'S\cos(\alpha-\varphi) = 0$$

$$\frac{W}{\sin\alpha'} = \frac{D\cos(\varrho+\varepsilon)}{\cos\varrho\sin(\alpha+\alpha'-\varphi)} - \frac{c'S\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\alpha'-\varphi)}$$

$$X + \frac{D}{\cos\varrho}[\sin(\varrho+\varepsilon) + \cos(\varrho+\varepsilon)\operatorname{cotg}(\alpha+\alpha'-\varphi)] +$$
$$+ c'S[\cos(\alpha-\varphi) - \sin(\alpha-\varphi)\operatorname{cotg}(\alpha+\alpha'-\varphi)] = 0$$

$$X + D\frac{\cos(\alpha+\alpha'-\varrho-\varepsilon-\varphi)}{\cos\varrho\sin(\alpha+\alpha'-\varphi)} + c'S\frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha+\alpha'-\varphi)} = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt für **den passiven normalen Erddruck**:

$$D = \frac{-\cos\varrho}{\cos(\alpha+\alpha'-\varrho-\varepsilon-\varphi)}[X\sin(\alpha+\alpha'-\varphi) + c'S\sin\alpha'] \quad (400)$$

Dieser Werth kann, wie bereits oben bemerkt, von φ nicht abhängen, er muss also für verschiedene φ constant werden, was nur dadurch möglich wird, dass α' und c' sich hiernach entsprechend verändern.

Geht man sogleich auf die Bruchfläche über, so wird $\varphi = \gamma$, $X = G$, $S = A$, $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$, sonach erhält man:

$$D = -\frac{\cos\varrho}{\cos(2\alpha-\varrho-\varepsilon-\gamma)}[G\sin(2\alpha-\gamma) + cA\sin\alpha] \quad (401).$$

Diese Gleichung ist geeignet, den passiven Normaldruck des Erdreiches an die Wand zu bestimmen, wenn es gelingt, den Bruchwinkel γ ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke kann man ähnliche Erwägungen, wie auf den Seiten 38 und 39, anstellen.

Würde man nämlich in der allgemeinen Gleichung (400) $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$ setzen, d. h. sich vorstellen, dass in der Fläche $\overline{AK}$ die Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den dortigen Erdtheilchen in ihrer ganzen möglichen Grösse der Ver-

schiebung entgegenwirken könnten, so müsste offenbar der hieraus resultirende passive Normaldruck ein grösserer, als der thatsächlich eintretende sein, d. h. ein Resultat hiefür zum Vorschein kommen, welches, wenn es mit $\varDelta$ bezeichnet wird, zu dem wirklichen Passivdrucke in einer Beziehung steht, die durch die Ungleichung:

$$\varDelta > D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (402)$$

ausgedrückt erscheint, wobei wegen $\alpha = \alpha'$ und $c = c'$, der Werth für $\varDelta$ mit:

$$\varDelta = -\frac{\cos \varrho}{\cos (2\alpha - \varrho - \varepsilon - \varphi)} [X \sin (2\alpha - \varphi) + c S \sin \alpha] \,.. \; (403),$$

zu bemessen ist.

Es wird daher die Differenz $(\varDelta - D)$, welche mit U bezeichnet werden mag, im Allgemeinen jedenfalls eine positive sein, und nur in dem Falle, wenn die Fläche $\overline{AK}$ mit der Bruchfläche $\overline{AE}$ zusammenfällt, vollends verschwinden, d. h. insbesondere $\varDelta = D$ werden. Man kann daher, auch diesen Fall im Auge behaltend, schreiben:

$$U = \varDelta - D = \frac{-\cos \varrho \, [X \sin (2\alpha - \varphi) + c S \sin \alpha]}{\cos (2\alpha - \varrho - \varepsilon - \varphi)} - D \overline{\gtrless} 0 \quad (404).$$

Ist auch nach der vorigen Erörterung $\varDelta$ eigentlich eine blos eingebildete Grösse, so hat dennoch die Differenz U eine reelle Bedeutung. Indem nämlich D der wirkliche passive Normaldruck ist, dagegen $\varDelta$ denjenigen vorstellt, welcher sich ergäbe, falls in der betrachteten Fläche $\overline{AK}$ die ganzen möglichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den dortigen Erdtheilchen absorbirt werden könnten, letzteres aber nur für die Bruchfläche eintritt; so leuchtet ein, dass $U = (\varDelta - D)$ von dem Ueberschusse an diesen Widerständen herrührt, welcher durch die vermittelst der Wand übertragene Offensivpressung an das Erdreich nicht aufgehoben wird, sondern gleichsam in der Fläche $\overline{AK}$ aufgespeichert bleibt, und zur Folge hat, dass daselbst im Beginne des Ausweichens der Wand insolange keine Trennung zwischen den Erdtheilchen eintreten kann, als $\overline{AK}$ eine von $\overline{AE}$ verschiedene Neigung hat. Aus der fraglichen Differenz ergibt sich somit gewissermassen der Anhaltspunkt zur Beurtheilung

des Grades an Sicherheit, mit welchem das Erdreich in der Fläche $\overline{AK}$, ungeachtet der factischen Tendenz zum Hinaufschieben, noch immer aneinander haften bleibt. Offenbar muss die Gefahr eines Bruches in dem Erdreiche zunächst unter demjenigen Neigungswinkel $\varphi = \gamma$ auftreten, wofür die fragliche Differenz $U = (\varDelta - D)$ ein Minimum und insbesondere $= 0$ wird, weil dann in der dazu gehörigen Bruchfläche $\overline{AE}$ die dort schlummernden Reibungs- und Cohäsionswiderstände vollständig zur Thätigkeit erweckt werden, und kein unbeanspruchter Ueberschuss davon zurückbleibt.

Indem aber D constant ist, erreicht die Differenz $U = (\varDelta - D)$ ihr Minimum, wenn die Grösse $\varDelta$ ihren kleinsten Werth annimmt, und da das gedachte Minimum schliesslich gleich Null sein muss, so erhält man: $D = \min \varDelta$, daher, weil in diesem Falle in der Relation (403) $\varphi = \gamma$, $X = G$ und $S = A$ zu setzen ist, übereinstimmend mit der Gleichung (401):

$$D = \min \varDelta = \frac{-\cos \varrho}{\cos(2\alpha - \varrho - \varepsilon - \gamma)} [G \sin(2\alpha - \gamma) + cA \sin \alpha] \quad (405).$$

Der Vorgang zur Berechnung des passiven Erddruckes ist hiernach folgender:

1. Man stelle zunächst die Gleichung (403):

$$\varDelta = \frac{-\cos \varrho}{\cos(2\alpha - \varrho - \varepsilon - \varphi)} [X \sin(2\alpha - \varphi) + cS \sin \alpha]$$

auf, worin X und S Functionen von φ sind, und untersuche, bei welchem Werthe von φ der Ausdruck für $\varDelta$ seinen kleinsten Werth erhält.

In der Voraussetzung, dass dieser Ausdruck geeignet ist, ein analytisches Minimum anzunehmen, suche man

2. den ersten Differential-Quotienten von $\varDelta$ nach φ, um denselben gleich Null zu setzen.

Also $\frac{d\varDelta}{d\varphi} = 0$ ....(406).

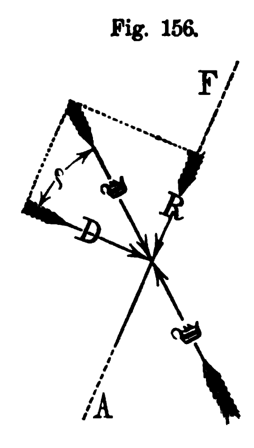
Der hieraus sich ergebende Werth für φ bedeutet, wenn hiefür $\frac{d^2\varDelta}{d\varphi^2}$ positiv wird, den Bruchwinkel γ, wonach dann auch die dazu gehörigen Grössen $X = G$ und $S = A$ bestimmt werden können.

3. Wird endlich der so ermittelte Werth von $\varphi = \gamma$ in die unter Punkt 1 erwähnte Gleichung für Δ substituirt, so erhält man das in der Gleichung (405) angedeutete Minimum von Δ, welches sofort die Grösse des normalen passiven Erddruckes (D) repräsentirt.

4. Insoferne es vorkommen sollte, dass der Ausdruck für Δ eines analytischen Minimums nicht fähig ist, oder, wenn dies auch der Fall wäre, hiefür ein unbrauchbarer Werth von φ resultirt, muss man auf die Bestimmung des numerischen Minimums übergehen.

Setzt man die beiden zunächst an der Wand auftretenden Kräfte D und R zu einer Mittelkraft zusammen, welche $\mathfrak{P}$ heissen soll, so kann diese letztere auch als die schiefe Druckkraft angesehen werden, welche, von der Wand ausgehend, auf das Erdreich in dem Augenblicke wirken muss, als der Grenzzustand des Gleichgewichtes erreicht wird.

Fig. 156.



Als gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet, ist daher der schiefe passive Erddruck oder der schiefe Widerstand der Erde anzunehmen, welcher offenbar die Resultirende aus den Kräften X, W, r und C sein wird. (Siehe Fig. 156). Zwischen dem schiefen und dem normalen passiven Erddrucke, dann dem Reibungswiderstande an der Wand bestehen übrigens dieselben Relationen, wie solche schon auf Seite 27 in den Gleichungen (7) bei Betrachtung des activen Erdruckes aufgestellt wurden.

Man hat somit:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \sqrt{D^2 + R^2} = \frac{D}{\cos\varrho} = \frac{R}{\sin\varrho} \;\ldots\ldots\ldots \\ D &= \sqrt{\mathfrak{P}^2 - R^2} = \mathfrak{P}\cos\varrho = R\operatorname{cotg}\varrho \;\ldots\ldots \\ R &= \sqrt{\mathfrak{P}^2 - D^2} = \mathfrak{P}\sin\varrho = D\operatorname{tg}\varrho \;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (407).$$

Ist daher D auf Grundlage der obigen Regeln bestimmt, so können auch $\mathfrak{D}$ und R berechnet werden.

§. 87.

Allgemeine Formel zur Berechnung des passiven Erddruckes. II. Methode (neu). Diese Methode ist der Hauptsache nach mit derjenigen übereinstimmend, welche im §. 14 bei der Bestimmung des activen Erddruckes angegeben wurde. Man setze nämlich gleich von vorne herein sowohl die in der Figur 155 mit D und R, als auch die mit W und r angedeuteten Kräfte je zu einer Resultirenden zusammen, von welchen die erste, wie in der Fig. 156, mit $\mathfrak{D}$, die zweite aber mit $\mathfrak{W}$ bezeichet wird. Die Bedeutung von $\mathfrak{D}$ ist bereits am Schlusse des vorigen §. angegeben, jene von $\mathfrak{W}$ aber stellt (ähnlich, wie

Fig. 157.

in der Fig. 19) den schiefen Widerstand des unter der Lagerfläche $\overline{AK}$ liegenden Erdreiches mit gleichzeitiger Rücksichts-

nahme auf die dort auftretende Reibung r vor. Der Winkel, den der normale Widerstand W mit dem schiefen einschliesst, ist, eben so wie in der Fig. 19, mit $\beta' = 90^0 - \alpha'$ zu bemessen, nur liegt dermalen dieser Winkel an der entgegengesetzten Seite des Lothes auf die Lagerfläche $\overline{AK}$. Hiernach findet die Darstellung in der Fig. 157 ihre hinreichende Erklärung. Nunmehr hat man blos die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, X und C, welche unter einander im Gleichgewichte stehen müssen.

Beobachtet man behufs der sofortigen Untersuchung dieses Gleichgewichtes das Verfahren, wie im §. 14, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}' - \mathfrak{W}' - C' &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X + \mathfrak{P}'' - \mathfrak{W}'' + C'' &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{(408)},$$

worin man, wegen $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = 90^0$, zu setzen hat:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \mathfrak{P}\cos(\varrho + \varepsilon) \\ \mathfrak{P}'' &= \mathfrak{P}\sin(\varrho + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}' &= \mathfrak{W}\sin(\beta + \beta' + \varphi) \\ &= \mathfrak{W}\sin(\alpha + \alpha' - \varphi) \end{aligned}\right\} \ldots \\ &\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}'' &= \mathfrak{W}\cos(\beta + \beta' + \varphi) \\ &= \mathfrak{W}\cos(\alpha + \alpha' - \varphi) \end{aligned}\right\} \ldots \end{aligned} \\ &\left.\begin{aligned} C' &= C\sin(\alpha - \varphi) = c' S \sin(\alpha - \varphi) \ldots \\ C'' &= C\sin(\alpha - \varphi) = c' S \cos(\alpha - \varphi) \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \end{aligned}\right\} \text{(409)}.$$

Hiernach ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}\cos(\varrho + \varepsilon) - \mathfrak{W}\sin(\alpha + \alpha' - \varphi) - c' S \sin(\alpha - \varphi) &= 0 \\ \mathfrak{P}\sin(\varrho + \varepsilon) + \mathfrak{W}\cos(\alpha + \alpha' - \varphi) + c' S \cos(\alpha - \varphi) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(410)},$$

woraus durch Elimination von $\mathfrak{W}$ folgt:

$$\mathfrak{P} = -\frac{X\sin(\alpha + \alpha' - \varphi) + c' S \sin\alpha'}{\cos(\alpha + \alpha' - \varrho - \varepsilon - \varphi)} \ldots\ldots \text{(411)},$$

daher, indem man jetzt auf den normalen passiven Erddruck D übergeht, wegen $D = \mathfrak{P}\cos\varrho$, auch:

$$D = -\frac{\cos\varrho}{\cos(\alpha + \alpha' - \varrho - \varepsilon - \varphi)}\left[X\sin(\alpha + \alpha' - \varphi) + c' S \sin\alpha'\right],$$

welche Relation mit der im vorigen §. gefundenen (400) übereinstimmt, daher, indem hieran die gleichen Raisonnements, wie dort, angeknüpft werden, der im gegenwärtigen §. besprochenen Untersuchungsmethode nichts mehr beizufügen ist.

§. 88.

Allgemeine Formel zur Bestimmung des passiven Erddrucks. Aeltere Methode, wonach ein Erdprisma vom kleinsten passiven Erddrucke oder vom kleinsten Widerstande zum Vorschein kommt. Indem die vorstehenden neuen Methoden in dem vorliegenden Werke zum ersten Male zur Veröffentlichung gelangen, soll auch der bisher üblichen älteren Untersuchungmethode gedacht werden. Hiernach berechnet man zunächst den passiven Druck, welchen ein beliebiges Erdprisma AFK (Fig. 155, 157) gegen die Wand unter der idealen Voraussetzung ausüben müsste, wenn in der Lagerfläche des Erdprismas $(\overline{AK})$ der Bruch eintreten könnte, so dass dann in dieser Lagerfläche die sämmtlichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände zwischen den Erdtheilchen absorbirt würden. Hiebei kann man natürlicher Weise gleichfalls auf zwei Arten vorgehen, je nachdem man die Reibungswiderstände an der Wand $\overline{AF}$ und in der Lagerfläche $\overline{AK}$ abgesondert, oder aber in gleichzeitiger Verbindung mit den normal auf jene Ebenen wirkenden Kräften einführt. Gesetzt, man geht nach der erstbezeichneten Art vor, so gelangt man zu folgender Betrachtung:

Der normal auf die Wand resultirende Erddruck in dem eben angedeuteten Sinne, bezüglich des Erdprismas AFK, wird offenbar durch eine Formel ausgedrückt sein, welche man eben so wie jene unter (400) erhält, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt zwischen α' und α, sowie zwischen c' und c keine Differenz anzunehmen, also gleich vom Anfange her $\alpha' = \alpha$ und $c' = c$ zu setzen ist.

Nach diesem Vorgange würde man für

$$D = -\frac{\cos\varrho}{\cos(2\alpha - \varrho - \varepsilon - \varphi)}\,[X\sin(2\alpha - \varphi) + cS\sin\alpha],$$

also genau dasselbe Resultat finden, welches im §. 86 mit Δ bezeichnet und in der Gleichung (403) dargestellt wurde. Dieser Druckwerth ist jedoch mit φ variabel, würde daher bald grösser,

bald kleiner werden, je nachdem man sich die unter dem Winkel φ gedachte Lagerfläche $\overline{AK}$ mehr oder weniger geneigt vorstellt.

Die Autoren*), welche sich seither mit diesem Gegenstande beschäftigten, haben zwar die Formel für den Erddruck nicht in jener allgemeinen Weise, wie in der vorigen Gleichung, dargestellt, sondern sich hiebei mehr oder weniger auf besondere Fälle beschränkt; doch ergab sich überall die Wahrnehmung, dass das Resultat für den Erddruck mit der verschiedenen Grösse des Erdprismas, welches als verschiebbar gedacht wird, veränderlich ausfallen würde, so dass ohne die Auffindung eines geeigneten Auskunftsmittels das fragliche Resultat unbestimmt bleiben müsste.

Um nun dieser Unbestimmtheit zu entgehen, griff man zu einem ähnlichen Auskunftsmittel, wie in der älteren Theorie des activen Erddruckes, indem man nämlich sagte:

Es leuchte ein, dass von allen Erdprismen, welche als verschiebbar gedacht werden können, im Beginne der Gleichgewichtsstörung dasjenige zunächst abgeschoben werden müsse, welches den kleinsten Widerstand oder den kleinsten passiven Erddruck gegen die Wand ausübt, d. h. für welches der Werth von D ein Minimum wird.

Dieser Minimalwerth sei sodann der zu suchende passive Erddruck oder Widerstand der Erde.

Von diesem Gesichtspunkte aus würde daher ein Erdprisma vom kleinsten passiven Drucke oder vom kleinsten Widerstande existiren.

Da nun, wie bereits bemerkt, die vorige Formel für D mit der früher unter (403) für Δ gegebenen vollkommen übereinstimmt, und nach den in den §§. 86 und 87 erläuterten neuen Methoden ebenfalls die Nothwendigkeit sich ergibt, den Werth für Δ zu

*) Moseley in seinem bereits auf Seite 46 citirten Werke. Weisbach in seinem Lehrbuche der Ingenieur- und Maschinenmechanik. Zweiter Theil. Vierte Auflage. 1865.

einem Minimum zu machen, um den Bruchwinkel und das Bruchprisma zu finden, so leuchtet ein, dass man allerdings auch nach der älteren Methode, gestützt auf das Princip des Prismas vom kleinsten passiven Erddrucke, zu den richtigen Schlussresultaten gelangt; gleichwohl involvirt diese Methode ein Missverständniss, indem man hiedurch unwillkürlich zu der Ansicht geleitet wird, als würde das Bruchprisma einen kleineren Widerstand gegen die Wand ausüben, als jedes der übrigen Erdprismen. Dies ist aber keineswegs der Fall. Thatsächlich muss jedes Erdprisma, das bis zum Fusse der Wand reicht, den gleichen Widerstand, wie das Bruchprisma, leisten. Eine Ungleichheit in den Resultaten für den passiven Druck der verschiedenen Erdprismen erscheint nur insoferne, als man sich eben vorstellt, es werden in der jeweilig gedachten Lagerfläche $\overline{AK}$ stets die gesammten Reibungs- und Cohäsionswiderstände in Folge der Abschiebungswirkung aufgezehrt; und wenn auch diese Vorstellung an und für sich auf die weiteren Untersuchungen nicht störend einwirkt, so bleibt solche gleichwohl insoferne unrichtig, als die erwähnte Aufzehrung aller Reibungs- und Cohäsionswiderstände nur in der Bruchfläche, sonst aber in keiner anderen, factisch eintritt. Es ist also angezeigt, diese ältere Theorie fallen zu lassen.

§. 89.

Uebergang von dem passiven Erddrucke auf den hydrostatischen Druck. Es leuchtet schon von vorne ein, dass in der Theorie des passiven Erddruckes auch die Gesetze der Hydrostatik enthalten sein und insbesondere dann zum Vorschein kommen müssen, wenn für das Hinterfüllungsmateriale die sämmtlichen Reibungs- und Cohäsionswiderstände gleich Null gesetzt werden. In diesem Falle ist in den bezüglichen Formeln für den passiven Erddruck $\beta' = \beta = 0$, also $\alpha' = \alpha = 90^0$, ferner $c' = c = 0$ und $\varrho = 0$ zu substituiren. Geschieht dies, und geht man im Weiteren wie im §. 16 vor, so findet man in der That den oben gemachten Ausspruch bestätiget. Zugleich ergibt sich,

dass in diesem Falle eine bestimmte Bruchrichtung nicht entsteht, vielmehr jede beliebig geneigte, durch den Wandfuss gehende Fläche als Bruchfläche angesehen werden kann, gerade so, wie dies auch in Bezug auf den activen Druck tropfbarer Flüssigkeiten gefunden ward. Ueberhaupt ist hiebei zwischen dem activen und dem passiven Drucke kein Unterschied vorhanden.

§. 90.

Umstaltung der Formeln für den passiven Erddruck zum bequemeren Gebrauche. Zählt man (Fig. 155) die Böschungswinkel für die Lagerfläche $\overline{AK}$ und für die Bruchböschung nicht von der ansteigenden natürlichen Böschung $\overline{AI}$, sondern von der abfallenden $\overline{AI'}$ an, welche nämlich durch den Wandfuss A nach abwärts, um den Winkel β gegen den Horizont geneigt, läuft, und setzt man

$$\sphericalangle KAI' = \varphi' \text{ und } \sphericalangle EAI' = \gamma' \dots\dots\dots\dots (412),$$

so hat man:

$\varphi = (\varphi' - 2\beta)$, $\gamma = (\gamma' - 2\beta)$, daher, wegen $\alpha = (90^0 - \beta)$, und zwar zu Folge der Gleichung (403):

$$\varDelta = \frac{\cos\varrho}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)} [X \sin\varphi' + cS \sin\alpha] \dots\dots\dots (413),$$

ferner laut Relation (405):

$$D = \min\varDelta = \frac{\cos\varrho}{\cos(\gamma' + \varepsilon + \varrho)} [G \sin\gamma' + cA \sin\alpha] \quad (414).$$

Die Gleichungen (407) reihen sich in unveränderter Form hier an.

Diese neuen Ausdrücke für $\varDelta$ und D haben eine bemerkenswerthe Aehnlichkeit mit jenen unter (28) und (30), welche auf den activen Erddruck sich beziehen, indem man nämlich daselbst nur φ' und γ' anstatt φ und γ zu setzen, und hiebei das Zeichen von ϱ und c in das entgegengesetzte umzuwandeln hat.

§. 91.

Formeln für den passiven Erddruck unter besonderen Voraussetzungen.

A) Vernachlässiget man die Reibung an der Wand, so ist $\varrho = 0$, $R = 0$, $D = \mathfrak{D}$. und man findet nach den Gleichungen (413) und (414):

$$\left.\begin{aligned} D = \min \varDelta &= \min \left[\frac{X \sin \varphi' + c\, S \sin \alpha}{\cos(\varphi' + \varepsilon)}\right] \ldots\ldots \\ &= \frac{G \sin \gamma' + c\, A \sin \alpha}{\cos(\gamma' + \varepsilon)} \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (415).$$

Wird überdies die Cohäsion $c = 0$ gesetzt, so vereinfacht sich der eben gefundene Ausdruck, wie folgt:

$$\begin{aligned} D = \min \varDelta &= \min \left[\frac{X \sin \varphi'}{\cos(\varphi' + \varepsilon)}\right] \\ &= \frac{G \sin \gamma'}{\cos(\gamma' + \varepsilon)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (416), \end{aligned}$$

und wenn hiebei die Wand auch noch vertical steht, wegen $\varepsilon = 0$:

$$D = \min \varDelta\, [X \operatorname{tg} \varphi'] = G \operatorname{tg} \gamma' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (417).$$

B) Nimmt man den Reibungswiderstand an der Wand in Rechnung, hiebei aber die Cohäsion zwischen den Erdtheilchen $c = 0$ an, so hat man:

$$\begin{aligned} D = \min \varDelta &= \min \left[\frac{X \cos \varrho \sin \varphi'}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)}\right] \\ &= \frac{G \cos \varrho \sin \gamma'}{\cos(\gamma' + \varepsilon + \varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (418), \end{aligned}$$

welche Gleichung für den Fall, in welchem die Reibung an der Wand ihr Maximum erreicht, also $\varrho = (90^0 - \alpha)$ wird, übergeht in:

$$\begin{aligned} D = \min \varDelta &= \min \left[\frac{X \sin \alpha \sin \varphi'}{\sin(\alpha - \varepsilon - \varphi')}\right] \\ &= \frac{G \sin \alpha \sin \gamma'}{\sin(\alpha - \varepsilon - \gamma')} \ldots\ldots\ldots\ldots (419). \end{aligned}$$

Zweiter Abschnitt.

Passiver Erddruck gegen eine Wand ohne Rücksicht auf die Reibung zwischen derselben und der Erde.

§. 92.

Einfluss der Weglassung dieser Reibung. Es leuchtet schon von vorne herein ein, dass durch die Weglassung der gedachten Reibung der normale passive Erddruck gegen eine

Wand rechnungsmässig kleiner als in der Wirklichkeit entfällt, weil diese Reibung jedenfalls als eine der Widerstandskräfte gegen das Abschieben der Erde mitwirkt. Analytisch ergibt sich diese Thatsache aus der Betrachtung der Formel (413) für die Grösse $\varDelta$:

$$\varDelta = \frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)} \left[X \sin \varphi' + c S \sin \alpha \right],$$

welche nämlich, um den normalen passiven Erddruck D zu erhalten, in Bezug auf φ' zu einem Minimum zu machen ist.

Sieht man vorerst von diesem Minimalwerthe ab und betrachtet den vorstehenden Ausdruck in seiner ganz allgemeinen Form, so hat man, um den Einfluss der Reibung, welche zwischen Erde und Stützwand stattfindet, d. h. um den Einfluss des Reibungswinkels ϱ zu untersuchen, blos dem Factor $\frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)}$ die Aufmerksamkeit zuzuwenden; weil eben dieser Factor mit jenem Reibungswinkel variabel ist, während der andere Factor innerhalb der Eckklammern hievon nicht abhängt.

Setzt man den allgemeinen Factor:

$$\frac{\cos \varrho}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)} = F(\varrho),$$

so ist der erste Differential-Quotient in Bezug auf ϱ:

$$\frac{d F(\varrho)}{d \varrho} = \frac{\sin(\varphi' + \varepsilon)}{\cos^2(\varphi' + \varepsilon + \varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (420),$$

also positiv, was anzeigt, dass $F(\varrho)$ mit der Zunahme des Reibungswinkels wächst, woraus folgt, dass $\varDelta$ und $D = \min \varDelta$ für $\varrho = 0$ kleiner werden, als wenn ϱ nicht gleich Null angenommen wird. Indem man nun in den Untersuchungen des laufenden Abschnittes $\varrho = 0$ setzt, also von dem Einflusse der Reibung zwischen Erdreich und Wand abstrahirt, wird sich offenbar ein geringerer Widerstand des Erdreiches gegen die Wand, als solcher wirklich auftritt, durch die Rechnung ergeben, was auf die Stabilitätsverhältnisse desselben nur günstig einwirken kann. Für $\varrho = 0$ gelten die Relationen (415), ausserdem aber hat man:

$$D = D \text{ und } R = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (421).$$

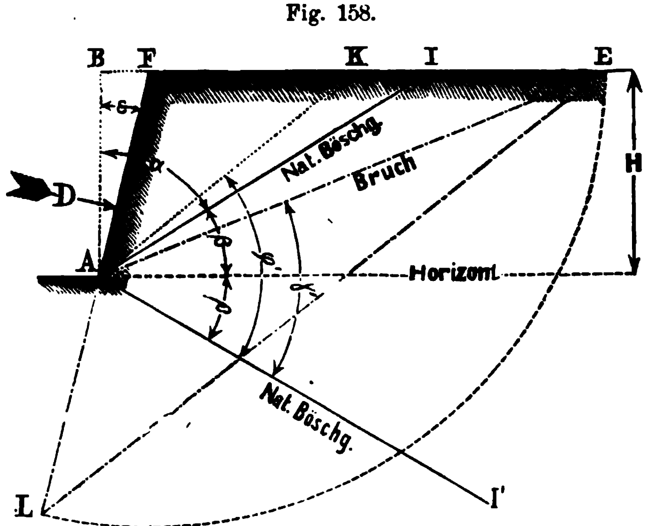
Erstes Capitel.

Passiver Erddruck an eine um den Winkel ε gegen das Loth geneigte Wand von der Höhe H, wenn das anliegende Erdreich eine horizontale Oberfläche im gleichen Niveau mit der Wandkrone hat.

§. 93.

Gefährliche oder Bruchböschung $\overline{AE}$, gefährliches oder Bruchprisma AFE und Grösse des passiven

Fig. 158.



Erddruckes in diesem Falle. (Fig. 158.) Nach den im §. 86 aufgestellten Regeln hat man zunächst die Gleichung (403), oder die umgestaltete (415), worin

$$\varDelta = \frac{X \sin \varphi' + c\, S \sin \alpha}{\cos(\varphi' + \varepsilon)}$$

ist, in's Auge zu fassen, und den Werth von φ' = Bruchwinkel γ' aufzusuchen, wofür $\varDelta$ ein Minimum wird.

Im vorliegenden Falle ist insbesondere:

$$S = \overline{AK} = \frac{H}{\cos(\alpha + 2\beta - \varphi')} = -\frac{H}{\cos(\alpha + \varphi')},$$

$$X = g . \triangle AFK = \tfrac{1}{2} g . \overline{AB} . \overline{FK}$$
$$= \tfrac{1}{2} gH (\overline{BK} - \overline{BF}) = \tfrac{1}{2} gH^2 [\mathrm{tg} \measuredangle BAK - \mathrm{tg}\, \varepsilon]$$
$$= \tfrac{1}{2} gH^2 [\mathrm{tg}\, (\alpha + 2 \beta - \varphi') - \mathrm{tg}\, \varepsilon]$$
$$= - \tfrac{1}{2} gH^2 [\mathrm{tg}\, (\alpha + \varphi') + \mathrm{tg}\, \varepsilon]$$
$$= - \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \frac{\sin (\alpha + \varepsilon + \varphi')}{\cos (\alpha + \varphi')},$$

indem man hiebei beachtet, dass $\beta = (90^0 - \alpha)$ ist.

Hiernach erhält man:

$$\varDelta = - \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \varphi' \sin (\alpha + \varepsilon + \varphi') + \frac{2c}{gH} \sin \alpha \cos \varepsilon}{\cos (\alpha + \varphi') \cos (\varphi' + \varepsilon)} \right].$$
$$= - \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\sin \varphi' \sin (\alpha + \varepsilon + \varphi') + a}{\cos (\alpha + \varphi') \cos (\varphi' + \varepsilon)} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (422)$$

wobei als vorläufige Abkürzung:

$$a = \frac{2c}{gH} \sin \alpha \cos \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (423)$$

gesetzt wird.

Das Minimum von $\varDelta$ nach φ' findet statt, wenn das Gleiche in Bezug auf den Factor:

$$U = - \frac{\sin \varphi' \sin (\alpha + \varepsilon + \varphi') + a}{\cos (\alpha + \varphi') \cos (\varphi' + \varepsilon)}$$

eintritt, daher man — anstatt $\frac{d \varDelta}{d \varphi'} = 0$ — unmittelbar $\frac{d U}{d \varphi'} = 0$ setzen kann.

Vorher aber erscheint es zweckmässig, den Ausdruck für U in einer zum Differenziren bequemen Form darzustellen, was dadurch geschieht, dass man die goniometrischen Relationen:

$$\sin \varphi' \sin (\alpha + \varepsilon + \varphi') = \tfrac{1}{2} [\cos (\alpha + \varepsilon) - \cos (\alpha + \varepsilon + 2 \varphi')]$$
$$\cos (\alpha + \varphi') \cos (\varphi' + \varepsilon) = \tfrac{1}{2} [\cos (\alpha - \varepsilon) + \cos (\alpha + \varepsilon + 2 \varphi')]$$

berücksichtiget, und hiernach schreibt:

$$U = \frac{\cos (\alpha + \varepsilon + 2 \varphi') - \cos (\alpha + \varepsilon) - 2a}{\cos (\alpha + \varepsilon + 2 \varphi') + \cos (\alpha - \varepsilon)}.$$

Zum Behufe einer weiteren Abkürzung setze man:

$$b = \cos (\alpha + \varepsilon) + 2a = \cos (\alpha + \varepsilon) + \frac{4c}{gH} \sin \alpha \cos \varepsilon \ldots (424)$$
$$b' = \cos (\alpha - \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (425)$$
$$(\alpha + \varepsilon + 2 \varphi') = u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (426),$$

so dass jetzt u an die Stelle der Variablen φ' tritt, und somit nach u anstatt nach φ' zu differenziren ist.

Hiernach findet man:

$$U = \frac{\cos u - b}{\cos u + b'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (427),$$

$$\frac{d\,U}{d\,\varphi'} = -(b + b')\frac{\sin u}{(\cos u + b')^2} = 0,$$

hieraus aber, weil nur $u = 180^0$ zu einem brauchbaren Resultate führt:

$$u = (\alpha + \varepsilon + 2\,\varphi') = 180^0, \text{ d. i.}$$

$$\varphi' = \gamma' = 90^0 - \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \measuredangle FAI' \ldots\ldots (428),$$

d. h.: die gefährliche oder Bruchböschung $\overline{AE}$ halbirt den Winkel zwischen der Wand $\overline{AF}$ und der natürlichen Böschung $\overline{AI'}$, ohne von der Erdcohäsion abzuhängen*).

Ferner ist:

$$\measuredangle BEA = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (429)$$

$$A = \overline{AE} = \frac{H}{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (430)$$

$$G = g.\triangle FAE = \tfrac{1}{2}\,g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}.\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)} \ldots\ldots (431),$$

und nach den Gleichungen (422) und (423):

$$D = \min \varDelta = \tfrac{1}{2}\,g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right) + a}{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\,g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right) + \frac{2\,c}{g\,H}\sin\alpha\cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha-\varepsilon}{2}\right)}\right] (432).$$

---

*) Hieraus ergibt sich, dass die Bruchebene, je nach Umständen, ober- oder unterhalb der aufsteigenden natürlichen Böschung $\overline{AI}$ liegt, oder mit dieser selbst zusammenfällt, je nachdem $\alpha \gtreqless 60^0 + \tfrac{1}{3}\,\varepsilon$ ist, wobei

Beachtet man, dass nach der für die Cohäsionshöhe gefundenen Gleichung (55):

$$h = \frac{2c}{g} \frac{\sin\alpha \cos\varepsilon}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}$$

der oben mit a bezeichnete Werth auf die Form:

$$a = \frac{h}{H} \sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (433)$$

gebracht werden kann, so erhält man schliesslich für den normalen passiven Erddruck:

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} + \frac{h}{H}\right] \ldots\ldots\ldots (434).$$

Dass man es in dem behandelten Falle wirklich mit einem Minimum von U in Bezug auf u zu thun hat, zeigt der zweite Differentialquotient $\frac{d^2 U}{d u^2}$ an. Denn dieser ist allgemein:

$$\frac{d^2 U}{d u^2} = -(b + b') \frac{1 + b' \cos u + \sin^2 u}{(\cos u + b')^3},$$

also insbesondere für $u = 180°$:

$$\frac{d^2 U}{d u^2} = \frac{b + b'}{(1 - b')^2} > 0.$$

Nur der Fall, wenn $(b + b') = 0$ wird, bildet eine Ausnahme, weil sodann schon der erste Differentialquotient $\frac{dU}{du}$ für jeden beliebigen Werth u (beziehungsweise φ') verschwindet, was offenbar anzeigt, dass der ursprüngliche Ausdruck für U (beziehungsweise $\varDelta$) nicht mehr veränderlich, sondern constant ist, daher unter diesen Umständen von einer bestimmten gefährlichen Böschung und einem bestimmten gefährlichen Erdprisma keine Rede sein kann. Augenscheinlich deutet diese Eigenschaft auf die Natur der tropfbaren Flüssigkeiten hin, was sich auch analytisch dadurch ergibt, dass man untersucht, unter welchen Bedingungen die oberwähnte Summe $(b + b')$ verschwindet.

Es ist nämlich auf Grundlage der Gleichungen (424) und (425):

ε für überhängende Wände negativ wird. Nachdem für Erdreich in der Regel $\alpha < 60° + \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, so erhält man somit im Allgemeinen für die Bruchebene eine sanftere Neigung, als die natürliche Böschung hat.

$$(b + b') = \cos(\alpha - \varepsilon) + \cos(\alpha + \varepsilon) + \frac{4c}{gH}\sin\alpha\cos\varepsilon$$
$$= 2\cos\varepsilon\left[\cos\alpha + \frac{2c}{gH}\sin\alpha\right],$$

und dieser Ausdruck ist derselbe, welcher schon auf Seite 88 bei der Betrachtung des activen Erddruckes für die dort ebenfalls mit $(b + b')$ bezeichnete Summe erhalten wurde. Wie daselbst bemerkt, muss hiebei $\alpha = 90^\circ$ und $c = 0$ sein, wie dies in der That bei den tropfbaren Flüssigkeiten eintritt. In Uebereinstimmung damit wird ferner das Resultat für D nach der allgemeinen Gleichung (422):

$$D = -\tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \cdot \frac{\sin\varphi' \sin(90^\circ + \varepsilon + \varphi')}{\cos(90^\circ + \varphi')\cos(\varphi' + \varepsilon)} = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon},$$

also, wie vorhergesehen, wirklich von φ' unabhängig, und identisch mit jenem für den activen hydrostatischen Druck. Selbstverständlich erhält man das gleiche Ergebniss auch aus den besonderen Gleichungen (432) und (434), wenn man dort $\alpha = 90^\circ$ und $c = 0$, beziehungsweise $h = 0$, setzt.

Steht ein cohäsionsloses Hinterfüllungsmateriale in Betracht, oder vernachlässiget man den Einfluss der vorhandenen Cohäsion, so hat man $c = h = 0$, und nach der Formel (434):

$$D = \tfrac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} \quad \ldots\ldots (435),$$

woraus unter Rücksichtnahme auf die hydrostatische Formel die Regel sich ergibt, dass in dem angedeuteten Falle der passive Erddruck eben so gross ist, wie der Druck einer tropfbaren Flüssigkeit mit dem Gewichte:

$$w = g\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (436)$$

per Cubikeinheit.

Für eine verticale Wand ist $\varepsilon = 0$, und hiernach insbesondere:

$$w = g \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (437).$$

Um daher in denjenigen Fällen, in welchen eine Erdcohäsion nicht in Betracht kommt, den gegen eine Wand entstehenden passiven Druck des dahinter gelegenen Erdreiches mit horizontaler Oberfläche zu bestimmen, berechne man zunächst das Gewicht (w) per Cubikeinheit derjenigen sich einzubildenden tropf-

baren Flüssigkeit, welche unter sonst gleichen Umständen denselben Druck ausüben müsste; hiernach aber den hydrostatischen Gesetzen gemäss die Grösse dieses Druckes selbst.

Hiebei kommt es, wie man sieht, vor Allem darauf an, den Werth des Factors $\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2$ zu bestimmen, mit dem nämlich das per Cubikeinheit gegebene Gewicht der Erde (g) zu multipliciren ist, um jenes der erwähnten Flüssigkeit zu erhalten.

Im Weiteren kann man die Bemerkungen auf Seite (89), welche sich auf den activen Erddruck beziehen, auch gegenwärtig vollständig benützen, wenn man hiebei nur beachtet, dass das jetzige Resultat den reciproken Ausdruck des dortigen Resultats (97), beziehungsweise (98), bildet.

Auch die auf Seite 90 erscheinende Tabelle VI kann zur Berechnung des Werthes (436), beziehungsweise (437), benützt werden, wenn man der oben geschehenen Andeutung zu Folge die Zahlenresultate in der Tabelle nicht directe, sondern stets mit ihrem reciproken Werthe in Rechnung nimmt.

Ex. Es sei der passive Erddruck mit Rücksicht auf diejenigen Daten zu berechnen, welche in dem auf Seite 91 erscheinenden Beispiele behufs der dortigen Bestimmung des activen Erddruckes zu Grunde gelegt wurden.

Da dort $\frac{w}{g} = 0{\cdot}176$ gefunden ward, so hat man jetzt:

$$\frac{w}{g} = \frac{1}{0{\cdot}176} = 5{\cdot}682,$$

daher, wegen $g = 85$ Pfd:

$$w = 5{\cdot}682\, g = 482{\cdot}97 \text{ Pfd.}$$

und, weil $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{6}$, $\cos\varepsilon = 1{\cdot}0138$ und $H = 30$ Fuss ist, für den zu suchenden passiven Erddruck, wenn das Erdreich ohne Cohäsion ist:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos\varepsilon} = 2203{\cdot}36 \text{ Ctr.}$$

Unter denselben Umständen war der active Erddruck (pag. 92) 68·25 Ctr., somit ist der passive 32·28mal so gross.

Für cohärirendes Erdreich ist der mit Rücksicht auf die Erdcohäsion sich ergebende passive Erddruck nach der Relation

(434) zu berechnen, worin gleichfalls das hydrostatische Gesetz erkennbar ist.

Indem man nämlich schreiben kann:

$$D = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos^2 \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}{\sin^2 \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)} + \frac{h}{H} \right] = \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \quad ..(438),$$

worin wieder w das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche ebenfalls den Druck D ausüben könnte, bedeutet, ergibt sich hieraus:

$$\frac{w}{g} = \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 + \frac{h}{H} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(439),$$

so dass der auf das cohärirende Erdreich Bezug nehmende Werth von $\frac{w}{g}$ gleich ist demjenigen, welcher sich laut Gleichung (436) für das cohäsionslos gedachte Material ergibt, mehr dem Verhältnisse $\frac{h}{H}$.

Dass der passive Erddruck durch das Hinzutreten der Wirkung einer Cohäsion des Erdreiches vergrössert werden muss, ist wohl sogleich einleuchtend.

Ex. Nimmt man das vorige Beispiel wieder auf, und sucht den passiven Erddruck unter der Voraussetzung, dass die Cohäsionshöhe (wie auf Seite 92) $h = 3$ Fuss sei, so erhält man offenbar:

$$\frac{w}{g} = 5 \cdot 682 + 0 \cdot 1 = 5 \cdot 782,$$

wobei das erste Glied (5·682) dem vorhergehenden Beispiele entnommen, das zweite Glied aber durch das Verhältniss $h : H$ entstanden ist.

Folglich hat man:

$$w = 5 \cdot 782\, g \quad = \quad 491 \cdot 47 \text{ Pfd.}$$

$$D = \frac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 2242 \cdot 14 \text{ Ctr.},$$

also 1·0176mal so gross, wie D ohne Rücksicht auf die Erdcohäsion.

Auf Seite 92 wurde gefunden, dass der active Erddruck unter den gleichen Umständen 61·42 Ctr. betrage, somit ist in diesem Falle der passive Erddruck 36·50mal so gross.

Bezeichnet man für einen gegebenen Fall den activen Erddruck mit D_a, dagegen den passiven mit D_p, und setzt man

hieran noch als zweiten Zeiger 0 oder c, je nachdem keine Erdcohäsion oder aber eine solche in Rechnung kommt, führt man ferner die analoge Bezeichnung in Bezug auf das Einheitsgewicht (w) der tropfbaren Flüssigkeit ein, welche jeweilig denselben Druck wie das Erdreich ausüben könnte, so erhält man die Bezeichnungen: $D_{a,o}$, $D_{a,c}$, $D_{p,o}$, $D_{p,c}$, $w_{a,o}$, $w_{a,c}$, $w_{p,o}$, $w_{p,c}$, und es ergibt sich auf Grundlage der Formeln für den activen und den passiven Erddruck folgende Zusammenstellung:

$$\left.\begin{aligned}
D_{a,o} &= \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 = \tfrac{1}{2}\, w_{a,o}\cdot\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\,..\\
D_{a,c} &= \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(1-\frac{h}{H}\right)\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 = \tfrac{1}{2}\, w_{a,c}\cdot\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\,..\\
D_{p,o} &= \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 = \tfrac{1}{2}\, w_{p,o}\cdot\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\,..\\
D_{p,c} &= \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}+\frac{h}{H}\right] = \tfrac{1}{2}\, w_{p,c}\cdot\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\,..
\end{aligned}\right\}\quad(440)$$

$$\left.\begin{aligned}
w_{a,o} &= g\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\\
w_{a,c} &= \left(1-\frac{h}{H}\right) w_{a,o} \ldots\ldots\\
w_{p,o} &= g\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\\
w_{p,c} &= w_{p,o} + g\,\frac{h}{H} \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(441),$$

welche zu interessanten Bemerkungen Anlass gibt.

Abgesehen von den Resultaten der Vergleichung der Werthe $D_{a,o}$ und $w_{a,o}$ mit $D_{a,c}$ $w_{a,c}$, welche bereits in der Gleichung (99) und der ihr vorstehenden Proportion enthalten sind, erhält man nämlich, wenn man abkürzungsweise den in den Formeln erscheinenden quadratischen Factor z nennt:

$$\left.\begin{aligned}
D_{a,o} : D_{p,o} &= w_{a,o} : w_{p,o} \ldots\ldots\\
&= z^2 : 1 \ldots\ldots\\
&= 1 : \left(\frac{1}{z}\right)^2 \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(442)$$

$$\left.\begin{aligned}
D_{a,c} : D_{p,c} &= w_{a,c} : w_{p,c} \ldots\ldots\\
&= \left(1-\frac{h}{H}\right) z^2 : 1 + \frac{h}{H}\, z \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(443),$$

$$\left.\begin{aligned} D_{p,o} : D_{p,c} &= w_{p,o} : w_{p,c} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= 1 \quad : 1 + \frac{h}{H} z \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (444),$$

wobei die Grösse $z = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$ aus der Tabelle VI entnommen werden kann.

Auch hat man:

$$w_{a,o} \, . \, w_{p,o} = g^2,$$

$$w_{a,o} : g \quad = g : w_{p,o} \ldots\ldots\ldots\ldots (445),$$

wonach g die mittlere geometrische Proportionale zwischen $w_{a,o}$ und $w_{p,o}$ ist.

Ex. Nach den vorhin beispielsweise eingeführten Daten hat man; $z = 0 \cdot 176$, $\frac{1}{z} = 5 \cdot 682$, $H = 30$ Fuss und $h = 3$ Fuss, somit:

$$D_{a,o} : D_{p,o} = w_{a,o} : w_{p,o} = 1 : 30 \cdot 28$$
$$D_{a,c} : D_{p,c} = w_{a,c} : w_{p,c} = 1 : 36 \cdot 50$$
$$D_{p,o} : D_{p,c} = w_{p,o} : w_{p,c} = 1 : 1 \cdot 0176,$$

welche Verhältnisse in der That mit den besonderen Resultaten auf den Seiten 409 und 410 übereinstimmen.

Wie zu ersehen, ist der passive Erddruck bedeutend grösser als der active, und zwar desto mehr, je mehr sich die Eigenschaften des Erdreiches von jenen der tropfbaren Flüssigkeiten unterscheiden. Für letztere dagegen sind, wie schon früher erwähnt, der active und der passive Druck einander gleich.

§. 94.

Grafische Darstellung des passiven Erddruckes. Zunächst auf den besonderen Fall

A) übergehend, wenn die Erdcohäsion gleich Null ist oder nicht in Betracht kommt, ist die Grösse des passiven Erddruckes nach der Formel für $D_{p,o}$ in Nr. (440):

$$D_{p,o} = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2.$$

Zu Folge der Formel (431) aber war:

$$G = \frac{1}{2} g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right],$$

somit ergibt sich die Proportion:

$$D_{p,o} : G = \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \varepsilon) : \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \varepsilon),$$

wobei, wie bekannt, G das Gewicht des Bruchprismas AFE (Fig. 158) bezeichnet.

In dem dreieckigen Profile dieses Prismas ist der Winkel bei A, nämlich $\sphericalangle\, FAE = 90^0 - \tfrac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)$, und jener bei E, also $\sphericalangle\, AEF = \tfrac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)$, was man aus den Gleichungen (428) und (429) leicht erkennt und eine Folge der Eigenschaft der Bruchlinie $\overline{AE}$ ist, durch welche insbesondere der Winkel FAI' halbirt wird*).

Dieserwegen besteht die Proportion:

$$\overline{FE} : \overline{AF} = \sin \sphericalangle\, EAF : \sin \sphericalangle\, AEF = \cos \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right) : \sin \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right),$$

also auch:

$$D_{p,o} : G = \overline{FE} : \overline{AF} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (446).$$

H i e r n a c h v e r h ä l t s i c h d e r p a s s i v e E r d d r u c k z u m G e w i c h t e d e s B r u c h p r i s m a s, w i e i n d e m d r e i e c k i g e n P r o f i l e d i e s e s l e t z t e r e n d i e h o r i z o n t a l e S e i t e $\overline{FE}$ z u W a n d s e i t e $\overline{AF}$; eine bemerkenswerthe Relation, welche laut der Proportion (101) auch in Bezug auf den activen Erddruck vorhanden war.

Auf Grundlage dieser Eigenschaft kann man jetzt ein Erdprisma construiren, dessen Gewicht der Intension des passiven Erddruckes gleich ist. Zu diesem Behufe zeichne man zuerst die Bruchebene $\overline{AE}$, nämlich durch Halbirung des Winkels FAI', mache sodann $\overline{EL} = \overline{FE}$, und berechne das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile FLE. Dieses Gewicht ist nämlich dasjenige, welches der Intension des passiven Erddruckes gleich kommt. Denn man hat:

$$\triangle\, LFE : \triangle\, AFE = \overline{FL} : \overline{AF} = \overline{FE} : \overline{AF},$$

---

*) Hieraus und mit Rücksicht auf die Bemerkungen zur Figur 36 folgt, dass die b e i d e n B r u c h p r o f i l e, einerseits in Bezug auf den a c t i v e n und andererseits in Bezug auf den p a s s i v e n E r d d r u c k bei sonst gleichen Umständen unter einander ä h n l i c h sind.

also auch:

$$g . \triangle LFE : g . \triangle AFE = \overline{FE} : \overline{AF},$$

und wegen $G = g . \triangle AFE$:

$$g . \triangle LFE : G = \overline{FE} : \overline{AF},$$

woraus durch Vergleichung mit der obigen Relation (446) unmittelbar folgt:

$D_{p,o} = g . \triangle LFE =$ [Gewicht des Erdprismas LFE] . . . .(447),
was zu beweisen war.

Was das Gesetz für die Zunahme des passiven Erddruckes mit der Vermehrung der Druckhöhe betrifft, so gilt dieserwegen dasselbe, was in Bezug des activen Erddruckes im §. 28 unter lit. A bemerkt worden ist.

Indem man nunmehr

B) auf den allgemeineren Fall übergeht, in welchem die Erdcohäsion bei der Bestimmung des passiven Erddruckes berücksichtiget werden soll, so wird man zum Behufe der grafischen Darstellung desselben am besten der Formel für $D_{p,c}$ in Nr. (440) die Aufmerksamkeit in der Absicht zuwenden, um zunächst nach den unter lit. A gegebenen Andeutungen den Erddruck $D_{p,o}$ (ohne Rücksicht auf die Cohäsion) mittelst Zeichnung darzustellen, und sodann dieses Resultat um die Differenz $(D_{p,c} - D_{p,o})$ zu vergrössern.

Es ist nämlich:

$$(D_{p,c} - D_{p,o}) = \tfrac{1}{2}\, g \frac{Hh}{\cos \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (448),$$

also gleich dem Gewichte eines Erdprismas, welches zum Profile ein Dreieck AFf (Fig. 159) hat, dessen Basis die Wandseite $\overline{AF} = \frac{H}{\cos \varepsilon}$ und dessen Höhe die Cohäsionshöhe $\overline{Ff} = h \perp \overline{AF}$ ist.

Hiernach hat man:

$D_{p,c} =$ Gewicht des Erdprismas FLE,

welches nach der Anleitung unter lit. *A* zu construiren ist, ferner:

$D_{p,c} =$ Gewicht des Erdprismas $LAfFE$,

welches um das Prisma AFf grösser als das vorige ist.

Auch die Zunahme des passiven Druckes cohärirender Erde mit der Vermehrung der Druckhöhe kann leicht in grafischer Weise versinnlichet werden, und zwar ähnlich, wie dies bezüglich

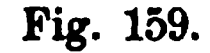
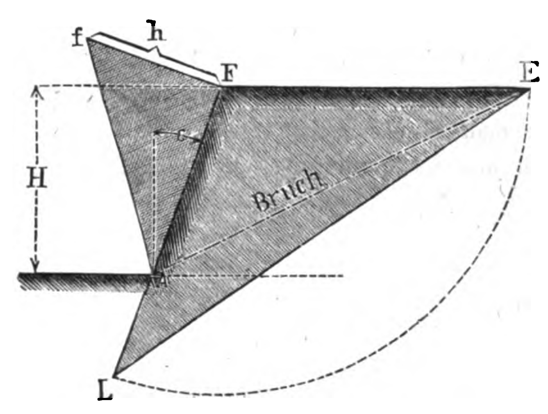


Fig. 159.



des activen Erddruckes vermittelst der Figuren 39 und 40 geschehen ist.

Indem man nämlich für die Druckhöhe H den passiven Erddruck durch die Formel:

$$D = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left\{ \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 + \frac{h}{H} \right\}$$

$$= k\,[H^2 + hzH] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (449),$$

darstellt, ist derselbe für eine andere Druckhöhe x, wenn solcher mit y bezeichnet wird:

$$y = \tfrac{1}{2}\, g \frac{x^2}{\cos \varepsilon} \left\{ \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 + \frac{h}{x} \right\}$$

$$= k\,[x^2 + hzx] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (450),$$

wenn hiebei als Abkürzung:

$$k = \tfrac{1}{2} \frac{g}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 \text{ und } z = \left[\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2$$

gesetzt wird.

Hiernach ergibt sich:

$$\frac{y}{D} = \frac{x^2 + hzx}{H^2 + hzH} = \frac{x}{H}\left(\frac{x + hz}{H + hz}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (451).$$

Stellt man sich vor, dass x die Abscissen und y die Ordinaten einer Curve (Druckveränderungs-Curve) seien, so erhält

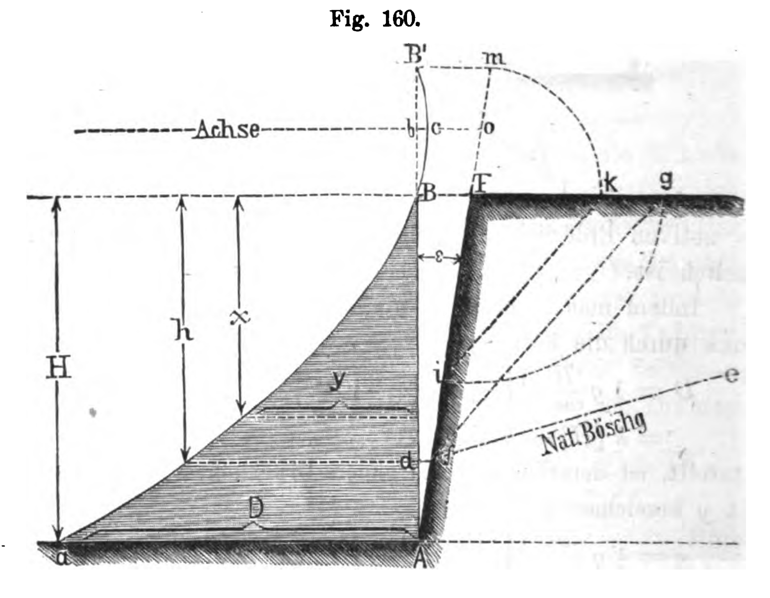
man als solche eine gemeine Parabel, deren Lage in der Fig. 160 anschaulich gemacht ist. Ihr Scheitel liegt in c, ihre Achse aber horizontal, und es ist hiebei:

$$\overline{BB'} = hz = h\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2;$$

$$\overline{Bb} = \overline{B'b} = \tfrac{1}{2}\,\overline{BB'} = \tfrac{1}{2}\,hz.$$

Da der Massstab zur Construction der Ordinaten beliebig ist, so kann man für $D = \overline{Aa}$ irgend eine Grösse annehmen, und hiernach den Scheitelpunkt c, so wie überhaupt die ganze

Fig. 160.



Parabel zeichnen, wenn man beachtet, dass diese durch die Punkte B', B und a gehen muss. Auch umgekehrt kann man verfahren; man wird nämlich die Ordinate $\overline{bc}$ für den Curvenscheitel beliebig annehmen, und die Parabel durch die Punkte B', c und B, sofort aber weiter bis zu dem Horizonte, der durch den Wandfuss gelegt wird, zeichnen, wodurch dann der Punkt a und hiernach die Grösse $\overline{Aa} = D$ gefunden wird. Wie man aber auch verfahren mag, in jedem Falle erhält man eine parabolische Curve, deren horizontale Ordinaten y verhältnissmässig die Grösse

des passiven Erddruckes für die dazu gehörigen Druckhöhen x repräsentiren.

Hiebei handelt es sich, wie aus dem Gesagten hervorgeht, vor Allem um die Construction der Linie $\overline{BB'} = hz$, was in folgender Weise geschehen kann:

Man trage die Cohäsionshöhe $\overline{Bd} = h$ von oben herab auf, markire den im Niveau von d liegenden Punkt f an der Wand, ziehe durch diesen Punkt die ansteigende natürliche Böschung $\overline{fe}$, halbire den Winkel Ffe durch die Gerade $\overline{fg}$, mache $\overline{Fi} = \overline{Fg}$, ziehe $\overline{ik} \parallel \overline{fg}$, schneide auf der nach oben verlängerten Wandrichtung das Stück $\overline{Fm} = \overline{Fk}$ ab und ziehe $\overline{mB'}$ horizontal.

Sodann ist:

$$\overline{BB'} = hz = h\left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}\right]^2.$$

Denn man hat:

$$\sphericalangle Ffg = \left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right), \quad \sphericalangle Fgf = 90 - \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right), \qquad \overline{Ff} = \frac{h}{\cos\varepsilon},$$

$$\overline{Fg} = \overline{Ff}\,.\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)} = \frac{h}{\cos\varepsilon}\,.\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}, \qquad \overline{Fi} = \overline{Fg},$$

$$\overline{Fk} = \overline{Fi}\,.\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)} = \frac{h}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}\right]^2, \quad \overline{Fm} = \overline{Fk},$$

somit

$$\overline{BB'} = \overline{Fm}\,.\,\cos\varepsilon = h\left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)}\right]^2 = hz,$$

was zu beweisen war.

Die weitere Beweisführung, dass die vorangegebene Parabel der Gleichung (451) entspricht, kann ähnlich, wie auf Seite 99, bezüglich der in der dortigen Figur 39 angedeuteten Parabel geschehen.

Eine andere grafische Darstellung ist (analog mit jener nach Fig. 40) in der Fig. 161 zur Anschauung gebracht. Der passive

Erddruck für irgend eine Höhe x ist nämlich stets dem vorliegenden Trapeze $FfNn$ proportional, wenn man die Gerade $\overline{af}$ derart zieht, dass ihre Verlängerung durch den Punkt o geht, welche die Linie $\overline{Fm}$ halbirt, wobei $\overline{Fm}$ dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Fig. 160 hat. So wie also die fraglichen Trapeze von oben nach unten zunehmen, eben so nimmt der passive Erddruck zu, so dass hiernach die Trapeze $FfNn$, $FfN'n'$, $FfAa$ als die Repräsentanten des passiven Erddruckes für die Druckhöhen x, x', H angesehen werden können. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann mit Rücksicht auf die Gleichung (449) eben so bewiesen werden, wie dies auf Seite 100 und 101 bezüglich des activen Erddruckes durch die Vergleichung der dortigen Fig. 40 mit den dazu gehörigen Relationen (102) und (103) geschehen ist.

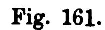
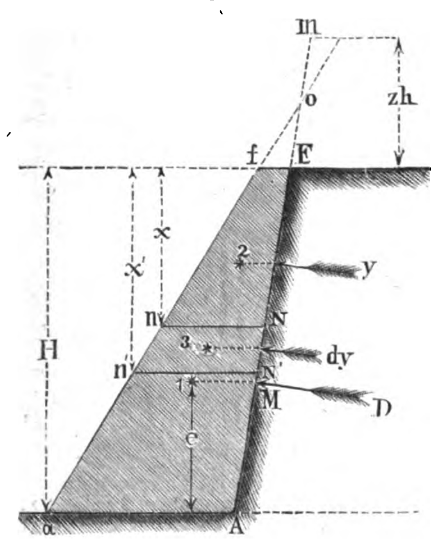


Fig. 161.



§. 95.

Einfluss der Richtung der Wand auf die Grösse des passiven Erddruckes. Auf einem ähnlichen Wege, wie im §. 29, findet man leicht, dass die Grösse des passiven Erddruckes unter sonst gleichen Umständen mit dem Wandneigungswinkel ε zunimmt, so dass man schreiben kann:

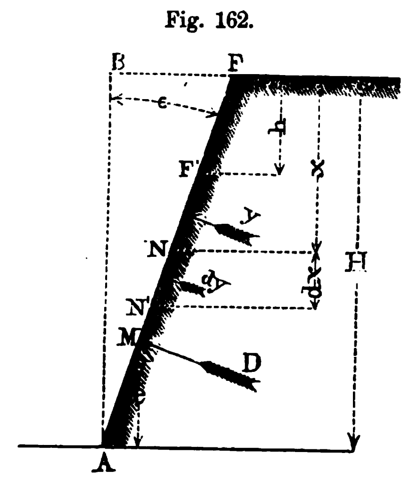
$$D_{\varepsilon} > D_0 > D_{-\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (452).$$

Wird daher eine Wand an ein Erdreich gedrückt, so wird dasselbe am leichtesten nach rückwärts verschoben, wenn die Wand überhängt, minder leicht, wenn sie lothrecht steht, und am schwierigsten, wenn sie liegend ist.

§. 96.

Mittelpunkt des passiven Erddruckes. Ist eine Cohäsion des Erdreiches nicht in Rechnung zu nehmen, so steht die Grösse des passiven Erddruckes im quadratischen Verhältnisse mit der Druckhöhe, also eben so, wie solches in Bezug auf den hydrostatischen Druck der Fall ist, weshalb dann der Mittelpunkt des Druckes hier wie dort in dem dritten Theile der Druckhöhe, von der Wandbasis an gerechnet, sich befindet.

Fig. 162.



Eine andere Lage kommt jedoch diesem Druckmittelpunkte zu, wenn hiebei eine Cohäsion des Erdreiches in Rechnung zu bringen ist. Zur diesfälligen Untersuchung stehe die Fig. 162 in Betracht, in welcher M der fragliche Mittelpunkt des passiven Erddruckes, und e sein Abstand von dem Niveau der Wandbasis sein soll.

Man nenne:

H... die ganze Wandhöhe $\overline{AB}$;

D... die Grösse des in dieser Höhe stattfindenden passiven Erddruckes;

h ... die Cohäsionshöhe;

x ... eine beliebig gewählte Druckhöhe;

y ... den innerhalb derselben entstehenden passiven Erddruck;

dx .. die unendlich kleine Vergrösserung der Druckhöhe x;

dy .. die unendlich kleine Zunahme von y, welche zugleich den passiven Erddruck gegen das Wandelement $\overline{NN'}$ vorstellt;

und behalte die sonstigen Bezeichnungen: α, ε und g bei.

Das zur Bestimmung von e einzuhaltende Verfahren ist in der Hauptsache mit jenem im §. 30, bezüglich des activen Erddruckes, übereinstimmend, nur sind jetzt die betreffenden Integra-

tionsgrenzen: $x = 0$ und $x = H$, weil auch innerhalb der Cohäsionshöhe h ein passiver Erddruck vorhanden ist. Hiernach erhält man:

$$D \, . \, \overline{AM} = \int_{x=0}^{x=H} \overline{AN} \, . \, dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (453),$$

daher, wegen $\overline{AM} = \frac{e}{\cos \varepsilon}$ und $\overline{AN} = \frac{(H - x)}{\cos \varepsilon}$, auch:

$$De = \int_{x=0}^{x=H} (H - x) \, dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (454),$$

worin laut der Gleichungen (449) und (450) die Werthe für D und y folgende sind:

$$D = k(H^2 + hzH), \; y = k(x^2 + hzx).$$

Allgemein ist:

$$\int (H - x) \, dy = (H - x) \, y + \int y \, dx,$$

daher insbesondere:

$$\int_{x=0}^{x=H} (H - x) \, dy = \int_0^H y \, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (455),$$

weil das Glied $(H - x) \, y$ sowohl für $x = 0$, als auch für $x = H$, somit in dem hiernach begrenzten Integrale jedenfalls verschwindet.

Man hat daher:

$$De = \int_0^H y \, dx = k \int_0^H (x^2 + hzx) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{3} k H^3 \left(1 + \frac{3 z h}{2 H}\right),$$

und, statt D den vorigen Werth eingesetzt:

$$e = \tfrac{1}{3} H \left[\frac{1 + \frac{3}{2} z \frac{h}{H}}{1 + \quad z \frac{h}{H}} \right]$$

$$= \tfrac{1}{3} H \left\{ \frac{1 + \frac{3}{2} \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2 \frac{h}{H}}{1 + \quad \left[\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \varepsilon)} \right]^2 \frac{h}{H}} \right\} \ldots\ldots\ldots (456),$$

wenn man unter Einem den Werth von z zurücksubstituirt.

Die Relation (456) lehrt, dass der Mittelpunkt des passiven Erddruckes bei cohärirendem Erdreiche höher liegt, als bei cohäsionslosem, und zwar desto höher, je grösser die Erdcohäsion ist. Indessen muss e immer kleiner sein, als $\frac{1}{2} H$, weil dieser letztere Werth erst für $\frac{h}{H} = \infty$ zum Vorschein kommt. Man kann daher allgemein schreiben:

$$\tfrac{1}{2} H > e \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{3} H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (457).$$

Den jeweiligen Werth von z findet man aus der VI. Tabelle, pag. 90.

Um den fraglichen Druckmittelpunkt mittelst Zeichnung zu finden, kehre man zur Figur 161 zurück, und beachte, dass nach der dortigen Erklärung

$D =$ area $AaFf$, $y =$ area $NnFf$ und $dy =$ area $NnN'n'$ gesetzt, somit laut Gleichung (454) geschrieben werden kann:

$$e = \frac{\int\limits_{x=0}^{x=H} (H - x) \text{ area } NnN'n'}{\text{area } AaFf} \ldots\ldots\ldots (458),$$

welche Relation besagt, dass der Mittelpunkt des passiven Erddruckes D im Niveau des Schwerpunktes (1) des Trapezes $AaFf$ gelegen ist.

Eben so befindet sich der Angriffspunkt für den passiven Erddruck y bei der Druckhöhe x in dem Niveau des Schwerpunktes (2) von dem Trapeze $NnFf$, und jener für dy innerhalb des Wandelementes $(x' - x) = dx$ im Niveau des Schwerpunktes (3) von dem Trapeze $NnN'n'$. Die Aufsuchung des jeweiligen Schwerpunktes geschieht am besten nach derjenigen Regel, welche in der Figur 45 zur Anwendung gekommen ist.

§. 97.

Einfluss einer zufälligen Belastung des hinter einer Wand aufgeschichteten Erdreiches auf dem passiven Druck dieses Letzteren. Es leuchtet ein, dass bei dem Vorhandensein einer zufälligen Belastung der passive

Erddruck grösser werden muss, als ohne eine solche. Um sogleich einen bestimmten Fall zu untersuchen, werde, eben so wie bezüglich des activen Erddruckes, angenommen, dass die zufällige Belastung auf der horizontalen Oberfläche des Erdreiches gleichförmig vertheilt, und das auf die Quadrateinheit entfallende Gewicht p sei. Wie im §. 31, so findet man auch hier, dass die Grösse des passiven Erddruckes D', welcher bei dem Vorhandensein der zufälligen Belastung entsteht, aus der Grösse desjenigen passiven Erddruckes D, welcher dem alleinigen Erdreiche zukommt, gefunden wird, wenn man in dem Ausdrucke für D — siehe die Relationen (432) und (434) — g' anstatt g substituirt, wobei man

$$g' = g + \frac{2\,p}{H} = g\left(1 + \frac{2\,p}{g\,H}\right)$$

zu setzen hat.

Hiernach ergibt sich Folgendes:

$$D = \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) + \frac{2\,c}{g\,H} \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \frac{H}{\cos \varepsilon} \left[\frac{g\,H \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) + 2\,c \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right],$$

$$D' = \tfrac{1}{2}\, \frac{H}{\cos \varepsilon} \left[\frac{g'\,H \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) + 2\,c \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \frac{H}{\cos \varepsilon} \left[\frac{(g\,H + 2\,p) \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) + 2\,c \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \frac{H}{\cos \varepsilon} \left[(g\,H + 2\,p)\, \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)} + g\,h\right] \quad \ldots\ldots (459).$$

Dieser Ausdruck kann noch unter verschiedenen anderen Gestalten gegeben werden, nämlich:

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left\{\left(1 + \frac{2\,p}{g\,H}\right) \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 + \frac{h}{H}\right\} \quad \ldots\ldots (460),$$

oder auch:

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g\, \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \left\{\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 + \frac{h}{H} + \frac{2\,p}{g\,H} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2\right\}$$

$$= D + \frac{p\,H}{\cos \varepsilon} \left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (461);$$

wonach man die Differenz zwischen den Druckwerthen einerseits mit und andererseits ohne Rücksicht auf die Wirkung der zufälligen Belastung vermittelst der Formel:

$$D' - D = \frac{pH}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (462),$$

also unabhängig von der Erdcohäsion findet. *)

Ist die Erdcohäsion $c = 0$, also auch die Cohäsionshöhe $h = 0$, so geht die Gleichung (460) in folgende über:

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g\left(1 + \frac{2p}{gH}\right) H^2 \left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2$$

$$= \left(1 + \frac{2p}{gH}\right) D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (463),$$

wonach das Verhältniss entsteht:

$$D : D' = 1 : \left(1 + \frac{2p}{gH}\right),$$

somit eben so, wie solches aus der Gleichung (123) bezüglich des activen Erddruckes folgt.

Uebergehend auf den Mittelpunkt des passiven Erddruckes bei dem Vorhandensein einer zufälligen Belastung, so hat man zur Bestimmung desselben der Hauptsache nach in derselben Weise, wie im §. 31, wo von dem activen Erddrucke die Rede ist, vorzugehen. Auch die dortige Figur 47 und die hiebei gewählten Bezeichnungen, nur jetzt auf den passiven Erddruck Bezug nehmend, können beibehalten werden, mit Ausnahme der Grösse $\mathfrak{h}$, welche dermalen nicht in Betracht kommt.

Diesen Bemerkungen gemäss erhält man nach der Gleichung (460):

$$D' = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 \left\{\left(H + \frac{2p}{g}\right) + h\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2\right\}$$

$$= kH\,[H + a] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (464),$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{g}{2\cos\varepsilon}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a &= \frac{2p}{g} + h\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (465).$$

*) In Bezug auf den activen Erddruck ergibt sich die analoge Differenz, indem man die Gleichungen (93) und (120) mit einander verbindet, in folgender Weise:

$$D' - D = \frac{pH}{\cos\varepsilon}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varepsilon)}\right]^2,$$

somit ebenfalls unabhängig von der Erdcohäsion.

Analog damit wird man jetzt für die Druckhöhe x schreiben:

$$y' = kx\,(x + a) = k\,(ax + x^2) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (466),$$

wonach man auf die statische Momentengleichung gelangt:

$$D'.\overline{AM} = \int_{x=0}^{x=H} \overline{AN}.\,dy' \;\ldots\ldots\ldots\ldots (467),$$

wenn man beachtet, dass dermalen das begrenzte Integrale offenbar mit $x = 0$ beginnt.

Wegen $\overline{AM} = \frac{e'}{\cos \varepsilon}$ und $\overline{AN} = \left(\frac{H - x}{\cos \varepsilon}\right)$ hat man weiter:

$$D'e' = \int_{x=0}^{x=H} (H - x)\,dy' = \Big[(H - x)\,y'\Big]_{x=0}^{x=H} + \int_0^H y'\,dx$$

$$= \int_0^H y'\,dx = k\int_0^H (ax + x^2)\,dx = k\,(\tfrac{1}{2}\,aH^2 + \tfrac{1}{3}\,H^3)$$

$$= \tfrac{1}{3}\,kH^2\,(H + \tfrac{3}{2}\,a) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (468),$$

indem man hiebei berücksichtiget, dass $(H - x)\,y'$ für die Grenzwerthe von $x = 0$ und $x = H$ verschwindet.

Gemäss der Gleichung (468) folgt durch Einsetzung des Werthes für D' aus (464):

$$e' = \tfrac{1}{3}\,H\left(\frac{H + \frac{3}{2}\,a}{H + a}\right) = \tfrac{1}{3}\,H\left(\frac{1 + \frac{3}{2}\,\frac{a}{H}}{1 + \frac{a}{H}}\right),$$

somit wegen der Relation für a in (465):

$$e' = \tfrac{1}{3}\,H\left\{\frac{1 + \frac{3}{2}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \frac{h}{H} + \frac{3\,p}{g\,H}}{1 + \left[\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}\right]^2 \frac{h}{H} + \frac{2\,p}{g\,H}}\right\} \ldots\ldots (469),$$

wonach der Druckmittelpunkt sowohl vermöge der Erdcohäsion als auch vermöge der zufälligen Belastung über das Drittel der Druckhöhe hinaufrückt.

Für $p = 0$ geht die Gleichung (469), wie es sein soll, in jene unter (456) über, und für $h = 0$ erhält man insbesondere:

$$e' = \frac{1}{3} H \left(\frac{1 + \frac{3p}{gH}}{1 + \frac{2p}{gH}} \right),$$

also dieselbe Relation, welche bei cohäsionslosem Erdreiche auch bezüglich des activen Erddruckes — siehe Gleichung (134) — gefunden ward.

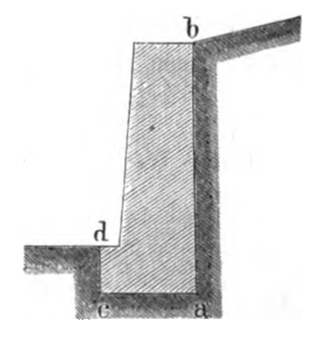
Für $\frac{h}{H} = \infty$ oder $\frac{p}{H} = \infty$, oder auch in beiden Fällen zugleich, ergibt sich $e' = \frac{1}{2} H$, welches Resultat den nicht erreichbaren oberen Grenzwerth bezeichnet, während der untere Grenzwerth für $h = 0$ und $p = 0$ entsteht, und insbesondere $\frac{1}{3} H$ wird, so dass die im §. 96 aufgestellte Relation (457) auch in Bezug auf das belastete Erdreich gilt.

§. 98.

Besondere Bemerkungen für die Praxis. Die Berücksichtigung des passiven Erddruckes kommt vorzugsweise bei der Beurtheilung der Stabilität von Stützmauer-Fundamenten vor, worauf schon auf Seite 17 hingewiesen wurde.

Soll ein derartiges Mauer-Fundament (Fig. 163) gehörig fixirt sein, so muss es eine solide Basis $\overline{ac}$ haben, und zudem an seiner Vorderseite $\overline{cd}$ durch den passiven Druck des vorliegenden Erdreiches gegen Verschiebung oder Drehung gesichert sein. Hier handelt es sich also auch um die Bestimmung des passiven Erddruckes von der Druckhöhe $\overline{cd}$. Wenn in einem solchen Falle von der Cohäsion zwischen den Erdtheilchen, so wie von der Reibung zwischen diesen und der Fundamentswand $\overline{cd}$ abgesehen wird, so ist dies offenbar zu Gunsten der Stabilität, doch muss man hiebei das Gewicht des Erdreiches mit Rücksicht auf die allfällige Verdichtung desselben in Rechnung nehmen, weil es

Fig. 163.



nicht wohl angeht, auch noch die günstige Wirkung einer solchen Verdichtung zu vernachlässigen. Der Mittelpunkt des passiven Erddruckes kann hiebei, da weder eine Erdcohäsion noch eine zufällige Belastung vor dem Fundamentsfusse in Betracht kommt, geradezu in dem dritten Theile der Druckhöhe $\overline{cd}$ (von c an gerechnet) angenommen werden.

Zweites Capitel.

Allgemeine Regeln zur Bestimmung der gefährlichen oder Bruchböschung und des passiven Druckes eines hinter einer Wand aufgeschichteten Erdreiches bei beliebiger Gestalt der Oberfläche desselben. Grafische Auflösung.

§. 99.

Eigenthümliche Untersuchungsmethode. In analoger Weise, wie bei der Untersuchung des activen Erddruckes in §. 47, kann man auch in Bezug auf den passiven Erddruck vorgehen. Indem hiebei wieder der Einfluss der etwaigen Erdcohäsion vernachlässiget und weiter beachtet wird, dass zu Folge der in dem laufenden Abschnitte gemachten Voraussetzung auch die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Wand entfällt, hat man die im Uebrigen ganz allgemein gehaltene Formel (416) zu untersuchen, und hierin den Werth von Δ zu einem Minimum, also $\frac{d\Delta}{d\varphi'} = 0$ zu machen.

Zu diesem Behufe drücke man den variablen Werth:

$$\Delta = \frac{X \sin \varphi'}{\cos (\varphi' + \varepsilon)}$$

als eine Function von Polar-Coordinaten aus, wobei der Wandfuss A als Pol angenommen wird, die nach abwärts gehende natürliche Böschung $\overline{Aq}$ die Polarachse, somit φ' den Polarwinkel vorstellt, die Gerade $\overline{AK} = S$ aber der dazu gehörige Leitstrahl ist. (Fig. 164.)

Was die Rechnungsoperation betrifft, welche in Anwendung zu bringen ist, um $\frac{d\varDelta}{d\varphi'} = 0$ zu machen, so hat man hiezu in derselben Weise zu verfahren, wie dies im §. 47 bezüglich der Nullsetzung des dortigen Differential-Quotienten $\frac{d\varDelta}{d\varphi}$ der Fall war, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass anstatt φ und γ, dermalen stets φ' und γ' zu schreiben ist.

Hiernach erhält man, ähnlich wie in (175) und (176), die Bedingungsgleichungen:

$$G = \tfrac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin \gamma' \cos(\gamma' + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \qquad (470)$$

$$D = \tfrac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin^2 \gamma'}{\cos \varepsilon} \qquad (471),$$

worin $\gamma' = \measuredangle EAq$ den Bruchwinkel, $A = \overline{AE}$ die Länge der Bruchlinie, $G = g$. area AFE das Gewicht des Bruchprismas und D die Grösse des passiven Erddruckes bedeutet.

Fig. 164.

$\overline{AK} = S$, $\overline{AE} = A$,
Gewicht $AFK = X$,
„ $AFE = G$.

Diese Gleichungen enthalten zwei eben so einfache wie merkwürdige Hauptregeln, welche man leicht

erkennt, wenn man die geometrische Bedeutung derselben in's Auge fasst. Zieht man nämlich $\overline{Ep} \perp \overline{Aq}$, setzt an dieses Perpendikel den $\measuredangle\, pEr = \varepsilon$, und construirt das gleichschenklige Dreieck Eqr, indem man $\overline{qr} = \overline{Er}$ macht, so finden folgende zwei Hauptregeln statt:

Erste Hauptregel.

Durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ wird die Fläche $AFEr$ halbirt; es ist somit:

$$\text{area } AFE = \triangle\, AEr = \tfrac{1}{2}\, A^2 \frac{\sin \gamma' \cos(\gamma' + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \ldots (472).$$

Auf Grund dieser Eigenschaft kann die Lage der Bruchlinie construirt werden.

Zweite Hauptregel.

Das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile Eqr ist gleich der Grösse des passiven Erddruckes gegen die Wand, es ergibt sich daher:

$$D = \left\{ \begin{matrix} \text{Gewicht des} \\ \text{Erdprismas } Eqr \end{matrix} \right\} = g \,.\, \triangle\, Eqr \ldots\ldots\ldots (473).$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Hauptregeln wird eben so geführt, wie auf den Seiten 184 und 185 bezüglich der dort betrachteten Hauptregeln (177) und (178).

Dass man es bei dem Vorhandensein obiger Relationen wirklich mit einem Minimum von Δ, wie dies verlangt wird, zu thun hat, zeigt der zweite Differential-Quotient von Δ in Bezug auf φ', welcher vermittelst der Relation:

$$\frac{d^2 \Delta}{d \varphi'^2} = - \frac{g A}{\cos(\gamma' + \varepsilon)} \,.\, f(\gamma') \ldots\ldots\ldots\ldots (474),$$

nämlich eben so ausgedrückt werden kann, wie dies rücksichtlich des activen Erddruckes in Beziehung auf den dazu gehörigen Differential-Quotienten vermittelst der Formel (181) geschehen ist, nur dass dort γ steht, hier aber γ' zu schreiben ist. Die Function $f(\gamma')$ bedeutet den speciellen Werth von $f(\varphi')$ für $\varphi' = \gamma'$, wobei

$$f(\varphi') = \frac{dZ}{d\varphi'},$$

Z aber das Perpendikel $\overline{KL}$ auf die natürliche Böschung $\overline{Aq}$ vorstellt.

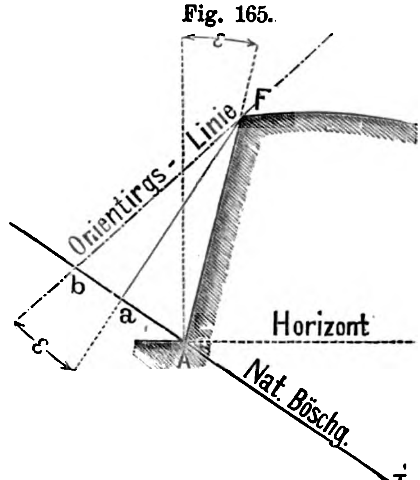
Indem nun im Allgemeinen die Grösse des Perpendikels Z mit der Zunahme von φ' abnimmt, weil die Oberfläche des cohäsionslos angenommenen Hinterfüllungsmateriales niemals steiler abfallen kann, als die natürliche Böschung $\overline{Aq}$, so wird in der Regel $\frac{dZ}{d\varphi'}$ negativ, daher $\frac{d^2\varDelta}{d\varphi'^2}$ positiv, was in der That auf ein Minimum von $\varDelta$ hinweiset.

Nur in dem Grenzfalle, wenn die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales an der betreffenden Stelle geradezu nach der natürlichen Böschung abfällt, ist der erwähnte Differential-Quotient gleich Null, indessen gelten auch dann die vorigen Hauptregeln noch immer, und zwar aus demselben Grunde, welcher auch bezüglich des activen Erddruckes in dem analogen Falle (siehe pag. 190) angegeben wurde.

§. 100.

Erläuterungen zu den im vorigen §. enthaltenen Gesetzen. Alles das, was in Bezug auf den activen Erddruck im §. 48 unter lit. A, B, C und D gesagt worden ist, gilt auch dermalen in Bezug auf den passiven Erddruck, nur hat man jetzt die natürliche Böschung des Erdreiches durch den Wandfuss nicht nach auf-, sondern nach abwärts zu zeichnen, und hiernach auch die Orientirungslinie entsprechend zu ziehen.

Fig. 165.

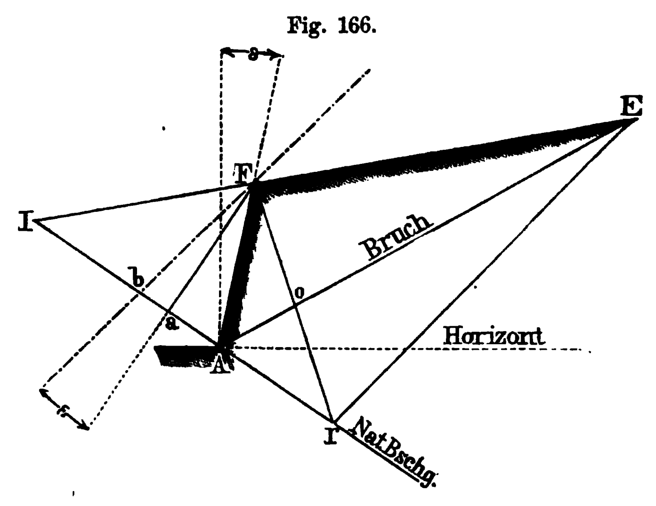


Diese Orientirungslinie $(\overline{Fb})$ wird nämlich gefunden, wenn man vom Wandkopfe F das Perpendikel $\overline{Fa}$ auf die natürliche Böschung $\overline{AI}$

fällt und daran den Wandneigungswinkel ε setzt, so dass der $\sphericalangle\ \overline{aFb} = \varepsilon$ ist. (Fig. 165.)

Auch gibt es in dem Falle, wenn die Oberfläche des Erdreiches von einer Ebene begrenzt ist, ähnlich wie im §. 48 unter lit. D,

Fig. 166.

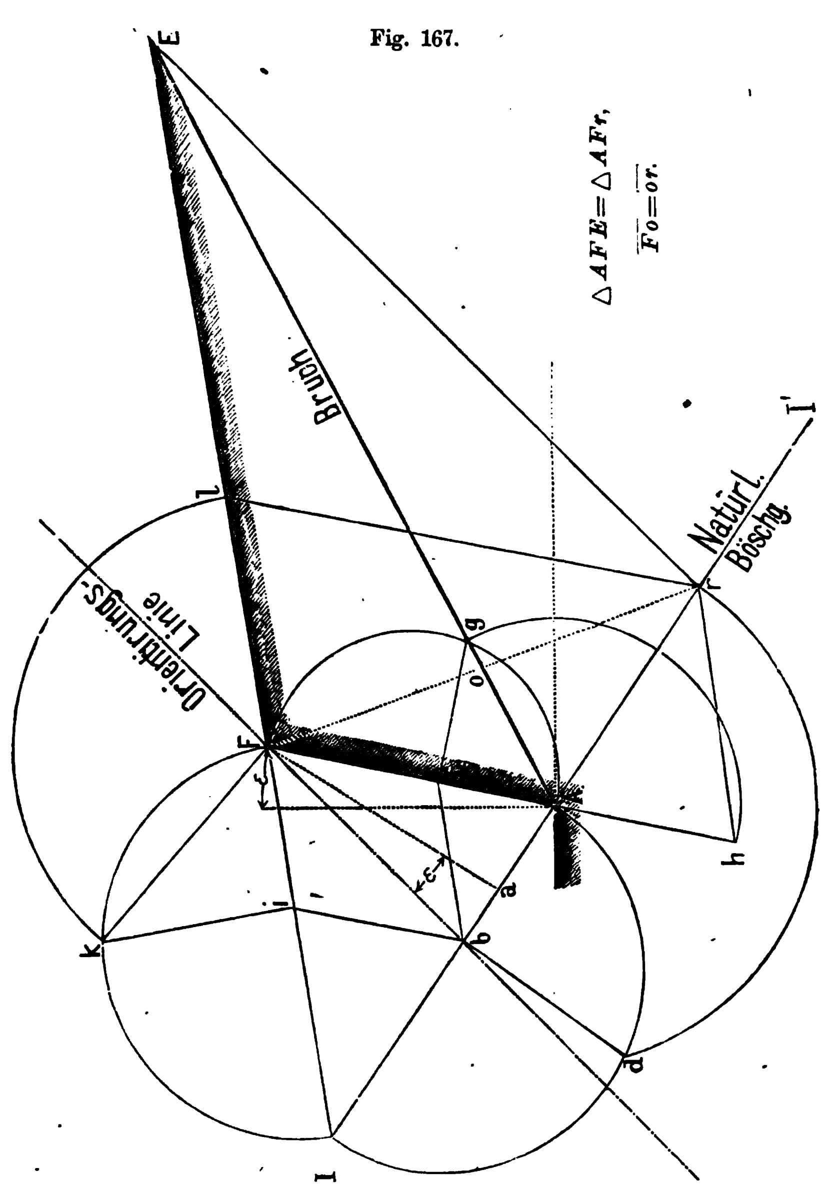


ein Constructionsviereck ($AFEr$), in dem die Bruchlinie $\overline{AE}$ die erste Diagonale ist, wodurch die zweite Diagonale $\overline{Fr}$ in o halbirt wird. (Siehe Fig. 166.) Hierin ist $\overline{Er} \parallel$ zur Orientirungslinie $\overline{Fb}$, und da im Constructionsvierecke zu Folge der ersten Hauptregel (472) $\triangle\ AFE = \triangle\ AEr$ sein muss, so hat man augenscheinlich $\overline{Fo} = \overline{or}$.

§. 101.

Grafische Methoden zur Auffindung der Bruchrichtung. In soferne es nach der zweiten Hauptregel (473) leicht wird, die Grösse des passiven Erddruckes grafisch darzustellen, wenn einmal die Richtung der Bruchfläche bekannt geworden ist, handelt es sich vorzugsweise um die Ausmittlung dieser Bruchrichtung, somit um die Art und Weise, wie zu diesem Zwecke der ersten Hauptregel (472) Genüge geleistet werden kann.

Die grafischen Methoden werden offenbar dieselben sein, welche in Bezug auf den activen Erddruck in den §§. 49 bis 53



besprochen wurden, nur mit dem schon im vorigen §. bemerkten Unterschiede bezüglich der Richtung für die natürliche Erdböschung und der Orientirungslinie.

So z. B. kann man in dem Falle, wenn die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales von einer Ebene begrenzt ist, die Bruchrichtung durch die Anwendung derjenigen drei genauen Methoden finden, welche mit den in den Figuren 93, 94 und 95 dargestellten correspondiren. Dieselben sind hier in der Figur 167 zur Anschauung gebracht. Ist nämlich $\overline{II'}$ die natürliche Böschungsrichtung, I der Durchschnittspunkt derselben mit der Oberflächenrichtung $\overline{FE}$, und $\overline{Fb}$ die Orientirungslinie, so hat man:

Erste Methode. Halbkreis über $\overline{AI}$, $\overline{bd} \perp \overline{AI}$, $\overline{Ar} = \overline{Ad}$, $\overline{rE} \parallel \overline{Fb}$.

Zweite Methode. Halbkreis über $\overline{AF}$, $\overline{bf} \parallel \overline{FI}$, $\overline{fg} \perp \overline{AF}$, $\overline{Ah} = \overline{Ag}$, $\overline{hr} \parallel \overline{FI}$, $\overline{rE} \parallel \overline{Fb}$.

Dritte Methode. Halbkreis über $\overline{FI}$, $\overline{bi} \parallel \overline{AF}$, $\overline{ik} \perp \overline{FI}$, $\overline{Fk} = \overline{Fl}$, $\overline{lr} \parallel \overline{AF}$, $\overline{rE} \parallel \overline{Fb}$.

Nach jeder dieser Methoden ergibt sich der Punkt E, und hiemit die Bruchlinie $\overline{AE}$, weil stets $\overline{Fo} = \overline{or}$ wird.

Anmerkung.

Aus demselben Grunde, der in der Anmerkung auf den Seiten 207 und 208 angegeben wurde, kann auch im vorliegenden Falle beigefügt werden, dass bei den vorher besprochenen Constructionsmethoden zur Erreichung der Eigenschaft, wonach $\triangle AFE = \triangle AEr$ werden soll, die Richtung der Orientirungslinie auch eine andere, ganz beliebig gewählte sein könnte.

§. 102.

Erddruckveränderungs-Curve. Zunahme des passiven Erddruckes von oben nach unten. Druckmittelpunkt. Alles das, was bezüglich des activen Erddruckes im §. 54 gesagt worden ist, kann auch in Bezug auf den jetzt in Rede stehenden passiven Erddruck zur Geltung gebracht werden, wenn man hiebei nur berücksichtigt, dass die durch den Wandfuss gehende natürliche Erdböschung nicht nach auf-, sondern nach abwärts, und dem entsprechend auch die sogenannte Orientirungslinie einzuzeichnen ist.

Dritter Abschnitt.

Passiver Erddruck gegen eine Wand mit Rücksicht auf die Reibung zwischen derselben und dem Erdreiche.

§. 103.

Einfluss der Berücksichtigung dieser Reibung. Wie schon im §. 92 erwähnt ward und auch aus der Natur der Sache hervorgeht, erhält man für den passiven Erddruck oder den Widerstand der Erde gegen eine Wand ein grösseres Resultat, wenn hiebei die Reibung der Erde an der Wand in Rechnung gezogen wird, gegenüber dem Falle, wenn solches nicht geschieht. Indem nun in dem vorhergehenden Abschnitte die bezüglichen Untersuchungen ohne Rücksicht auf die gedachte Reibung durchgeführt wurden, so erübriget dermalen noch, auf diejenigen Untersuchungen näher einzugehen, welche sich ergeben, wenn auch jene Reibung mit in Betracht kommt.

In diesem Falle muss man auf die Fig. 155 und die dazu gehörigen allgemeinen Formeln (412), (413) und (414) zurückgehen, wobei, wie dies üblich ist, die Wirkung der Erdcohäsion weggelassen, also $c = 0$ gesetzt werden soll, so dass dann die einfachere Relation (418) in Betracht kommt. In diesem Falle erhält man den Bruchwinkel γ' dadurch, dass man untersucht, für welchen Werth des Winkels φ' der Ausdruck für $\varDelta$, nämlich:

$$\varDelta = \frac{X \cos \varrho \sin \varphi'}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)},$$

also auch der weitere:

$$\varDelta' = \frac{\varDelta}{\cos \varrho} = \frac{X \sin \varphi'}{\cos(\varphi' + \varepsilon + \varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (475)$$

ein Minimum wird.

Ist hiernach der besondere Werth von $\varphi' = \gamma'$ gefunden, so ergeben sich den Formeln (407) und (418) gemäss nachstehende Relationen:

$$\mathfrak{D} = \min \varDelta' = \frac{G \sin \gamma'}{\cos(\gamma' + \varepsilon + \varrho)} \ldots\ldots\ldots\ldots (476)$$

$$D = \mathfrak{P} \cos \varrho \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(477)$$

$$R = \mathfrak{P} \sin \varrho = R \operatorname{tg} \varrho = \mu R \;\ldots\ldots\ldots\ldots (478),$$

wobei $\mathfrak{P}$ den schiefen und D den normalen Passivdruck, ferner R die Reibung an der Wand und $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ den Reibungscoefficienten hiefür bezeichnen. G ist das Gewicht des Bruchprismas, also derjenige Werth von X, welcher für $\varphi' = \gamma'$ entsteht. Im Uebrigen wird sich hiebei auf die Figuren 155 und 156 bezogen.

Erstes Capitel.

Allgemeine Regeln zur Bestimmung der gefährlichen oder Bruchböschung und des passiven Druckes von cohäsionslosem Erdmateriale gegen eine Wand bei beliebiger Gestalt der Oberfläche des Erdreiches unter Mitberücksichtigung der Reibung zwischen demselben und der Wand. Grafische Auflösung.

§. 104.

Eigenthümliche Untersuchungsmethode. Man kann eben so wie im §. 99 verfahren, nur dass dort $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$ gesetzt ward, während hier ein gewisser Werth hiefür einzuführen ist. Vergleicht man den Ausdruck für Δ' in der vorigen Gleichung (475) mit jenem für Δ im §. 99 auf der Seite 426, so ist zu ersehen, dass der Werth von Δ' aus Formel für Δ entstehend gedacht werden kann, wenn man in dieser $(\varepsilon + \varrho)$ anstatt ε einsetzt. Dieser Wahrnehmung zu Folge ist man berechtiget, die Gleichungen (470) und (471) sogleich hieher zu übertragen, wenn man, wie eben bemerkt, überall $(\varepsilon + \varrho)$ anstatt ε setzt, und weiter beachtet, dass der Minimalwerth von Δ' den schiefen Passivdruck $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

Hiernach ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

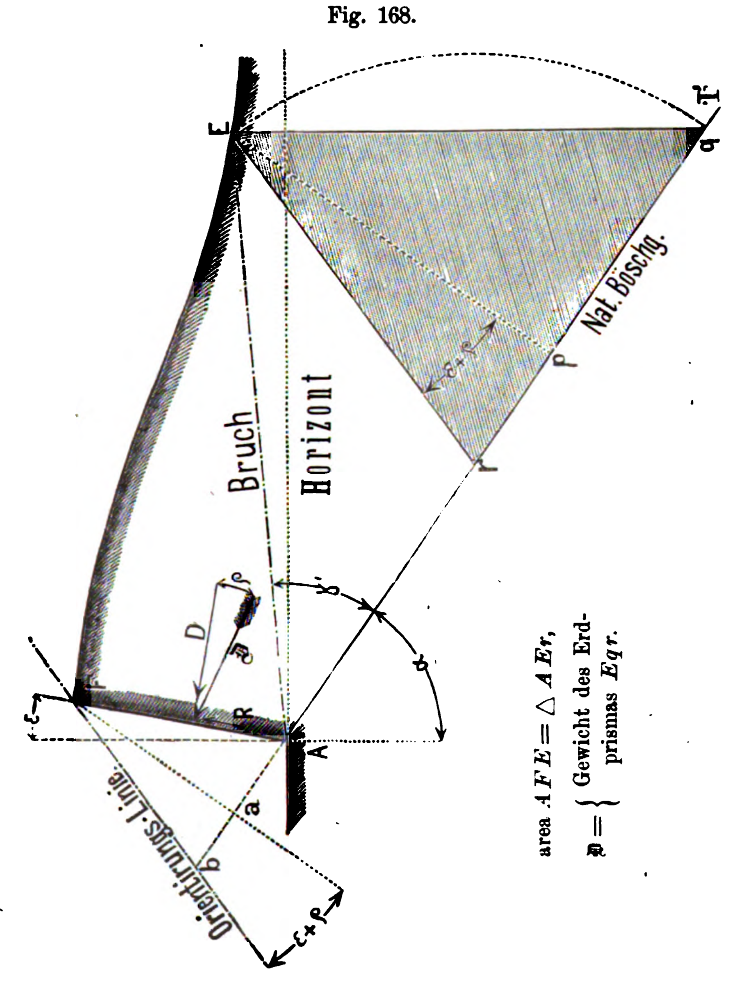
$$G = \tfrac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin \gamma' \cos (\gamma' + \varepsilon + \varrho)}{\cos (\varepsilon + \varrho)} \;\ldots\ldots\ldots (479),$$

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\, g A^2 \frac{\sin^2 \gamma'}{\cos (\varepsilon + \varrho)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (480),$$

worin $A = \overline{AE}$ die Länge der Bruchlinie im Bruchprofile anzeigt.

Analog, wie dies bei den Gleichungen (470) und (471) der Fall war, enthalten auch die jetzt gefundenen Formeln zwei eben so einfache wie merkwürdige Haupt-

Fig. 168.



regeln, welche man leicht erkennt, wenn man die geometrische Bedeutung derselben in's Auge fasst.

Zieht man nämlich (Fig. 168) $\overline{Ep} \perp \overline{AI'}$, setzt an dieses Perpendikel den $\measuredangle\, pEr = (\varepsilon + \varrho)$ und construirt das gleich-

schenklige Dreieck Eqr, indem man $\overline{qr} = \overline{Er}$ macht, so finden folgende zwei Hauptregeln statt:

Erste Hauptregel.

Durch die Bruchlinie $\overline{AE}$ wird die Fläche $AFEr$ halbirt, es ist somit:

$$\text{area } AFE = \triangle AEr = \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin \gamma' \cos (\gamma' + \varepsilon + \varrho)}{\cos (\varepsilon + \varrho)} \ldots (481).$$

Auf Grund dieser Eigenschaft kann die Lage der Bruchlinie construirt werden.

Zweite Hauptregel.

Das Gewicht des Erdprismas mit dem Profile Eqr ist gleich der Grösse des schiefen passiven Erddruckes gegen die Wand, es ergibt sich daher:

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Gewicht des} \\ \text{Erdprismas } Eqr \end{array} \right\} = g \cdot \triangle Eqr \ldots\ldots (482).$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Hauptregeln erhellet aus den Bemerkungen zu den Gleichungen (472) und (473), wenn man beachtet, dass hier bezüglich des schiefen Erddruckes die gleichen Eigenschaften wie dort bezüglich des normalen Druckes in soferne vorhanden sind, als man dermalen $(\varepsilon + \varrho)$ statt des früheren ε setzt.

§. 105.

Bemerkungen zu den im vorigen §. enthaltenen Gesetzen. Grafische Methoden zur Auffindung der Bruchrichtung. Erddruckveränderungs-Curve. Druckmittelpunkt. Sämmtliche Erörterungen in den §§. 100, 101 und 102, welche dort in Beziehung auf den Fall, wenn die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Wand nicht in Rechnung kommt, stattgefunden haben, lassen sich auch gegenwärtig, wo jene Reibung zu berücksichtigen ist, geltend machen, nur mit dem Unterschiede, dass die sogenannte Orientirungslinie $\overline{Fb}$ (Fig. 168), wozu die Abschlussgerade $\overline{Er}$ parallel läuft, mit dem auf die

natürliche Böschung $\overline{bI'}$ gefällten Perpendikel $\overline{Fa}$ nicht wie dort den Winkel ε, sondern den Winkel $(\varepsilon + \varrho)$ einzuschliessen hat. Dass es unter dieser Bedingung keinem Anstande unterliegt, die im §. 101 (Fig. 167) aufgeführten Constructionsmethoden zur Auffindung der Bruchlinie zu benützen, geht insbesondere aus der Schlussanmerkung zu dem bezogenen §. hervor, wonach die Richtung der Orientirungslinie zur Erreichung der Eigenschaft (area $AFE = \triangle\, AEr$) ganz beliebig sein kann.

Zweites Capitel.

Passiver Druck eines cohäsionslosen Erdreiches gegen eine um den Winkel ε geneigte Wand von der Höhe *H*, wenn dasselbe eine horizontale Oberfläche im gleichen Niveau mit der Wandkrone hat.

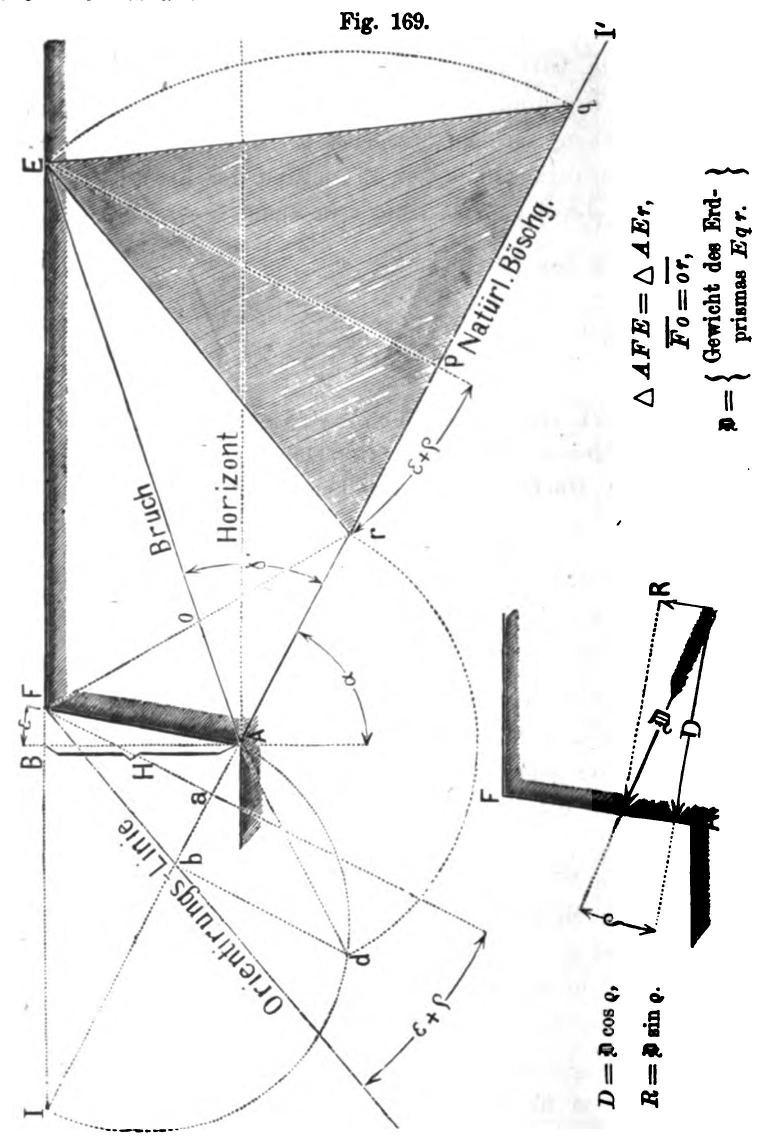
§. 106.

Bruchböschung und passiver Erddruck in diesem Falle. (Fig. 169.) In dieser Figur ist dem vorausgesetzten Falle gemäss die grafische Construction für die Bruchrichtung $\overline{AE}$ und die Grösse des schiefen passiven Erddruckes $\mathfrak{P}$ nach den im vorigen Capitel gegebenen Regeln bereits durchgeführt. Um nämlich zunächst die Orientirungslinie $\overline{Fb}$ zu finden, mache man $\overline{Fa} \perp$ auf die natürliche Böschung $\overline{II'}$, und setze an das Perpendikel den Winkel $aFb = (\varepsilon + \varrho)$ an. Ferner wende man eine der drei Methoden an, welche im §. 101 erwähnt sind und zu Folge des §. 105 auch jetzt benützt werden können, wenn vorher nur, wie dies bereits geschehen, die Orientirungslinie entsprechend ausgemittelt worden ist. Nimmt man z. B. gleich die erste Methode zu Hilfe, so hat man zu verfahren, wie folgt:

Halbkreis über $\overline{AI}$, $\overline{bd} \perp \overline{AI}$, $\overline{Ar} = \overline{Ad}$ und $\overline{Er} \parallel \overline{Fb}$. Sodann ist $\overline{AE}$ die Bruchrichtung, und es findet jetzt die in der ersten Hauptregel (481) enthaltene Eigenschaft statt, wonach man

$\triangle AFE = \triangle AEr$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\overline{Fo} = \overline{or}$ erhält.

Fig. 169.



Wird endlich $\overline{qr} = \overline{Er}$ gemacht, so ist zu Folge der zweiten Hauptregel (482) der schiefe passive Erddruck:

$$\mathfrak{P} = \left\{ \begin{matrix} \text{Gewicht des} \\ \text{Erdprismas } Eqr \end{matrix} \right\} = g \cdot \triangle Eqr \quad \ldots\ldots (483)$$

der normale passive Erddruck aber:

$$D = \mathfrak{P} \cos \varrho \quad \ldots\ldots (484)$$

und der Reibungswiderstand an der Wand:

$$R = \mathfrak{P} \sin \varrho = D \operatorname{tg} \varrho = D\mu \quad \ldots\ldots (485),$$

welche zwei Seitenkräfte ebenfalls leicht grafisch darzustellen sind, wenn der gegebene Reibungscoefficient $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ berücksichtiget wird.

Verfolgt man diese grafische Darstellung auf dem Wege der Rechnung, so ergeben sich die bezüglichen Berechnungsformeln, und zwar findet man insbesondere den Bruchwinkel γ' aus der Relation:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \gamma') = -n - \sqrt{(a+n)(n-b)} \quad \ldots\ldots (486),$$

die Grösse des schiefen passiven Erddruckes aber aus der Formel:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2} g H^2 \sqrt{\frac{1+n^2}{1+a^2}} \left[\sqrt{a+n} + \sqrt{n-b}\right]^2 \quad \ldots (487),$$

wenn folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \; b = \operatorname{tg} \varepsilon, \; n = \operatorname{cotg}(\alpha - \varepsilon - \varrho) = n \quad (488)\,*).$$

Um diese Formeln ohne Zuhilfenahme von trigonometrischen Tafeln benützen zu können, wenn, wie es gewöhnlich der Fall ist, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \varepsilon$ und $\mu = \operatorname{tg} \varrho$ bekannt sind, so beachte man, dass der Werth von n sich auf nachstehende Art ergibt:

$$n = \operatorname{cotg}(\alpha - \varepsilon - \varrho) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) \operatorname{tg} \varrho}{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) - \operatorname{tg} \varrho} \quad \ldots\ldots (489),$$

worin zu setzen kommt:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{a - b}{1 + ab} \quad \ldots\ldots (490).$$

Ist $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$, d. h. wird eine Reibung an der Wand nicht in Rechnung genommen, so reduciren sich die Formeln (484), (485), (486) und (487) wie folgt:

---

*) Der Kürze wegen wird hier der mathematische Calcul nicht mehr durchgeführt, sondern es werden blos die Resultate desselben angegeben, was um so mehr zulässig erscheint, als namentlich auf den Seiten 371 und 372 bereits eine ähnliche Entwicklung im Detail ausgeführt erscheint, welche auch für den jetzt einzuschlagenden Gang die nöthigen Anhaltspunkte bietet.

$$D = \mathfrak{P},\ R = 0,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \gamma') = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha - \varepsilon}{2}\right),\ \gamma' = 90^0 - \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right),$$

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\, g \frac{H^2}{\cos \varepsilon}\left[\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)}\right]^2,$$

welche Relationen, wie es sein soll, mit den Resultaten im ersten Capitel des laufenden Abschnitts übereinstimmen.

Für $\varrho = (\alpha - \varepsilon)$ wird $n = \infty$, folglich $\operatorname{tg}(\alpha + \gamma') = \infty$, $\gamma' = (90^0 - \alpha)$ und $\mathfrak{P} = \infty$. In diesem Falle würde die Bruchfläche horizontal und der passive Erddruck oder der Widerstand der Erde unendlich gross. Eine Gleichgewichtsstörung in dem auf den passiven Erddruck bezüglichen Sinne wäre dann offenbar nicht mehr möglich. Dasselbe gilt auch dann, wenn $\varrho > (\alpha - \varepsilon)$ sein sollte, weil unter dieser Bedingung von einer Gleichgewichtsstörung um so weniger die Rede sein kann, womit auch die Wahrnehmung zusammenhängt, dass dann die Formeln (486) und (487) imaginär werden. Es versteht sich übrigens von selbst, dass hier eben so wie bei dem activen Erddrucke der Werth von ϱ überhaupt höchstens gleich $(90^0 - \alpha)$ gesetzt werden darf, indem hiedurch die Grenze gekennzeichnet ist, welche bei cohäsionslosem Erdreiche nicht überschritten werden darf. Uebrigens kann jedenfalls sowohl die Grösse des schiefen, als auch jene des normalen Passivdruckes durch eine Formel dargestellt werden, welche das hydrostatische Gesetz enthält. Setzt man nämlich:

$$\mathfrak{P} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} \text{ und } D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},$$

so sind $\mathfrak{w}$ und w die Einheitsgewichte derjenigen sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeiten, welche an die Wand der Grösse nach die gleichen Drucke $\mathfrak{P}$ und beziehungsweise D ausüben würden. Alsdann ergibt sich:

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = \sqrt{\frac{(1 + n^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}}\left[\sqrt{a + n} + \sqrt{n - b}\right]^2 \quad \ldots(491),$$

$$\frac{w}{g} = \left(\frac{\mathfrak{w}}{g}\right)\cos \varrho = \left(\frac{\mathfrak{w}}{g}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(492),$$

indem man berücksichtigt, dass (wegen $\operatorname{tg} \varepsilon = b$ und $\operatorname{tg} \varrho = \mu$) $\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$ und $\cos \varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ ist.

Was den Mittelpunkt des Druckes in dem behandelten Falle betrifft, so liegt derselbe mit Rücksicht auf die Bemerkungen im §. 105 in dem dritten Theile der Druckhöhe, von dem Wandfusse an gerechnet.

Ex. Es sei der passive Erddruck in demjenigen besonderen Falle zu berechnen, welcher in dem Beispiele auf Seite 409 in Betracht stand. Nur hat man dort auf die Reibung zwischen Erde und Wand keine Rücksicht genommen, während jetzt diese Reibung mit in Rechnung kommen und der Reibungs-Coefficient hiefür etwa mit $\mu = \mathrm{tg}\, \varrho = \frac{1}{2}$ angenommen werden soll. Die übrigen Daten sind dieselben, wie in dem Beispiele auf Seite 91, nämlich: $\mathrm{tg}\, \alpha = 1 \cdot 27$, $\mathrm{tg}\, \varepsilon = \frac{1}{6}$, $g = 85$ Pfd. und $H = 30$ Fuss.

Hiernach hat man zunächst nach den Formeln (488), (489) und (490):

$$a = 1 \cdot 27,\ b = \frac{1}{6},\ n = \frac{2116}{597} = 3 \cdot 5444,$$

und hiernach auf Grund der Relation (486):

$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \gamma') = -\ 7 \cdot 5770,$$

woraus sich ergibt:

$$(\alpha + \gamma') = 180^\circ - 82^\circ\, 29' = 97^\circ\, 31',$$

oder, indem $\alpha = 51^\circ\, 47'$ ist:

$$\gamma' = 45^\circ\, 44'.$$

So gross ist im vorliegenden Falle der Bruchwinkel welcher in der allgemeinen Figur 169 mit EAI' bezeichnet erscheint. Die Bruchböschung AE erhebt sich daher über den Horizont nur um einen kleinen Winkel, dessen Grösse ist:

$$(\gamma' - \beta) = (\gamma' + \alpha - 90^\circ) = 7^\circ\, 31'.$$

Ohne Rücksicht auf die Reibung zwischen Erde und Wand, also für $\mu = \mathrm{tg}\, \varrho = 0$, würde offenbar die Bruchfläche steiler sein, denn dann wäre nach der Gleichung (428): $\gamma' = 90^\circ - \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{2}\right)$, daher weil $\alpha = 51^\circ\, 47'$ und $\varepsilon = 9^\circ\, 28'$ ist: $\gamma' = 59^\circ\, 22\frac{1}{2}'$, und es hätte die Bruchfläche eine Neigung über den Horizont von $(\gamma' + \alpha - 90^\circ) = 21^\circ\, 9\frac{1}{2}'$, somit um $13^\circ\, 38\frac{1}{2}'$ mehr, als zuvor in dem Falle gefunden wurde, für den man die Reibung an der Wand mit dem Reibungs-Coefficienten $\mu = \mathrm{tg}\, \varrho = \frac{1}{2}$ in Rechnung gezogen hat.

Die Wirkung des passiven Erddruckes betreffend, so hat man zunächst nach den Formeln (491) und (492):

$$\frac{\mathfrak{w}}{g} = 37 \cdot 8 \text{ und } \frac{w}{g} = 33 \cdot 8,$$

wenn man beachtet, dass, wie auf Seite 333, wegen $\mu = \mathrm{tg}\, \varrho = \frac{1}{2}$, $\cos \varrho = 0 \cdot 8944$ zu setzen ist.

Hiernach findet man, indem $g = 85$ Pfd. ist:

$$\mathfrak{w} = 32 \cdot 13 \text{ und } w = 28 \cdot 73 \text{ Ctr.}$$

Wegen $\frac{1}{\cos \varepsilon} = 1 \cdot 0138$ hat man daher für die Grösse des schiefen Erddruckes:

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 14658 \text{ Ctr.};$$

für jene des normalen Erddruckes:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = 13107 \text{ Ctr.};$$

endlich für die Grösse der Reibung an der Wand:

$$R = D\mu \qquad = 6553 \cdot 5 \text{ Ctr.}$$

Vergleicht man diese Resultate mit jenen auf Seite 409, wo die Wirkung des passiven Erddruckes ohne Rücksicht auf die Reibung an der Wand unter sonst gleichen Umständen berechnet erscheint, so erkennt man den wesentlichen Einfluss, welchen die gedachte Reibung auf den Widerstand der Erde auszuüben im Stande ist.

Zweite Abtheilung.

Theorie der Futtermauern.

Vorbemerkungen.

§. 107.

Eintheilung der Futtermauern. Voraussetzungen, welche dabei gemacht werden. Von der Eintheilung der Futtermauern einerseits in Stütz- und Wandmauern, andererseits in liegende, stehende und überhängende, war bereits in den §§. 3 und 5 die Rede. Es wird eine gehörig feste Mauerfundirung, daher vorausgesetzt, dass hiezu, falls der alleinige natürliche Untergrund nicht sicher genug wäre, in künstlicher Weise vermittelst Rostlegung, Pilotirung, Betonirung u. s. w. entsprechend vorgesorgt werde. Ferner wird das Mauerwerk in rationeller Weise hergestellt gedacht, wobei übrigens die Cohäsion des Mörtels zu Gunsten der Stabilität nicht in Betracht kommen soll, zumal hierauf bei dem anfänglich noch grünen Zustande des Mauerwerkes ohnehin ein hinlänglich gerechtfertigtes Vertrauen nicht gesetzt werden darf.

Die Länge der Mauer, normal auf das Profil stehend, wird mit der Einheit in Rechnung genommen, analog mit dem Verfahren, welches auch bei der Bestimmung des Erddruckes zur Anwendung kam.

Das Einheitsgewicht des Mauerkörpers wird im Allgemeinen mit q bezeichnet, und ist im Besonderen je nach Umständen verschieden.

Beiläufig kann man für das Gewicht eines Cubikfusses annehmen, und zwar für Mauern

	Wiener Gewicht
aus Ziegeln	80 Pfd.
aus leichtem Gestein	100 „
„ mittelschwerem Gestein	125 „
„ schwerem Gestein	150 „

§. 108.

Art und Weise der zu verhindernden Gleichgewichtsstörung bei Futtermauern. Solche ist zweifach. Entweder durch Umsturz um eine Drehungskante, oder durch Verschiebung von Steinschaaren übereinander. Zur Sicherheit, dass eine Gleichgewichtsstörung weder in der einen noch in der anderen Weise erfolgen könne, ist nothwendig, die bezüglichen Bedingungen des Gleichgewichtes in beiden Beziehungen zu untersuchen. Auch durch Zerquetschung der Mauersteine in Folge übergrossen Druckes kann ein Einsturz erfolgen. Da es sich übrigens bei einer Futtermauer nicht nur um den ausserhalb des Fundaments stehenden Theil handelt, sondern auch das Fundamentmauerwerk selbst, ungeachtet einer festen Fundirung in dem Untergrunde, aus dem Gewichtszustande gerathen könnte, falls die Stärke und Tiefe des Fundamentmauerwerkes den Verhältnissen nicht angepasst wären, so ergibt sich hieraus die Nothwendigkeit, auch in dieser Richtung die geeigneten Berechnungen anzustellen.

Erster Abschnitt.

Stabilität der Futtermauern ausserhalb des Fundamentes.

§. 109.

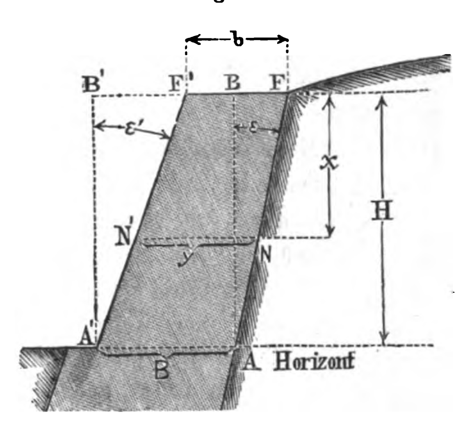
Allgemeiner Fall für ein trapezförmiges Mauerprofil. Dieses Profil sei $AFF'A'$ (Fig. 170), und man setze hiebei:

die untere Mauerstärke, zunächst am Fundamente .... $\overline{AA'} = B$,
die Breite der Mauerkrone .... $\overline{FF'} = b$,
die Mauerhöhe über dem Fundamente...... $\overline{AB} = \overline{A'B'} = H$,
den Neigungswinkel für die Hinterwand.... $\measuredangle BAF = \varepsilon$,
den Böschungswinkel für die Vorderwand, nämlich.......... $\measuredangle B'A'F' = \varepsilon'$,
und das bezügliche Verhältniss zwischen Anlage und Höhe dieser Böschung, also .... $\frac{\overline{B'F'}}{\overline{A'B'}} = \operatorname{tg} \varepsilon' = n$.

Hiernach hat man zwischen B und b folgende Relation:

$$B = b + (\operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon) H = b + (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H \ldots (493).$$

Fig. 170.



Analog damit kann man daher für jede beliebige Höhe x die entsprechende Mauerstärke $\overline{NN'} = y$ (horizontal gemessen) ausdrücken durch die Formel:

$$y = b + (n - \operatorname{tg} \varepsilon) x \ldots\ldots\ldots\ldots (494),$$

indem man nämlich in der Formel (493) x und y anstatt H und B substituirt.

Hiernach findet man:

$$\text{area } AA'F'F = \tfrac{1}{2} H (B + b) = H [b + \tfrac{1}{2} (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H],$$
$$\text{area } NN'F'F = \tfrac{1}{2} x (y + b) = x [b + \tfrac{1}{2} (n - \operatorname{tg} \varepsilon) x];$$

ferner das Gewicht Q des Mauerkörpers mit dem Profile $AA'F'F$, und zwar per Längeneinheit normal auf dieses Profil verstanden:

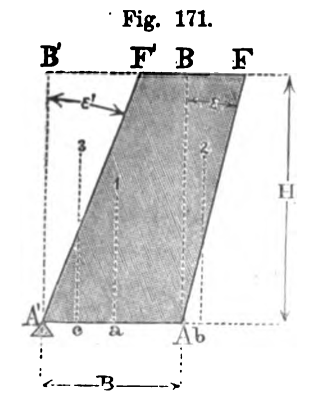
$$Q = q \cdot \text{area } AA'F'F = qH\left[b + \tfrac{1}{2}(n - \text{tg } \varepsilon) H\right] \quad (495),$$

so wie jenes für den Mauerkörper mit dem Profile $NN'F'F$, wenn es mit Y bezeichnet wird:

$$Y = q \cdot \text{area } NN'F'F = qx\left[b + \tfrac{1}{2}(n - \text{tg } \varepsilon) x\right] \quad (496).$$

Was das statische Moment des einen und des anderen Mauerkörpers in Bezug auf die Drehungskante in A', beziehungsweise in N' betrifft, so wird das erstere mit . . . . S_M
und das letztere mit . . . . Σ_M
bezeichnet, wobei der jeweilige Zeiger M andeuten soll, dass es sich um das Moment von einem Mauerwerkskörper handelt. Diese Momente kommen bei der Erörterung des Gleichgewichtes gegen Umsturz in Betracht, und ergeben sich in folgender Weise:

Fig. 171.



In Fig. 171 stelle $AA'F'F$ das Mauerprofil auf die ganze Höhe H dar. Dasselbe kann aus drei Theilfiguren zusammen gesetzt betrachtet werden, nämlich aus dem Rechtecke $AA'B'B$ und aus den zwei Dreiecken ABF und $A'B'F'$, von welchen das letzere negativ zu nehmen ist.

Für den Inhalt dieser Theilfiguren, mit F_1 F_2 und F_3 bezeichnet, hat man:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= BH \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_2 &= \tfrac{1}{2} H^2 \text{ tg } \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_3 &= \tfrac{1}{2} H^2 \text{ tg } \varepsilon' = \tfrac{1}{2} H^2 n \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (497),$$

folglich sind die per Längeneinheit entfallenden Mauergewichte, wobei diese Theilfiguren als Profile vorkommen, wenn jene mit Q_1, Q_2 und beziehungsweise Q_3 bezeichnet wurden, inbesondere:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= qF_1 = qBH \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_2 &= qF_2 = \tfrac{1}{2} qH^2 \text{ tg } \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_3 &= qF_3 = \tfrac{1}{2} qH^2 n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (498).$$

Die Schwerpunkte jener Theilfiguren sind in 1, 2 und 3, und ihre Projection auf die Mauerbasis in a, b und c. Es sind daher $\overline{A'a}$, $\overline{A'b}$ und $\overline{A'c}$ die Hebelsarme für die drei Theilkörper, aus welchen das ganze Mauerwerk zusammengesetzt gedacht wird, und zwar hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A'a} = \frac{1}{2}\,\overline{AA'} = \frac{1}{2}\,B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{A'b} = \overline{AA'} + \frac{1}{3}\,\overline{BF} = B + \frac{1}{3}\,H \operatorname{tg} \varepsilon \ldots\ldots \\ \overline{A'c} = \frac{1}{3}\,\overline{B'F'} = \frac{1}{3}\,H \operatorname{tg} \varepsilon' = \frac{1}{3}\,Hn \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (499).$$

Hiernach ergeben sich die Werthe für das statische Moment der betrachteten Theilkörper in Bezug auf die Drehungskante in A', wenn dieselben mit S_1, S_2 und S_3 bezeichnet werden, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = Q_1\,.\,\overline{A'a} = \frac{1}{2}\,qB^2H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_2 = Q_2\,.\,\overline{A'b} = \frac{1}{2}\,qH^2 \operatorname{tg} \varepsilon\,(B + \frac{1}{3}\,H \operatorname{tg} \varepsilon)\,. \\ S_3 = Q_3\,.\,\overline{A'c} = \frac{1}{6}\,qH^3n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (500).$$

Die algebraische Summe dieser Momente ist nunmehr $(S_1 + S_2 - S_3)$, und gibt das fragliche Moment der ganzen Mauer; es ist nämlich:

$$S_M = \frac{1}{2}\,q\,[B^2H + BH^2 \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{3}\,H^3\,(n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon)] \quad (501).$$

Analog damit ist das statische Moment des Mauerkörpers $NN'F'F$ in Bezug auf die Drehungskante in N' (Fig. 170):

$$\Sigma_M = \frac{1}{2}\,q\,[y^2x + yx^2 \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{3}\,x^3\,(n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon)] \quad (502),$$

indem man nämlich in die Gleichung (501) x und y anstatt H und B einsetzt.

Erstes Capitel.

Stabilität der Futtermauern gegen Umsturz.

§. 110.

Statisches Offensivmoment des Erddruckes. Statisches Defensivmoment der Futtermauern. Stärke der letzteren. Wird zunächst die Umsturzkante in A_1 angenommen,

so ergibt sich das statische Moment des Erddruckes, welches offensiv auftritt, mit Beziehung auf die Fig. 172, in folgender Weise:

M.. ist der Ort für den Mittelpunkt des activen Erddruckes;

e.. der Abstand desselben von dem durch den Wandfuss gelegten Horizont;

$\mathfrak{D}$.. die Grösse dieses letzteren nach der schiefen Richtung, welche mit der Normalen auf die Hinterwand der Mauer den Reibungswinkel ϱ einschliesst;

$\operatorname{tg} \varrho = \mu$.. der Coefficient für die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand;

$D = \mathfrak{D} \cos \varrho$.. der normal auf die Stützwand wirkende Erddruck;

$R = \mathfrak{D} \sin \varrho = R \operatorname{tg} \varrho = R\mu$.. die an dieser Stützwand entstehende Reibung;

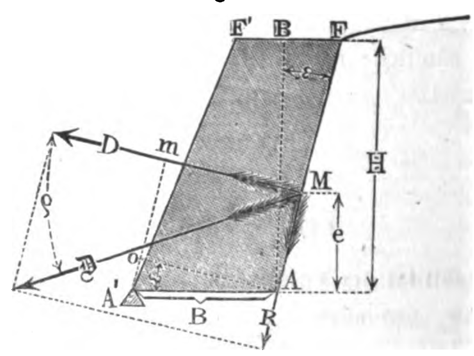
w.. das Einheitsgewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche auf die Stützwand den Normaldruck D ebenfalls ausüben würde;

H.. die Höhe der Stützwand;

ε.. die Neigung ihrer Hinterwand gegen das Loth; endlich

B.. die Mauerstärke an der Basis.

Fig. 172.



Heisst man das statische Umsturzmoment S_E, wobei der Zeiger E auf die Wirkung durch das Erdreich hindeutet, so hat man offenbar:

$$S_E = D \,.\, \overline{A'm} - R \,.\, \overline{Ao},$$

indem $\overline{A'm}$ und $\overline{Ao}$ die Hebelsarme der Kräfte D und R sind, wenn $\overline{A'm} \parallel \overline{AF}$ und $\overline{Ao} \perp \overline{AF}$ gezogen werden.

Nun ist aber einerseits:

$$D = \tfrac{1}{2}\, w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},\ R = D\mu,$$

und andererseits:

$$\overline{A'm} = \overline{AM} + \overline{A'o} = \frac{e}{\cos \varepsilon} + B \sin \varepsilon,$$

$$\overline{Ao} = B \cos \varepsilon;$$

folglich findet man:

$$S_E = D \cos \varepsilon \left[\frac{e}{\cos^2 \varepsilon} - B(\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, wH^2 \left[\frac{e}{\cos^2 \varepsilon} - B(\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right].$$

Beachtet man, dass unter den in der Praxis üblichen Voraussetzungen, nach den Erörterungen in der ersten Abtheilung dieses Buches, der Werth von e entweder genau mit $\frac{1}{3} H$ angenommen werden kann, oder wenigstens nicht viel davon abweicht, so ist es zweckmässig, im Allgemeinen

$$e = \tfrac{1}{3}\, mH \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (503)$$

zu setzen, wobei dann der Coefficient m entweder genau die Einheit ist, oder aber diese letztere nur wenig überschreitet.

Hiernach kann man auch schreiben:

$$S_E = \tfrac{1}{2}\, wH^2 \left[\frac{mH}{3 \cos^2 \varepsilon} - B(\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right] \ldots\ldots (504).$$

Soll die Futtermauer eine s-fache Sicherheit darbieten, so muss das s-fache Offensivmoment des Erddruckes gleich gesetzt werden dem einfachen Defensivmomente des Mauerwerkes. Es muss also die Bedingungsgleichung bestehen:

$$s \,.\, S_E = S_M \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (505),$$

wobei für S_M der entsprechende Ausdruck in (501) aufgestellt wurde.

Wird diese Absicht ausgeführt, so specialisirt sich die angegebene Bedingungsgleichung in folgender Weise:

$$s w H^2 \left[\frac{m H}{3 \cos^2 \varepsilon} - B (\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right]$$
$$= q \left[B^2 H + B H^2 \operatorname{tg} \varepsilon - \tfrac{1}{3} H^3 (n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon)\right],$$

woraus, indem man B oder eigentlich $\frac{B}{H}$ aufsucht, die nach dieser Unbekannten geordnete Gleichung folgt:

$$\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \left(\frac{B}{H}\right)\left[\operatorname{tg} \varepsilon + \frac{s w}{q}(\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right] = \frac{m s w}{3 q \cos^2 \varepsilon} + \tfrac{1}{3} (n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon),$$

und somit für die Unbekannte selbst erhalten wird:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2} \left[\operatorname{tg} \varepsilon + \frac{s w}{q} (\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right] +$$
$$+ \sqrt{\tfrac{1}{4} \left[\operatorname{tg} \varepsilon + \frac{s w}{q} (\mu - \operatorname{tg} \varepsilon)\right]^2 + \frac{m s w}{3 q \cos^2 \varepsilon} + \tfrac{1}{3} (n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} \quad (506).$$

Weiter ist nach Gleichung (493):

$$\frac{b}{H} = \frac{B}{H} - (n - \operatorname{tg} \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (507);$$

wobei zur Erlangung brauchbarer Resultate die Wurzelgrösse augenscheinlich mit dem positiven Zeichen zu versehen ist.

§. 111.

Bestimmung der Mauerstärken für den Fall, wenn der Einfluss der Reibung zwischen Erde und Stützwand nicht directe in Rechnung kommt, sondern erst bei der Feststellung des Sicherheits-Coefficienten berücksichtiget wird. Jetzt ist zunächst $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$ zu setzen, wodurch die Gleichung (506) in folgende übergeht:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2} \left(1 - \frac{s w}{q}\right) \operatorname{tg} \varepsilon +$$
$$+ \sqrt{\tfrac{1}{4} \left(1 - \frac{s w}{q}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{m s w}{3 q \cos^2 \varepsilon} + \tfrac{1}{3} (n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon)} \quad (508).$$

Das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen kann übrigens auch ausgedrückt werden durch:

$$\frac{m s w}{3 q}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right).$$

In dieser Formel hat man nach den im zweiten Abschnitte des ersten Hauptstückes der ersten Abtheilung dieses Buches enthaltenen Regeln und Resultaten den bezüglichen Werth für

$\frac{w}{g}$ einzuführen, und auch den Sicherheits-Coefficienten s der Erfahrung gemäss zu wählen. In letzterer Beziehung dienen die Bemerkungen in den §§. 35, 36 und 46, wo die dort aufgestellten Sicherheits-Coefficienten schon mit Rücksicht auf den Umstand, dass bei der Ausmittlung des Werthes für $\frac{w}{g}$ die an der Stützwand entstehende Reibung nicht in Rechnung kommt, bemessen erscheinen, und demnach bezüglich der Bestimmung der Mauerstärken zu praktisch brauchbaren Resultaten führen.

Ist die Oberfläche des Erdreiches von einer Ebene begrenzt, so hat man $m = 1$ zu setzen. Ausserdem ist w, beziehungsweise $\frac{w}{g}$, je nach Umständen im Sinne des §. 37 aus den Formeln (95), (96), (97), (98), oder aber aus jenen unter (145), (146), (161), (164), (170) zu berechnen, je nachdem jene Oberfläche horizontal oder irgendwie geneigt ist. Auch kann man zur Vereinfachung die dazu gehörigen Tabellen benützen, oder unmittelbar in grafischer Weise hiebei vorgehen, wie dies beispielsweise in dem in der Fig. 103 auf Seite 222 angedeuteten Falle geschehen ist.

Liegt das Plateau des Erdreiches höher als die Mauerkrone, und trifft hiebei die Bruch- oder gefährliche Böschung noch das Plateau, so ist $m > 1$, wie dies aus der XII. Tabelle (Seite 270), dann aus den Bemerkungen in den §§. 62 und 64 ersichtlich ist. Der bezügliche Werth von w, beziehungsweise $\frac{w}{g}$, ergibt sich sodann je nach dem gegebenen Falle aus den Formeln (209), (252), (278), eventuell auch aus der Tabelle XI.

Trifft dagegen die Bruch- oder gefährliche Böschung nicht das Plateau, sondern die vordere, von der Wandkrone aufsteigende Erdböschung, wie das den vorausgegangenen Untersuchungen gemäss unter Umständen in den Fällen nach Fig. 126 oder 128 stattfindet, so ist abermals $m = 1$ zu setzen, und der Werth von $\frac{w}{g}$ so zu bestimmen, wie wenn das Plateau nicht vorhanden wäre, was aus der Bemerkung auf Seite 281 zu Fig. 125, so wie aus jener auf Seite 296 erhellet.

Die vorige Formel (508) vereinfacht sich für besondere Mauerprofile, wie folgt:

Ist die Mauer vorne und rückwärts vertical, also $n = 0$ und $\varepsilon = 0$, so hat man:

$$\frac{B}{H} = \sqrt{\frac{m\,s\,w}{3\,q}} \dots\dots\dots\dots (509).$$

Ist dieselbe blos rückwärts vertical, vorne aber geböscht, somit $\varepsilon = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{B}{H} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{m\,s\,w}{q} + n^2\right)} \dots\dots\dots\dots (510).$$

Ist endlich die vordere Mauerböschung mit der rückwärtigen parallel, wenn auch schief, so erhält man wegen $n = \operatorname{tg} \varepsilon$:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s\,w}{q}\right) \operatorname{tg} \varepsilon + \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{s\,w}{q}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{m\,s\,w}{3\,q \cos^2 \varepsilon}} \quad (511).$$

Fälle, in welchen $m = 1$ zu setzen ist, nämlich der Mittelpunkt des Erddruckes in dem dritten Theile der Druckhöhe angenommen werden kann, kommen zumeist vor (z. B. wenn die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales von einer Ebene begrenzt ist): für solche hat man daher:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s\,w}{q}\right) \operatorname{tg} \varepsilon +$$

$$+ \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{s\,w}{q}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{s\,w}{3\,q \cos^2 \varepsilon} + \tfrac{1}{3}\left(n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right)} \quad (512).$$

Zur Erleichterung der Rechnung in derartigen Fällen kann man die tabellarische Zusammenstellung (XIX) auf den Seiten 456 bis 459 benützen.

Diese enthält eine Reihe berechneter Werthe von $\left(\frac{B}{H}\right)$ für verschiedene Werthe von $\left(\frac{s\,w}{q}\right)$, n und $\operatorname{tg} \varepsilon$.

Hiebei kommt den bezeichneten Grössen folgende Bedeutung zu:

s.. ist der Sicherheits-Coefficient — nach Massgabe des Zweckes der Futtermauer, also eventuell auch mit Rücksicht auf die Wirkung der ungünstigsten zufälligen Belastung auf dem gestützten Erdreiche zu bemessen;

q.. ist das Gewicht einer Cubikeinheit des Mauerwerkes;

w.. ist das Einheitsgewicht derjenigen sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche den gleichen Druck an die Mauer wie das Erdreich erzeugen würde;

$\left(\frac{s\,w}{q}\right)$.. ist eine hiernach zu berechnende Zahl;

n.. ist das Böschungsverhältniss für die vordere, und

tg ε.. jenes für die rückwärtige Mauerfläche:

$\frac{B}{H}$.. endlich ist das fragliche Verhältniss zwischen der nöthigen Mauerstärke (B) an der Basis und der Druckhöhe (H) mit Rücksicht auf die verlangte Sicherung der Construction gegen Umsturz*).

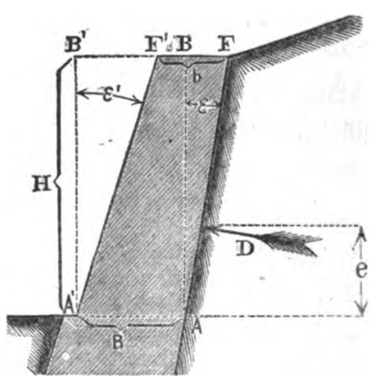
---

*) Die jenseits folgende tabellarische Zusammenstellung hat der Verfasser zuerst im Oesterreichischen Baualmanach vom Jahre 1861 veröffentlichet.

XIX. Tabelle,

zur Bestimmung der Stärke von Futtermauern für $m = 1$ mit Rücksicht auf den $s$fachen Widerstand gegen Umsturz.

Fig. 173.



$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}} = \operatorname{tg} \varepsilon, \quad \frac{\overline{B'F'}}{\overline{A'B'}} = \operatorname{tg} \varepsilon' = n, \quad D = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon},$$

$$e = \tfrac{1}{3} m H = \tfrac{1}{3} H, \quad m = 1, \quad b = B - (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H.$$

1. Für $\frac{s\,w}{q} = 0{\cdot}1$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	—	0·194	0·186	0·180	0·173	0·152	0·134	0·107
$\frac{1}{5}$	0·216	0·177	0·169	0·163	0·156	0·135	0·117	
$\frac{1}{6}$	0·206	0·167	0·159	0·153	0·146	0·125		
$\frac{1}{8}$	0·196	0·157	0·149	0·143	0·136			
$\frac{1}{9}$	0·194	0·154	0·145	0·140				
$\frac{1}{10}$	0·192	0·152	0·144					
$\frac{1}{12}$	0·189	0·150						
0	0·183							

2. Für $\frac{sw}{q} = 0 \cdot 2$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·296	0·261	0·254	0·249	0·243	0·224	0·208	0·184
$\frac{1}{5}$	0·283	0·248	0·241	0·236	0·230	0·211	0·195	
$\frac{1}{6}$	0·276	0·241	0·233	0·229	0·222	0·203		
$\frac{1}{8}$	0·268	0·233	0·226	0·221	0·215			
$\frac{1}{9}$	0·266	0·231	0·223	0·219				
$\frac{1}{10}$	0·265	0·230	0·222					
$\frac{1}{12}$	0·262	0·228						
0	0·258							

3. Für $\frac{sw}{q} = 0 \cdot 3$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·348	0·317	0·311	0·307	0·301	0·285	0·271	0·250
$\frac{1}{5}$	0·337	0·306	0·300	0·296	0·290	0·274	0·260	
$\frac{1}{6}$	0·331	0·300	0·294	0·289	0·284	0·268		
$\frac{1}{8}$	0·325	5·294	0·288	0·283	0·278			
$\frac{1}{9}$	0·323	0·292	0·286	0·282				
$\frac{1}{10}$	0·321	0·291	0·285					
$\frac{1}{12}$	0·320	0·290						
0	0·316							

4. Für $\frac{sw}{q} = 0 \cdot 4$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·393	0·367	0·361	0·358	0·353	0·339	0·327	0·309
$\frac{1}{5}$	0·384	0·357	0·352	0·348	0·343	0·329	0·317	
$\frac{1}{6}$	0·378	0·352	0·346	0·343	0·338	0·323		
$\frac{1}{8}$	0·372	0·346	0·341	0·337	0·332			
$\frac{1}{9}$	0·371	0·345	0·339	0·336				
$\frac{1}{10}$	0·370	0·343	0·338					
$\frac{1}{12}$	0·368	0·342						
0	0·365							

5. Für $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot5$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·433	0·411	0·407	0·404	0·400	0·388	0·378	0·363
$\frac{1}{5}$	0·424	0·403	0·398	0·395	0·391	0·379	0·369	
$\frac{1}{6}$	0·419	0·398	0·393	0·390	0·386	0·374		
$\frac{1}{8}$	0·414	0·393	0·388	0·385	0·381			
$\frac{1}{9}$	0·413	0·392	0·387	0·384				
$\frac{1}{10}$	0·412	0·391	0·386					
$\frac{1}{12}$	0·411	0·389						
0	0·408							

6. Für $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot6$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·470	0·453	0·449	0·446	0·443	0·434	0·426	0·414
$\frac{1}{5}$	0·462	0·444	0·441	0·438	0·435	0·426	0·418	
$\frac{1}{6}$	0·457	0·440	0·436	0·434	0·431	0·422		
$\frac{1}{8}$	0·453	0·436	0·432	0·429	0·426			
$\frac{1}{9}$	0·452	0·434	0·430	0·428				
$\frac{1}{10}$	0·451	0·434	0·430					
$\frac{1}{12}$	0·450	0·432						
0	0·447							

7. Für $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot7$.

$\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε							
Aeussere Mauerböschung n	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·504	0·491	0·488	0·487	0·484	0·477	0·471	0·462
$\frac{1}{5}$	0·497	0·484	0·481	0·479	0·477	0·469	0·464	
$\frac{1}{6}$	0·493	0·480	0·477	0·475	0·473	0·465		
$\frac{1}{8}$	0·488	0·475	0·473	0·471	0·468			
$\frac{1}{9}$	0·487	0·474	0·471	0·470				
$\frac{1}{10}$	0·486	0·473	0·471					
$\frac{1}{12}$	0·485	0·472						
0	0·483							

8. Für $\frac{sw}{q} = 0{\cdot}8$.

Aeussere Mauerböschung n / $\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε: 0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·536	0·528	0·526	0·525	0·523	0·518	0·514	0·508
$\frac{1}{5}$	0·529	0·520	0·519	0·517	0·516	0·511	0·507	
$\frac{1}{6}$	0·525	0·517	0·515	0·514	0·512	0·507		
$\frac{1}{8}$	0·521	0·513	0·511	0·510	0·508			
$\frac{1}{9}$	0·520	0·512	0·509	0·509				
$\frac{1}{10}$	0·519	0·511	0 509					
$\frac{1}{12}$	0·519	0 510						
0	0·516							

9. Für $\frac{sw}{q} = 0{\cdot}9$.

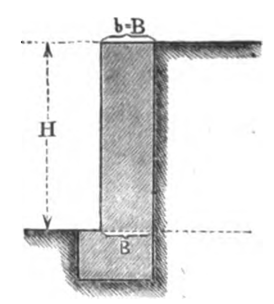
Aeussere Mauerböschung n / $\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε: 0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·567	0·562	0·561	0·560	0·560	0·557	0·555	0·552
$\frac{1}{5}$	0·560	0·555	0·554	0·554	0·553	0·550	0·549	
$\frac{1}{6}$	0·556	0·552	0·551	0·550	0·549	0·547		
$\frac{1}{8}$	0·552	0·548	0·547	0·547	0·546			
$\frac{1}{9}$	0·551	0 547	0·546	0·546				
$\frac{1}{10}$	0·551	0·546	0·545					
$\frac{1}{12}$	0·550	0·545						
0	0·548							

10. Für $\frac{sw}{q} = 1$.

Aeussere Mauerböschung n / $\frac{B}{H} =$	Innere Mauerböschung tg ε: 0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	0·595	0·595	0 595	0·595	0·595	0·595	0·595	0·595
$\frac{1}{5}$	0·589	0·589	0 589	0·589	0·589	0·589	0·589	
$\frac{1}{6}$	0·585	0·585	0·585	0·585	0·585	0·585		
$\frac{1}{8}$	0·582	0·582	0·582	0 582	0·582			
$\frac{1}{9}$	0·581	0·581	0·581	0·581				
$\frac{1}{10}$	0·580	0·580	0·580					
$\frac{1}{12}$	0·579	0·579						
0	0·577							

Beispiele.

I. (Fig. 174.)



Wie stark ist eine 30 Fuss hohe, vorne und rückwärts verticale Stützmauer längs einer Strasse herzustellen, wenn der Cubikfuss des Mauerwerkes 120 Pfund wiegt. Die natürliche Erdböschung, nach dem Verhältnisse zwischen Anlage und Höhe ausgedrückt, sei 1·2. Das Erdreich soll ferner mit demjenigen Gewichte in Rechnung genommen werden, welches in dem Beispiele auf Seite 140 (nämlich 80 Pfund per Cubikfuss) angegeben ist. Auch der dort ermittelte Sicherheits-Coefficient (1·55) soll hieher übertragen werden.

Hiernach erscheinen folgende Daten gegeben:
$H = 30'$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1\cdot2$, $n = \mathrm{tg}\,\varepsilon = 0$, $g = 80$ Pfd., $q = 120$ Pfd. und $s = 1\cdot55$.

Zunächst hat man w, beziehungsweise $\frac{w}{g}$ zu bestimmen. Nach der Tabelle VI auf Seite 90 ergibt sich für $\mathrm{tg}\,\alpha = 1\cdot2$ und $\mathrm{tg}\,\varepsilon = 0$:

$$\frac{w}{g} = 0\cdot219,\ w = 0\cdot219\ g = 17\cdot52 \text{ Pfd.}$$

Jetzt ist $\frac{s\,w}{q}$ auszumitteln. Geschieht dies, so erhält man:

$$\frac{s\,w}{q} = \frac{1\cdot55 \times 0\cdot219 \times 80}{120} = 0\cdot226.$$

Auf Grund dieses Werthes und der Daten $n = \mathrm{tg}\,\varepsilon = 0$ sucht man schliesslich mit Hilfe der Tabelle XIX die fragliche Grösse $\frac{B}{H}$, und zwar hat man hiezu, da dort die Resultate nur für ganze Zehntel von $\frac{s\,w}{q}$ eingetragen sind, die Interpolations-Methode anzuwenden, wie folgt:

Für $n = 0$, $\mathrm{tg}\,\varepsilon = 0$ und $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot2$ ist $\frac{B}{H} = 0\cdot258$

" " " " $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot3$ " $\frac{B}{H} = 0\cdot316$

Differenz . . 0·1 . . . . 0·058.

$$0{\cdot}1 : 0{\cdot}058 = (0{\cdot}226 - 0{\cdot}2) : x,$$
$$x = 0{\cdot}015.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0{\cdot}258 + x = 0{\cdot}273.$$

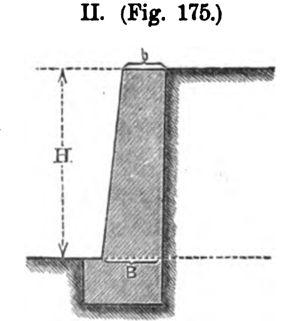
Also hat man:

$$B = b = 0{\cdot}273\, H = 8{\cdot}19 \text{ Fuss.}$$

Die Fläche des Mauerprofiles, diese sei F, wird hiernach:

$$F = BH = 245{\cdot}7 \,\square\, \text{Fuss.}$$

II. (Fig. 175.)



Dasselbe Beispiel, wie früher, nur mit dem Unterschiede, dass die Stützmauer vorne nicht vertical, sondern geböscht ist, und das bezügliche Böschungsverhältniss $\frac{1}{12}$ sein soll.

Jetzt ist $n = \frac{1}{12}$, die übrigen Daten sind eben so wie im ersten Beispiele.

Hiernach erhält man zunächst, wie früher:

$$\frac{s\,w}{q} = 0{\cdot}226,$$

daher:

$$\text{Für tg } \varepsilon = 0,\ n = \tfrac{1}{12} \text{ und } \frac{s\,w}{q} = 0{\cdot}2 \ldots \frac{B}{H} = 0{\cdot}262$$

$$\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{s\,w}{q} = 0{\cdot}3 \ldots \frac{B}{H} = 0{\cdot}320$$

Differenz . . . 0·1 . . . . 0·058.

$$0{\cdot}1 : 0{\cdot}058 = (0{\cdot}226 - 0{\cdot}2)\, x,$$
$$x = 0{\cdot}015.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0{\cdot}262 + x = 0{\cdot}277.$$

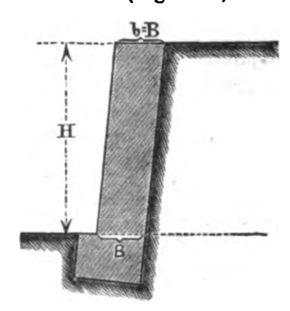
Also hat man:

$$B = 0 \cdot 277\, H \quad = 8 \cdot 31 \text{ Fuss},$$
$$b = B - \tfrac{1}{12}\, H = 5 \cdot 81 \text{ Fuss}.$$

Querprofil der Stützmauer:

$$F = \tfrac{1}{2}\,(B + b)\, H = 211 \cdot 8 \,\square\, \text{Fuss}.$$

III. (Fig. 176.)



Strassenstützmauer mit parallelen Wänden, welche nach dem Verhältnisse $n = \text{tg}\, \varepsilon = \frac{1}{12}$ geböscht sind. Die sonstigen Daten wie in den beiden vorigen Beispielen.

Jetzt erhält man, wegen $\text{tg}\, \alpha = 1 \cdot 2$ und $\text{tg}\, \varepsilon = \frac{1}{12}$, aus der Tabelle VI auf Seite 90:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 189,\; w = 0 \cdot 189\, g = 15 \cdot 12 \text{ Pfd.};$$

ferner:

$$\frac{s\,w}{q} = \frac{1 \cdot 55 \times 0 \cdot 189 \times 80}{120} = 0 \cdot 195.$$

Hiernach ergibt sich:

$$\text{Für tg}\, \varepsilon = n = \tfrac{1}{12} \text{ und } \frac{s\,w}{q} = 0 \cdot 1 \ldots\ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 150$$

$$\text{„ „ „ „ „ } \frac{s\,w}{q} = 0 \cdot 2 \ldots\ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 228$$

Differenz . . . 0·1 . . . . 0·078.

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 078 = (0 \cdot 2 - 0 \cdot 195) : x,$$
$$x = 0 \cdot 004.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0 \cdot 228 - x = 0 \cdot 224.$$

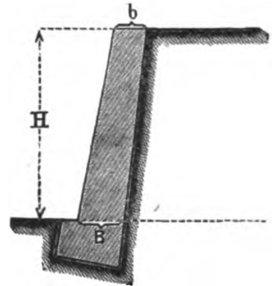
Also hat man:

$$B = b = 0 \cdot 224\, H = 6 \cdot 72 \text{ Fuss}.$$

Die Fläche des Mauerprofiles ist:

$$F = B\,H = 201 \cdot 6 \,\square\, \text{Fuss}.$$

IV. (Fig. 177.)



Strassenstützmauer vorne und rückwärts geböscht. Für die erstere Böschung sei $n = \frac{1}{6}$, für die letztere aber $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{12}$. Alle übrigen Daten wie früher.

Hier ist, wie in dem dritten Beispiele:

$$\frac{sw}{q} = 0 \cdot 195,$$

wonach man erhält:

$$\text{Für } \operatorname{tg} \varepsilon = \tfrac{1}{12},\ n = \tfrac{1}{6} \text{ und } \frac{sw}{q} = 0 \cdot 1 \ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 167$$

$$\text{„ „ „ „ } \frac{sw}{q} = 0 \cdot 2 \ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 241$$

Differenz ... $0 \cdot 1$ .... $0 \cdot 074$.

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 074 = (0 \cdot 2 - 0 \cdot 195) : x,$$

$$x = 0 \cdot 004.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0 \cdot 241 - 0 \cdot 004 = 0 \cdot 237.$$

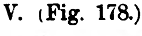
Also hat man:

$$B = 0 \cdot 237\, H = 7 \cdot 11 \text{ Fuss},$$

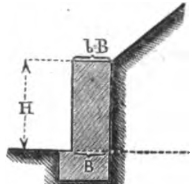
$$b = B - \tfrac{1}{12} H = 4 \cdot 61 \text{ Fuss}.$$

Die Fläche des Mauerprofiles ist:

$$F = \tfrac{1}{2}(B + b)\, H = 175 \cdot 8 \ \square \text{ Fuss}.$$



V. (Fig. 178.)



Es soll die Stärke einer 10 Fuss hohen, vorne und rückwärts verticalen Wandmauer an einem nach der natürlichen Böschung ansteigenden

Erdreiche bestimmt werden, wenn der Sicherheits-Coefficient mit Rücksicht auf die Bemerkungen im §. 46 mit $s = 1^1/_4$ angenommen wird. Die sonstigen Daten sollen dieselben sein, wie in den früheren Beispielen.

Jetzt hat man:

$H = 10'$, $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, $n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$, $g = 80$ Pfd., $q = 120$ Pfd. und $s = 1^1/_4$.

Für diesen Fall ist zunächst w, beziehungsweise $\frac{w}{g}$, aus der Tabelle IX, Seite 144, zu bestimmen. Dadurch findet man für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$:

$$\frac{w}{g} = 0 \cdot 590, \quad w = 47 \cdot 2 \text{ Pfd.};$$

hiernach aber, wegen $s = 1^1/_4$ und $q = 120$ Pfd.:

$$\frac{sw}{q} = \frac{1\tfrac{1}{4} \times 0 \cdot 590 \times 80}{120} = 0 \cdot 492.$$

Dieser Werth liegt zwischen 0·4 und 0·5, und man erhält nach der Tabelle XIX:

$$\text{Für } n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0 \text{ und } \frac{sw}{q} = 0 \cdot 4 \ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 365$$

$$\text{„ „ „ „ „ } \frac{sw}{q} = 0 \cdot 5 \ldots \frac{B}{H} = 0 \cdot 408$$

Differenz....0·1..........0·043,

daher, indem man interpolirt:

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 043 = (0 \cdot 5 - 0 \cdot 492) : x,$$

$$x = 0 \cdot 003,$$

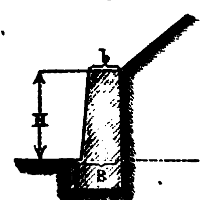
$$\frac{B}{H} = 0 \cdot 408 - x = 0 \cdot 405,$$

$$B = b = 0 \cdot 405\, H = 4 \cdot 05 \text{ Fuss}.$$

Fläche des Mauerprofiles:

$$F = BH = 40 \cdot 5 \;\square\; \text{Fuss}.$$

VI. (Fig. 179.)



Wandmauer wie zuvor; nur soll dieselbe vorne nicht vertical, sondern $\frac{1}{12}'$ geböscht sein. Dermalen ist also $n = \frac{1}{12}$, alle übrigen Daten wie im Beispiele V.

Indem die Hinterwand lothrecht steht, so hat man zunächst wie früher:

$$\frac{s\,w}{q} = 0\cdot492,$$

folglich nach der Tabelle XIX:

$$\text{Für tg}\ \varepsilon = 0,\ n = \tfrac{1}{12}\ \text{und}\ \frac{s\,w}{q} = 0\cdot4 \ldots \frac{B}{H} = 0\cdot368$$

$$\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad \frac{s\,w}{q} = 0\cdot5 \ldots \frac{B}{H} = 0\cdot411$$

Differenz....0·1..........0·043,

und wenn man interpolirt:

$$0\cdot1 : 0\cdot043 = (0\cdot5 - 0\cdot492) : x,$$

$$x = 0\cdot003,$$

$$\frac{B}{H} = 0\cdot411 - 0\cdot003 = 0\cdot408,$$

hiernach aber:

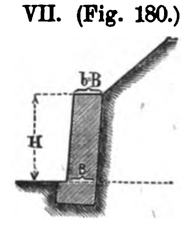
$$B = 0\cdot408\,H \quad = 4\cdot08 \text{ Fuss},$$

$$b = B - \tfrac{1}{12}\,H = 3\cdot25 \text{ Fuss}.$$

Die Mauerprofilfläche ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\,(B + b)\,H = 36\cdot65 \square \text{ Fuss}.$$

VII. (Fig. 180.)



Wandmauer vorne und rückwärts parallel geböscht, und das bezügliche Böschungsverhältniss $n = \text{tg}\ \varepsilon = \frac{1}{12}$. Die sonstigen Daten sollen so wie zuvor sein.

Jetzt ist wegen $\text{tg}\ \alpha = 1\cdot2$ und $\text{tg}\ \varepsilon = \frac{1}{12}$ nach der Tabelle IX:

$$\frac{w}{g} = 0\cdot511,\ w = 0\cdot511\ g = 40\cdot88 \text{ Pfd.},$$

somit:

$$\frac{s\,w}{q} = \frac{1\frac{1}{4} \times 0\cdot511 \times 80}{120} = 0\cdot426.$$

Mit Benützung der Tabelle XIX ergibt sich hiernach:

$$\text{Für}\ n = \text{tg}\,\varepsilon = \tfrac{1}{12}\ \text{und}\ \frac{s\,w}{q} = 0\cdot4 \ldots \frac{B}{H} = 0\cdot342$$

$$\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad \frac{s\,w}{q} = 0\cdot5 \ldots \frac{B}{H} = 0\cdot389$$

Differenz....0·1..........0·047.

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 047 = (0 \cdot 426 - 0 \cdot 4) : x,$$
$$x = 0 \cdot 012.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0 \cdot 342 + 0 \cdot 012 = 0 \cdot 354.$$

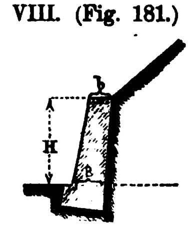
Folglich findet man:

$$B = b = 0 \cdot 354 = 3 \cdot 54 \text{ Fuss.}$$

Die Fläche des Mauerprofiles ist:

$$F = BH = 35 \cdot 4 \square \text{ Fuss.}$$

VIII. (Fig. 181.)



Wandmauer vorne $\frac{1}{6}$ und rückwärts $\frac{1}{12}$ geböscht, also $n = \frac{1}{6}$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{12}$; sonst die früheren Daten.

Wie in dem Beispiele VII, ist auch dermalen:

$$\frac{s\,w}{q} = 0 \cdot 426,$$

daher mit Rücksicht auf die Tabelle XIX:

Für $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{12}$, $n = \frac{1}{6}$ und $\frac{s\,w}{q} = 0 \cdot 4 \ldots . \frac{B}{H} = 0 \cdot 352$

„ „ „ „ $\frac{s\,w}{q} = 0 \cdot 5 \ldots . \frac{B}{H} = 0 \cdot 398$

Differenz....0·1..........0·046.

$$0 \cdot 1 : 0 \cdot 046 = (0 \cdot 426 - 0 \cdot 4) : x,$$
$$x = 0 \cdot 012.$$

Corrigirter Werth von $\frac{B}{H}$:

$$\frac{B}{H} = 0 \cdot 352 + x = 0 \cdot 364.$$

Sofort findet man:

$$B = 0 \cdot 364\, H = 3 \cdot 64 \text{ Fuss.}$$
$$b = B - \tfrac{1}{12} H = 2 \cdot 81 \text{ Fuss.}$$

Die Mauerprofilfläche ist:

$$F = \tfrac{1}{2}(B + b)\, H = 32 \cdot 25 \square \text{ Fuss.}$$

Für die gewöhnlich vorkommenden praktischen Verhältnisse ergibt sich in Bezug auf den Grad der Zweckmässigkeit der Mauerprofilformen, dass unter sonst gleichen Umständen solche Mauern, welche vorne und rückwärts vertical angeordnet sind, einen grösseren Materialaufwand erfordern, als diejenigen, welche blos rückwärts vertical, vorne aber geböscht sind; ferner, dass liegende Mauern, also vorne und rückwärts geböscht, mit noch weniger Materiale hergestellt werden können, wobei es übrigens einen weiteren Vortheil gewährt, wenn die vordere Böschung etwas grösser als die rückwärtige ist.

Diese Bemerkungen findet man in den zuvor gegebenen Beispielen bestätiget, denn die mit F bezeichneten Mauerprofile, mit denen der Materialaufwand proportional ist, verhalten sich in den vier ersten Beispielen, wie:

$$\begin{array}{ccccccc} (I) & & (II) & & (III) & & (IV) \\ 245{\cdot}7 & : & 211{\cdot}8 & : & 201{\cdot}6 & : & 175{\cdot}8, \end{array}$$

und in den vier letzten Beispielen, wie:

$$\begin{array}{ccccccc} (V) & & (VI) & & (VII) & & (VIII) \\ 40{\cdot}5 & : & 36{\cdot}65 & : & 35{\cdot}4 & : & 32{\cdot}25; \end{array}$$

oder, indem man das erste Glied überall durch die Einheit darstellt, einerseits, wie:

$$\begin{array}{ccccccc} (I) & & (II) & & (III) & & (IV) \\ 1 & : & 0{\cdot}86 & : & 0{\cdot}82 & : & 0.72, \end{array}$$

und andererseits, wie:

$$\begin{array}{ccccccc} (V) & & (VI) & & (VII) & & (VIII) \\ 1 & : & 0{\cdot}90 & : & 0{\cdot}87 & : & 0{\cdot}79. \end{array}$$

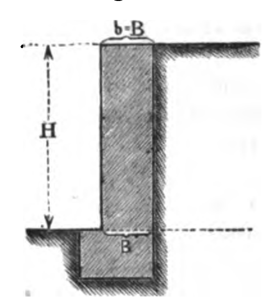
Bisher wurde die Mauerstärke aus dem Sicherheits-Coefficienten s und den sonstigen Daten bestimmt. Mitunter ist aber die Mauerstärke bekannt, und es soll dann nach dieser und den übrigen Daten der Sicherheits-Coefficient ermittelt werden. Dieser Fall tritt ein bei einer theoretisch vorzunehmenden Prüfung der Stabilität von projectirten oder ausgeführten Futtermauern. Hiebei kann man entweder mittelst Rechnung oder in grafischer Weise verfahren. Wird der Weg der Rechnung eingeschlagen, so hat man nach der bezüglichen Bedingungsgleichung für den s-fachen Widerstand der Mauer gegen Umsturz die Grösse s zu berechnen.

Geschieht dies, so erhält man:

$$s = \frac{q}{w} \cdot \frac{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \left(\frac{B}{H}\right) \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{3}\left(n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right)}{\frac{1}{3} m \left(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right) + \left(\frac{B}{H}\right) \operatorname{tg} \varepsilon} \quad \ldots\ldots(513).$$

Ex. Es seien, wie in dem Beispiele I auf Seite 460 folgende Daten gegeben; $H = 10$ Fuss, $n = 0$, $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$, $m = 1$, $g = 80$ Pfd. und $q = 120$ Pfd.; ausserdem sei die Stärke $B = 8 \cdot 19$ Fuss bekannt, welche die Mauer

Fig. 182.



(Fig. 182) erhalten soll. Wie gross ist der betreffende Sicherheits-Coefficient s?

Zunächst hat man $\left(\frac{B}{H}\right) = 0 \cdot 273$, und $w = 0 \cdot 219\, g = 17 \cdot 52$ Pfd.; somit $\frac{q}{w} = 6 \cdot 85$.

Hiernach ergibt die Gleichung (513):

$$s = 3 \left(\frac{q}{w}\right) \left(\frac{B}{H}\right)^2 = 1 \cdot 54,$$

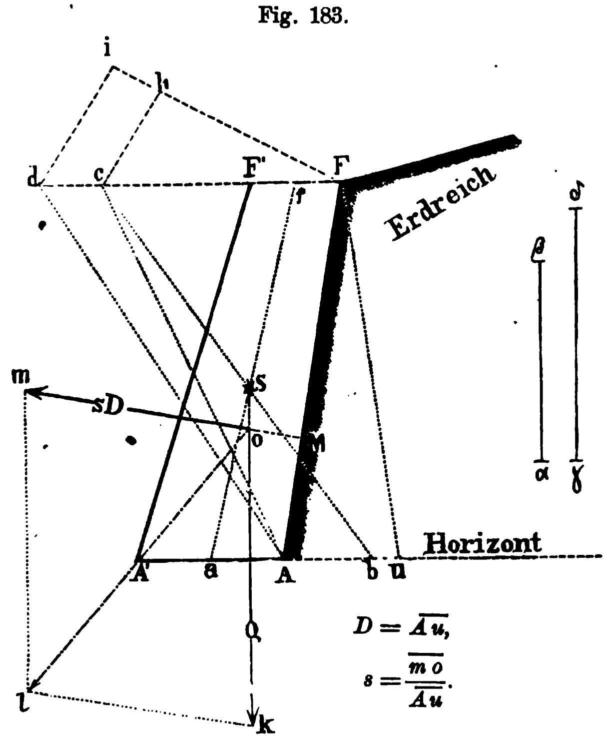
also in der That nahezu $1 \cdot 55$, für welchen Sicherheits-Coefficienten die hier zu Grunde gelegte Mauerstärke $B = 8 \cdot 19$ Fuss gefunden wurde.

Um hiebei in grafischer Weise vorzugehen, hat man mit Bezug auf Fig. 183, worin das Mauerprofil $AA'FF'$ gegeben ist, Folgendes zu beachten*):

*) Ueber die grafische Bestimmung der Widerstandsfähigkeit von Futtermauern veröffentlichte der Verfasser schon im J. 1850 in Förster's allgemeiner Bauzeitung einen Aufsatz, welcher hierauf in die Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines v. J. 1851 überging und auch in Becker's Werk „Allgemeine Baukunde des Ingenieurs" (§. 110) eingeschaltet wurde.

Man construire das Kräftenparallelogramm $klmo$, worin die Verticale $\overline{ko}$ das nach der Richtung der Schwere wirkende Mauergewicht Q, die Seite $\overline{om}$ aber den $s$fachen Erddruck bedeutet, welche $s$fache Kraft so gross sein muss, dass die nach der Diagonale $\overline{lo}$ wirkende Mittelkraft geradezu durch die äussere Kante A' der Mauerbasis geht. Denn, dann ist in Bezug auf

Fig. 183.



die Drehungskante in A' das zu suchende $s$fache statische Moment des Erddruckes eben so gross wie das statische Moment des Mauerwerkes. Der Angriffspunkt o für die Kräfte ergibt sich aus der Lage und Richtung der Resultirenden für den Erddruck D und jener für das Mauergewicht Q. An der Kreuzungsstelle beider Kräfte ist nämlich jener Punkt o zu suchen.

Was die Lage und Richtung der Resultirenden des Erddruckes D betrifft, so ist zu bemerken, dass dieselbe durch den

Mittelpunkt M des gedachten Erddruckes geht und auf der Stützwand $\overline{AF}$ lothrecht steht, wenn, wie in diesem §. vorausgesetzt, die Reibung zwischen Erdreich und Stützwand nicht in Betracht kommt.

Man hat also zu construiren:

$$\overline{AM} = \tfrac{1}{3} m \,.\, \overline{AF} \text{ und } \overline{Mm} \perp \overline{AF},$$

wobei in den Fällen, wo das Erdreich hinter der Stützwand, von der Mauerkrone an, von einer Ebene begrenzt wird, der Coefficient $m = 1$, also $\overline{AM} = \tfrac{1}{3}\overline{AF}$ wird.

Die Resultirende des Mauergewichtes Q ist durch den Schwerpunkt S des gegebenen Mauerprofiles (des Trapezes $AA'F'F$) lothrecht zu zeichnen, wobei nach einer bekannten Regel aus der Mechanik der erwähnte Schwerpunkt S in dem Durchschnitte der beiden Geraden $\overline{af}$ und $\overline{bc}$ liegt, wenn a der Halbirungspunkt der Basis $\overline{AA'}$ und f jener der Krone $\overline{FF'}$ ist, während sowohl $\overline{Fc}$ als auch $\overline{A'b}$ die Summe der zwei Parallelen des Trapezes vorstellt, wonach einerseits $\overline{F'c} = \overline{AA'}$ und andererseits $\overline{Ab} = \overline{FF'}$ zu machen ist.

Um nun auch die Grösse der Kräfte grafisch darzustellen, so beachte man zunächst, dass der Erddruck D nach der zur Figur 102 gehörigen Erläuterung eben so gross ist, wie das Gewicht eines Erdprismas mit dem dort gezeichneten Profile $Eqr = Amn$, an dessen Stelle auch das ebenfalls dort angedeutete Dreieck AFu gesetzt werden kann. Angenommen, es sei dieses Dreieck AFu in der jetzt in Betracht stehenden Figur 183 vorschriftsmässig construirt worden, so stellt das Gewicht eines Erdprismas, welches das gedachte Dreieck mit der Höhe H zum Profile hat, die Grösse des Erddruckes D vor.

Uebergehend auf die zweite Kraft Q, so entsteht diese durch die Schwere des Steinprismas mit dem trapezförmigen Profile $AA'FF'$. Verwandelt man das Letztere in das Dreieck AFc, indem man den schon früher gefundenen Punkt c mit A verbindet, so ist Q auch das Gewicht eines Steinprismas mit dem dreieckigen Profile AFc. Der Gleichmässigkeit der Darstellung

wegen wird man nunmehr an die Stelle dieses Steinprismas ein Erdprisma von demselben Gewichte Q substituiren, was dadurch geschieht, dass man die Grundlinie $(\overline{Fc})$ von dem Steinprofilprisma in demselben Verhältnisse vergrössert, in dem das Gewicht einer cubischen Einheit vom Erdreiche kleiner ist, als jenes vom Mauerwerke. Angenommen, es sei das erwähnte Verhältniss durch jenes der beiden Geraden $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$ ausgedrückt, so dass also die Proportion existirt:

$$\overline{\alpha\beta} : \overline{\gamma\delta} = g : q,$$

so braucht man zu dem ausgesprochenen Zwecke nur von F aus eine beliebig gerichtete Gerade zu zeichnen, darauf $\overline{Fh} = \overline{\alpha\beta}$ und $\overline{Fi} = \overline{\gamma\delta}$ aufzutragen, h mit c zu verbinden, und $\overline{di} \parallel \overline{ch}$ zu ziehen. Sodann ist $\overline{Fd}$ die fragliche in dem Verhältnisse $\left(\frac{q}{g} = \frac{\overline{\gamma\delta}}{\overline{\alpha\beta}}\right)$ vergrösserte Gerade, und es leuchtet ein, dass das Mauergewicht Q nunmehr gerade so gross ist, wie das Gewicht des Erdprismas mit dem dreieckigen Profile AFd.

Hiernach ergibt sich:

$$D : Q = \triangle \overline{AFu} : \triangle AFd,$$

oder, indem beide Dreiecke die gleiche Höhe H haben, auch:

$$D : Q = \overline{Au} : \overline{Fd};$$

es kommt also blos das Verhältniss der zwei Dreiecks-Grundlinien in Betracht.

Da der Massstab zur grafischen Darstellung der Kräfte beliebig ist, so ist es erlaubt, als Repräsentanten der Erddruckgrösse D directe die Dreiecksbasis $\overline{Au}$ anzunehmen, wodurch dann das Mauergewicht Q vermittelst der anderen Dreiecksbasis $\overline{Fd}$ ebenfalls unmittelbar dargestellt sein wird.

Wenn man jetzt die Kraft $Q = \overline{Fd}$ von o aus vertical nach abwärts aufträgt, also $\overline{ko} = \overline{Fd}$ macht, ist das ganze Kräftenparallelogramm $klmo$ bestimmt; indem man nämlich die Diagonale $\overline{oA'l}$ zieht, dann $\overline{kl} \parallel \overline{om}$ und $\overline{lm} \parallel \overline{ko}$ macht.

Auf diese Weise ist diejenige offensive Druckkraft $\overline{om} = \overline{kl}$ gefunden, welche vorhanden sein kann, um der Defensivkraft Q

im ungünstigsten Falle noch das Gleichgewicht zu halten. Jene Offensivkraft ist aber das $s$fache des Erddruckes D, also:

$$\overline{kl} = \overline{mo} = sD,$$

und da nach dem Obigen $D = \overline{Au}$ war, so hat man schliesslich für die zu suchende Grösse des Sicherheits-Coefficienten:

$$s = \frac{\overline{mo}}{\overline{Au}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (514).$$

Misst man daher diese beiden Linien $\overline{mo}$ und $\overline{Au}$ auf irgend einem Massstabe ab, und dividirt die betreffenden Zahlenwerthe durch einander, so erhält man den Coefficienten s. Selbstverständlich kann man die angedeutete Division auch grafisch ausführen.

So findet man nach den vorkommenden Verhältnissen in der zur Erläuterung dienenden Figur 183 beispielsweise $s = 2$.

Oben wurde, wie es gewöhnlich ist, $g < q$ und hiernach auch $\overline{\alpha\beta} < \overline{\gamma\delta}$ angenommen. Ausnahmsweise kann aber $g > q$ sein, sodann ist auch $\overline{\alpha\beta} > \overline{\gamma\delta}$, und es wird die in der Figur 183 erscheinende Dreiecksbasis $\overline{Fc}$ nach dem betreffenden Verhältnisse beider Einheitsgewichte nicht zu vergrössern, sondern zu verkleinern sein, wodurch man $\overline{Fd} < \overline{Fc}$ erhält. Dieser Fall kann z. B. eintreten, wenn hinter einer Ziegelmauer schweres Erdreich (Schotter gestampfter Lehm) aufgeschichtet wird.

Bei der bisherigen Betrachtung des Umsturzmomentes wurde angenommen, dass die Drehungsachse hiefür ganz unten in A' (Fig. 184) gelegen sei. Zur Rechtfertigung für diese Annahme dienen folgende Bemerkungen:

Gesetzt, es seien B und b die Dimensionen für die Mauerstärke unten und oben, wie solche vermittelst des vorne angegebenen Verfahrens bei der ganzen Mauerhöhe H sich ergeben. Würde man die Mauerstärken B_1 und b_1, B_2 und b_2, B_3 und b_3, u. s. w. für kleinere Mauerhöhen (H_1, H_2, H_3, u. s. w.) unter sonst gleichen Verhältnissen bestimmen, und zugleich annehmen, dass hiebei sowohl der Werth von w, als auch jener des Sicherheitscoefficienten s nicht von der Grösse der Druckhöhe abhängig

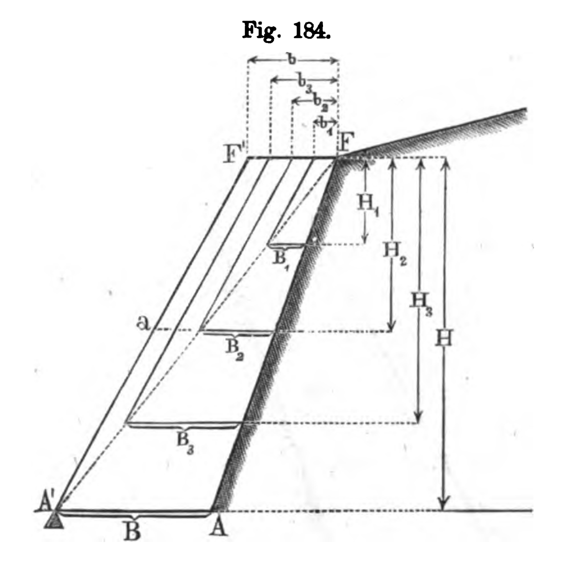
wäre, so erhielte man zu Folge der Gleichung (512) also für $m = 1$, die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B_1}{H_1} = \frac{B_2}{H_2} = \frac{B_3}{H_3} = \ldots = \frac{B}{H} \\ \frac{b_1}{H_1} = \frac{b_2}{h_2} = \frac{b_3}{H_3} = \ldots = \frac{b}{H}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (515),$$

wonach die verschiedenen Mauerprofile unter einander ähnlich erschienen, und daher die äussere Ecke der jedesmaligen Basis in die Diagonale $\overline{A'F}$ zu liegen käme.

Der Umstand, dass in manchen Fällen m von der Einheit etwas abweicht, ist nicht geeignet, die erwähnte Eigenschaft

Fig. 184.



wesentlich zu alteriren, und eine ähnliche Bemerkung kann man in Bezug auf die Grösse w machen, insoferne diese zuweilen mit der Druckhöhe etwas differirt.

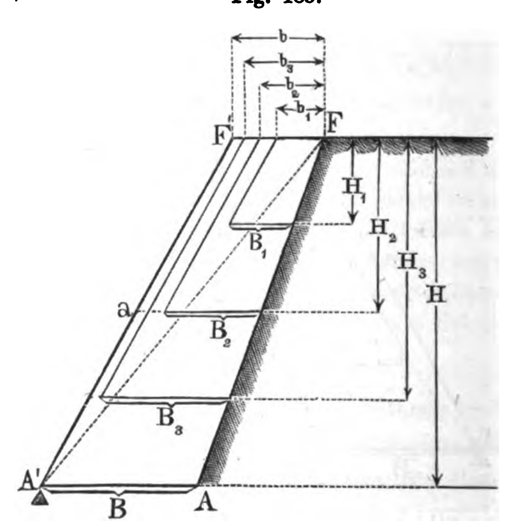
Anders verhält es sich mit dem Werthe des Sicherheits-Coefficienten s, welcher in gewissen Fällen namentlich bei Stützmauern an Strassen- und Eisenbahnen, in einer mehr auffälligen Weise, mit der Druckhöhe variirt. Alsdann werden die erforderlichen Mauerstärken B_1, B_2, B_3, u. s. w., welche sich bei verschiedenen Druckhöhen H_1, H_2, H_3, u. s. w. (Fig. 185) ergeben,

merklich grösser, als bei dem in der Figur 184 betrachteten Falle; indessen reichen dieselben doch niemals bis zu derjenigen äusseren Mauerböschung $\overline{A'F'}$, welche dem Mauerprofile für die grösste Höhe H zugehört. Es bestehen dann folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{B_1}{H_1} > \frac{B_2}{H_2} > \frac{B_3}{H_3} > \ldots > \frac{B}{H} \\ \frac{b_1}{H_1} > \frac{b_2}{H_2} > \frac{b_3}{H_3} > \ldots > \frac{b}{H} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (516).$$

Wenn daher für diese letztere Höhe H die entsprechenden Mauerstärken B und b, einerseits an der Basis und andererseits an der Krone construirt worden sind, so kann die nächste Ge-

Fig. 185.



fahr des Umsturzes an einer oberhalb A' gelegenen Stelle (beispielsweise in a) nicht vorhanden sein, weil dort in dem Profile $AFF'A'$ schon eine grössere Mauerstärke besteht, als für die dazu gehörige Druckhöhe (beispielsweise H_2) eigentlich erforderlich wäre.

Hieraus geht hervor, dass es allerdings richtig ist, die Umsturzkante, wie es in der vorstehenden Theorie geschehen, ganz unten in A' anzunehmen.

Vom praktischen Standpunkte aus muss man zu den vorstehenden Bemerkungen wohl noch einige hinzufügen. Bei verhältnissmässig kleinen Mauerhöhen ist es nämlich oft nöthig, die berechneten Mauerstärken etwas zu vergrössern, damit ein regelrechter Verbànd zwischen den Mauersteinen angeordnet werden kann. Uebrigens liegt es in der Natur der Sache, dass die Qualität des Mauerwerkes nicht an allen Stellen vollkommen dieselbe sein werde, sondern, dass vielmehr in dieser Beziehung manche Verschiedenheiten Platz greifen können. Sind dieselben zu bedeutend, so kann es im Gegensatze zu der oberwähnten Annahme allerdings geschehen, dass die Gefahr eines Umsturzes für eine oberhalb der Mauerbasis gelegene Stelle in den Vordergrund tritt. Allein, derlei Zufälligkeiten in eine förmliche Berechnuug einzubeziehen, ist weder möglich, noch nöthig, zumal jedenfalls dafür Sorge zu tragen ist, dass das Mauerwerk möglichst gleichförmig und mit entsprechendem Steinverbande, überhaupt in kunstgerechter Weise ausgeführt werde, alsdann es wohl keinem Anstande unterliegt, die Umsturzkante zunächst der Mauerbasis anzunehmen.

§. 112.

Bestimmung der Mauerstärken für den Fall, wenn der Einfluss der Reibung zwischen Erde und Stützwand directe in Rechnung kommt, daher bei der Feststellung des Sicherheits-Coefficienten nicht mehr zu berücksichtigen ist. Nimmt man schon bei der Bestimmung des Erddruckes an Futtermauern den Einfluss der Reibung zwischen diesen und dem Erdreiche unmittelbar in Rechnung, wie dies bei den Untersuchungen in den §§. 65 bis 83 geschehen ist, so müssen offenbar behufs der Ermittlung der Mauerstärken verhältnissmässig grössere Sicherheits-Coefficienten, als solche nach den Erörterungen im vorigen §. entfallen, zur Anwendung kommen, um den praktischen Verhältnissen zu genügen, worauf übrigens schon am Schlusse des §. 26 hingedeutet worden ist.

Zur diesfälligen Berechnung dient die im §. 110 entwickelte Formel (506), welche heisst:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{sw}{q}(\mu - \operatorname{tg}\varepsilon)\right] + \\ + \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{sw}{q}(\mu - \operatorname{tg}\varepsilon)\right]^2 + \frac{msw}{3q\cos^2\varepsilon} + \tfrac{1}{3}(n^2 - \operatorname{tg}^2\varepsilon)}$$

Mit Ausnahme des Reibungs-Coefficienten $\mu = \operatorname{tg} \varrho$, welcher hier nicht wie im vorigen §. Null ist, sondern einen davon verschiedenen Werth hat, dann mit Ausnahme der Grössen w und s, welche ebenfalls andere Werthe annehmen, als nach dem Vorgange im vorigen §., kommen in einem gegebenen Falle den übrigen Buchstaben in der betrachteten Formel dieselben Werthe zu, wie, wenn die Auflösung nach der früheren Formel (508) geschehen würde. Eigentlich sollte zu den Ausnahmen mitunter auch der Coefficient $m = \frac{e}{\frac{1}{3} H} = \frac{3e}{H}$ gezählt werden, welcher in Fällen, in denen die von der Mauerkrone beginnende Oberfläche des Erdreiches nicht von einer Ebene begrenzt ist, streng genommen nicht denselben Werth beibehält, wenn man einmal die Reibung an der Stützwand in Rechnung nimmt, und das andere Mal ausser Acht lässt, wie dies z. B. bei der Vergleichung der beiden Tabellen XII und XVIII zu ersehen ist; allein, da der diessfällige Unterschied verhältnissmässig nur gering sein wird, ist es wohl gestattet, von dem Einflusse dieses Unterschiedes ganz abzusehen.

Was insbesondere das Einheitsgewicht w betrifft, welches einer sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit zukommt, die einen mit dem normalen Erddrucke gleichen Druck an die Stützwand ausüben würde, so ist die Grösse desselben nach den Anleitungen in dem dritten Abschnitte des ersten Hauptstückes der Theorie des Erddruckes zu bestimmen. Insbesondere wird es sich hiebei je nach Umständen um die Benützung der Formeln (301), (302), (303), (308) zur XIII. Tabelle gehörig, (311), (317) auf Tabelle XV Bezug nehmend, (325), (328), (333), (341), (344), (346), nach dieser ist die Tabelle XVI berechnet, (352), (354), (367) und (368), wozu die Tabelle XVII gehört, handeln.

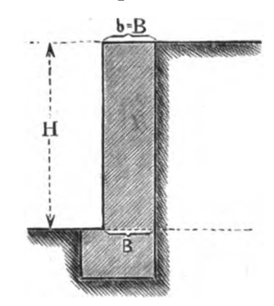
Ex. Es sei die Mauerstärke in dem auf Seite 460 gegebenen Beispiele I zu berechnen, wenn der Coefficient für die Reibung zwischen Erde und Stützwand mit seinem grössten Werthe in Rechnung genommen, also $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha$ gesetzt wird. Gegeben sind somit folgende Grössen: $H = 30'$, $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 2$, $n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$, $g = 80$ Pfd., $q = 120$ Pfd. und $\mu = \frac{5}{6}$; der Sicherheits-Coefficient ferner sei $s = 6$. (Siehe Fig. 186.)

Zunächst hat man w zu bestimmen; der Werth hiefür ergibt sich aus der XIII. Tabelle, beziehungsweise aus der Formel (308), und zwar für $a = 1{\cdot}2$ und $\mu = \frac{1}{a}$, wie folgt:

$$\frac{w}{g} = 0{\cdot}163, \; w = 0{\cdot}163\, g = 13{\cdot}04 \text{ Pfd.}$$

Auch die Tabelle XV, beziehungsweise die Formel (315) kann hiezu benützt werden, wenn man beachtet, dass in dem vorliegenden Falle den dortigen Grössen a und b die Werthe $1{\cdot}2$ und 0 zukommen.

Fig. 186.



Hiernach findet man:

$$\frac{s\,w}{q} = 0{\cdot}652.$$

Zur weiteren Berechnung dient die Formel (506), welche für den gegebenen Fall, wegen $n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$ und $m = 1$, zunächst übergeht in:

$$\frac{B}{H} = -\frac{\mu\, s\, w}{2\, q} + \sqrt{\left(\frac{\mu\, s\, w}{2\, q}\right)^2 + \frac{s\, w}{3\, q}},$$

woraus zu Folge der speciellen Werthe von μ und $\left(\frac{s\,w}{q}\right)$ sich ergibt:

$$\frac{B}{H} = 0{\cdot}269, \; B = b = 8{\cdot}07 \text{ Fuss,}$$

also nahezu dasselbe Resultat, wie auf der Seite 461.

Will man bei gegebener Mauerstärke den bezüglichen Sicherheits-Coefficienten bestimmen, so ist aus der Gleichung (506) die Grösse s zu bestimmen. Geschieht dies, so findet man die allgemeine Formel:

$$s = \frac{q}{w} \cdot \frac{\left(\frac{B}{H}\right)^2 + \left(\frac{B}{H}\right) \operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{3}\left(n^2 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right)}{\frac{1}{3}\, m \left(1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon\right) - \left(\mu - \operatorname{tg} \varepsilon\right) \left(\frac{B}{H}\right)} \ldots\ldots (517),$$

welche mit jener unter (513) analog ist, nur dass dort $\mu = \operatorname{tg} \varrho = 0$ ist, und w einen anderen Werth hat, als hier.

Ex. Wird diese Formel auf das vorige Beispiel angewendet, und derjenige Sicherheits-Coefficient s gesucht, nach welchem die Mauerstärke $B = b$ ebenso gross entfiele, wie es in dem I. Beispiele auf Seite 460 der Fall war, wo die Rechnung nach den Andeutungen im §. 111 durchgeführt wurde, so hat man zu setzen:
$\frac{B}{H} = 0{\cdot}273$, $n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$, $m = 1$, $\mu = \frac{4}{5}$, $g = 80$ Pfd., $q = 120$ Pfd. und, mit Rücksicht auf die Detailrechnung in dem vorhergehenden Beispiele. $w = 13{\cdot}04$ Pfd.

Hiernach findet man:

$$s = \frac{q}{w} \cdot \frac{\left(\frac{B}{H}\right)^2}{\frac{1}{3} - \mu \left(\frac{B}{H}\right)} = 6{\cdot}46.$$

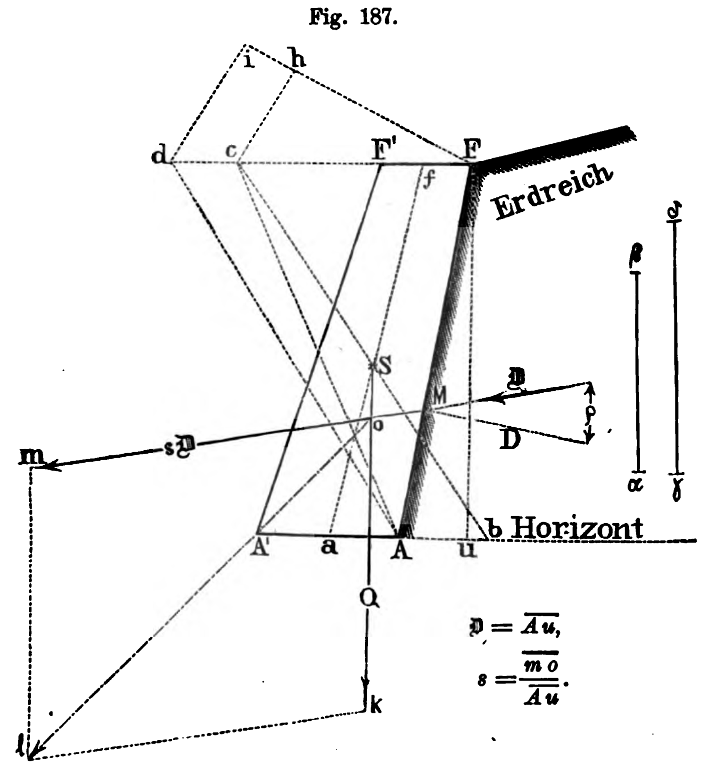
Es ist also, praktisch genommen, gleichbedeutend, ob man in diesem beispielsweisen Falle bei der Mauerstärken-Berechnung unmittelbar den Einfluss der Reibung an der Stützwand berücksichtigt und den Sicherheits-Coefficienten mit $6{\cdot}46$ annimmt, oder aber, ob hiebei jene Reibung ausser Betracht bleibt, dafür aber der Sicherheits-Coefficient nur $= 1{\cdot}55$ gesetzt wird.

Bei der angedeuteten Bestimmung von s kann man auch grafisch zu Werke gehen. Das diessfällige Verfahren ist grundsätzlich dasselbe, welches im vorigen §. vermittelst der Figur 183 erläutert worden ist; nur hat man dabei den jetzt in Betracht kommenden schiefen Erddruck $\mathfrak{P}$, sowohl der Richtung als auch der Grösse nach, entsprechend zu construiren, wobei auf die Erklärungen im §. 68 zur Figur 137 Rücksicht zu nehmen ist.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens dient die Fig. 187. Diese unterscheidet sich von der Figur 183 nur dadurch, dass in dem zu construirenden Kräftenparallelogramm $klmo$ die Richtung des Erddruckes $\mathfrak{P}$, beziehungsweise $s\mathfrak{P}$, von dem Druckmittelpunkte M aus, eine andere ist, nämlich eine solche, welche mit der auf die Stützwand stehenden Normalen den Reibungswinkel ϱ einschliesst, wodurch selbstverständlich auch der Angriffspunkt (o) der Kräfte und die Richtung ($\overline{ol}$) der Mittelkraft sich anders, als in der

Figur 183, herausstellt. Auch die Gerade $\overline{Au}$, deren Grösse den schiefen Erddruck $\mathfrak{P}$ repräsentirt, ist jetzt nicht dieselbe, wie in der Figur 183, sondern wie in der Figur 137 zu construiren, indem man nämlich beachtet, dass dort der schiefe Erddruck

Fig. 187.



durch das Gewicht eines Erdprismas mit dem Profile $Eqr = Amn = AFu$ dargestellt wurde.

Das Mauergewicht Q dagegen bleibt der Grösse und Richtung nach eben so, wie in Figur 183 zu zeichnen, es ist nämlich durch die verticale Gerade $\overline{ok} = \overline{Fd}$ darzustellen.

Indem man schliesslich wieder $\overline{om} = s\,\mathfrak{P}$ durch $\overline{Au} = \mathfrak{P}$ dividirt, also die Relation:

$$s = \frac{\overline{mo}}{\overline{Au}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (518),$$

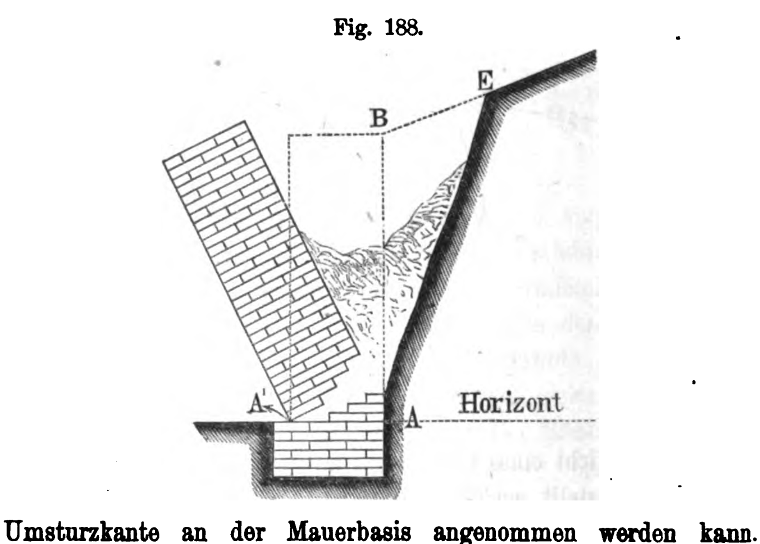
berücksichtigt, ergibt sich der fragliche Sicherheits-Coefficient; beispielsweise in der Figur 187 mit der Zahl 5.

Das am Schlusse des §. 111 Gesagte, wozu die Figuren 184 und 185, so wie die Relationen (515) und (516) gehören, erleidet der Hauptsache nach keine Aenderung durch die in dem gegenwärtigen §. gestellte Bedingung, wonach die Reibung an der Stützwand unmittelbar in Rechnung genommen wird.

§. 113.

Besondere Bemerkungen über die Lage und Form der gefährlichen oder Bruchfuge in einer Futtermauer. Es wurde gezeigt, dass bei trapezförmigen Mauerprofilen, wie solche in der Praxis gewöhnlich vorkommen, die eventuelle

Fig. 188.



Umsturzkante an der Mauerbasis angenommen werden kann. Allein es handelt sich noch darum, zu untersuchen, ob auch die ganze Bruchfuge in die Basis falle, und wenn nicht, welchen Einfluss die bezügliche Abweichung auf die Stabilitäts-Berechnung nehme.

Die Erfahrung lehrt, dass bei dem Umsturze einer Futtermauer auf dem Fundamente, wenn dieses nicht ausweichen kann,

in der Regel ein Absatz von treppenförmiger Gestalt stehen bleibt, wie dies beispielsweise in der Figur 188 angedeutet ist.

Es ist daher zu erwägen, welchen Einfluss diese besondere Gestalt der gefährlichen Fläche in den Futtermauern auf die Standfähigkeit derselben äussert, namentlich, ob mit Bezug darauf die früher gegebenen Formeln zur Berechnung der Mauerstärken noch als ausreichend betrachtet werden können. Im ersten Augenblicke kann man allerdings nicht unterscheiden, ob der erwähnte Umstand günstig oder ungünstig auf die Grösse der nothwendigen Mauerstärken einwirkt, da hiedurch augenscheinlich sowohl das offensive Erddruckmoment, als auch das Widerstandsmoment der Mauer kleiner wird, als unter der bisherigen Annahme, wonach nämlich die Bruch- oder gefährliche Fläche in $\overline{AA'}$ war.

Daraus aber, dass die gedachte Treppenform thatsächlich beim Bruche eintritt, folgt unzweifelhaft, dass zur Hintanhaltung dieses Bruches eine grössere Mauerstärke erforderlich ist, als diejenige, welche mit Rücksicht auf die hypothetische Bruchfläche $\overline{AA'}$ sich ergibt, was insbesondere noch durch die nachfolgende Untersuchung bestätiget wird.

Es wird genügen, zu diesem Behufe den Fall für die einfachste Mauerform zu wählen, nämlich die Mauer vorne und rückwärts mit lothrechter Begrenzung (Fig. 189) anzunehmen, und hiebei als Annäherung zur Wahrheit die Hypothese zuzulassen, dass der beim Umsturze stehen bleibende Theil der Mauer im Profile ein Dreieck ($AA'A''$) bilde, also die Bruchfläche — anstatt treppenförmig — nach der schiefen Richtung $\overline{A'A''}$ entstehe. Es handelt sich nun darum, nicht nur diese Bruchrichtung, sondern auch die Mauerstärke B_1 zu bestimmen, welche nothwendig ist, um den angedeuteten Umsturz zu verhindern, und zwar unter der üblichen Voraussetzung, dass auf die Cohäsion des Mörtels im Mauerwerke keine Rücksicht genommen werde. Auch soll der Einfachheit wegen die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Stützwand nicht besonders in Rechnung kommen.

Setzt man die Theilhöhe $\overline{AA''} = xH$, so bedeutet x einen gewissen Coefficienten, kleiner als die Einheit, welcher, wenn er

bestimmt worden ist, einen Begriff darüber gibt, den wie vielten Theil die Höhe des nicht umstürzenden Mauerstückes von der ganzen Mauerhöhe ausmacht.

Der auf den Umsturz abzielende, normal auf die Wand gerichtete Erddruck wirkt hiernach nur in der Druckhöhe $\overline{A''B} =$

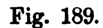
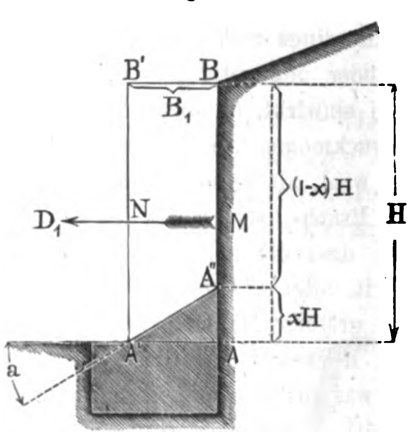


Fig. 189.



$(1 - x)\, H$, und die Grösse desselben (mit D_1 bezeichnet) kann durch die hydrostatische Formel:

$$D_1 = \tfrac{1}{2}\, w \,.\, \overline{A''B}^2 = \tfrac{1}{2}\, w\, (1 - x)^2\, H^2$$

ausgedrückt werden, wenn w das Gewicht der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit bedeutet, welche denselben Druck, wie das Erdreich auszuüben im Stande wäre.

Nimmt man ferner den Druckmittelpunkt M in dem dritten Theile der Druckhöhe an, was entweder genau oder wenigstens sehr nahe richtig sein wird, so hat man:

$$\overline{A''M} = \tfrac{1}{3}\, \overline{A''B} = \tfrac{1}{3}\, (1 - x)\, H,$$

und der Hebelsarm für die Druckkraft wird hiernach:

$$\overline{A'N} = \overline{AA''} + \overline{A''M} = \tfrac{1}{3}\, (1 + 2x)\, H,$$

so dass das Umsturz- oder Erddruckmoment in folgender Weise sich beziffert:

$$D_1 \,.\, \overline{A'N} = \tfrac{1}{6}\, w\, (1 + 2x)\, (1 - x)^2\, H^3 \ldots\ldots (519).$$

Um das widerstehende Moment des Mauergewichtes zu finden, beachte man, dass dasselbe gleich ist dem Momente der ganzen Mauer $AA'B'B$ weniger dem Momente des stehenden bleibenden Mauerstückes $AA'A''$. Hiernach hat man unter Beibehaltung der Bezeichnung q für das Einheitsgewicht des Mauerwerkes:

$$\text{Mauermoment} = q\left[\tfrac{1}{2} B_1 \,.\, B_1 H - \tfrac{2}{3} B_1 \,.\, \tfrac{1}{2} B_1 \,.\, x H\right]$$
$$= \tfrac{1}{6}(3 - 2x)\, q\, B_1^2 H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (520).$$

Setzt man nunmehr mit Rücksicht auf die verlangte $s$fache Sicherheit das eben gefundene Mauermoment gleich dem $s$fachen Momente des Erddruckes, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{6}(3 - 2x)\, q\, B_1^2 H = \tfrac{1}{6}\, s\, w\, (1 + 2x)(1 - x)^2 H^3,$$

woraus folgt:

$$\frac{B}{H} = \sqrt{\frac{(1 + 2x)(1 - x)^2}{(3 - 2x)} \frac{s\,w}{q}} \ldots\ldots\ldots (521).$$

Hiernach wäre B_1 mit x variabel, so dass die nothwendige Mauerstärke verschieden ausfallen würde, je nachdem die Richtung der gefährlichen oder Bruchfläche im Mauerwerke angenommen wird.

Nimmt man z. B. die Bruchfläche horizontal, also $x = 0$ und setzt man den diessfälligen speciellen Werth von $B_1 = B$, so findet man:

$$\frac{B}{H} = \sqrt{\frac{s\,w}{3q}},$$

welcher für die hier geschehene Voraussetzung, wonach $m = 1$ angenommen ward, mit dem Resultate (509) übereinstimmt, was auch zu erwarten war, weil dort in der That eine horizontale Bruchfläche in Aussicht genommen worden ist.

Als Verhältniss zwischen B_1 und B ergibt sich nun:

$$\frac{B_1}{B} = \sqrt{\frac{3(1 + 2x)(1 - x)^2}{(3 - 2x)}} = \sqrt{3 f(x)} \ldots\ldots (522),$$

wobei die bezügliche Function von x durch die Relation ausgedrückt ist:

$$f(x) = \frac{(1 + 2x)(1 - x)^2}{(3 - 2x)} = \frac{(1 - 3x^2 + 2x^3)}{(3 - 2x)}$$
$$= \frac{1 - x^2(3 - 2x)}{(3 - 2x)} = \frac{1}{(3 - 2x)} - x^2.$$

Es kommt hier zu bemerken, dass zwar für den Fall, wenn die Erdoberfläche von einer Ebene begrenzt ist, w nicht von x abhängt, dass aber sonst eine solche Abhängigkeit zwischen w und x stattfindet, somit im Allgemeinen der Werth von w in den Ausdrücken für B_1 und B nicht ein und derselbe ist. Nachdem indessen w nur sehr allmählich mit x sich verändert, und die verschiedenen Werthe von x, um die es sich hier handelt, nur innerhalb enger Grenzen eingeschlossen sind, so wird es keinen nennenswerthen Irrthum veranlassen, wenn man für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung w auch in solchen Fällen, wenn die Erdoberfläche hinter der Mauerkrone nicht von einer Ebene begrenzt ist, ungeachtet der variablen Druckhöhe als constant gelten lässt, wie dies bei der Aufstellung der Gleichung (522) bereits geschehen ist.

Unter den verschiedenen Werthen für die Mauerstärke, die sich aus der letztgenannten Gleichung ergeben, je nachdem x gewählt wird, wird nun offenbar der ungünstigste, also der grösste zu beachten, mithin zu untersuchen sein, für welches x die Breite B_1, beziehungsweise $f(x)$, ein Maximum wird.

Heisst man den x_1 diessfälligen Werth von x, so hat man zur Ausmittlung desselben $\frac{d f(x)}{d x} = 0$ für $x = x_1$ zu setzen.

Es ist aber:

$$\frac{d f(x)}{d x} = 2 \left[\frac{1}{(3 - 2x)^2} - x\right]$$

$$= \frac{2}{(3 - 2x)^2} (1 - x)(1 - 8x + 4x^2),$$

daher, weil $x = x_1$ sein soll:

$$(1 - x_1)(1 - 8x_1 + 4x_1^2) = 0,$$

Hieraus ergeben sich folgende drei Wurzeln:

$$x_1 = \begin{cases} 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1 \cdot 866 \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0 \cdot 134. \end{cases}$$

Zur Entscheidung, welche von diesen Wurzeln zu nehmen ist, dient der Werth des zweiten Differential-Quotienten von $f(x)$ nach x, und zwar ebenfalls für $x = x_1$ verstanden.

Dieser ist, wegen $(3 - 2x_1)^2 = \frac{1}{x_1}$:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 6\left(\frac{2x_1 - 1}{3 - 2x_1}\right),$$ wonach man für

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{Bmatrix} \dots \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \begin{Bmatrix} 6 > 0 \\ 6\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) < 0 \\ 6\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) < 0 \end{Bmatrix}$$

findet, welche Resultate anzeigen, dass $f(x)$ in zwei Fällen ein Maximum wird, nämlich sowohl für $x = x_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, als auch für $x = x_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aus der Natur der Sache ergibt sich aber, dass nur der letzte Werth $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ brauchbar ist, weil offenbar x nicht grösser als die Einheit werden soll.

Hiernach erhält man für den massgebenden Werth von x_1:

$$x_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0 \cdot 134,$$

also wird:

$$\overline{AA''} = x_1 H = (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\,H = 0 \cdot 134\,H \dots \quad (523).$$

Geht man hiemit in die allgemeine Gleichung (522) ein, so erhält man den Maximalwerth von B_1, wie folgt:

$$\frac{\max B_1}{B} = \tfrac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = 1 \cdot 022,$$

oder

$$\max B_1 = 1 \cdot 022\,B = 1 \cdot 022 \sqrt{\frac{s w}{3 q}} \dots \quad (524);$$

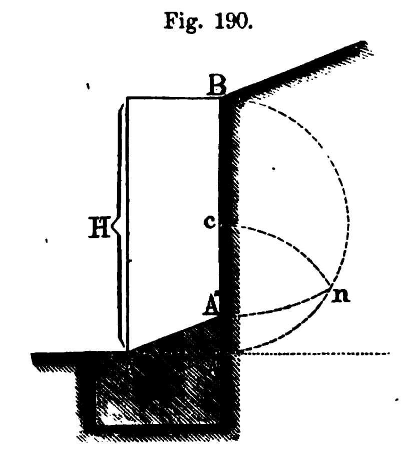
d. h. mit Worten: Im ungünstigsten Falle muss die Mauerstärke um 2·2% grösser sein, als man dieselbe bei der Annahme einer horizontalen Bruchfläche findet. Diese Differenz ist aber sehr geringfügig, und kann um so mehr vernachlässiget werden, als eine Genauigkeit bis auf ein Paar Percente bei derartigen Berechnungen schon aus anderen nahe liegenden Gründen überhaupt nicht zu erwarten steht.

Diese Bemerkungen gelten der Hauptsache nach auch in denjenigen Fällen, wo das Mauerprofil nicht ein Rechteck, sondern ein Trapez ist, und es nimmt hierauf selbst der Umstand, dass in den obigen Untersuchungen die Reibung zwischen Erde

und Stützwand nicht besonders in Rechnung kam, keinen wesentlichen Einfluss; weshalb es einem Anstande nicht unterliegt, auszusprechen, dass vorkommenden Falls die Mauerstärken so berechnet werden können, wie es in den vorausgegangenen §§. geschehen ist, nämlich unter der Annahme, dass die gefährliche Fläche horizontal sei.

Die laut der Formel (523) gefundene Theilhöhe $\overline{AA''}$ lässt sich leicht construiren. Zu diesem Ende beschreibe man (Fig. 190) über die Höhe $\overline{AB} = H$ als Durchmesser einen Halbkreis, schneide

Fig. 190.



darauf von A aus mit dem Radius $\overline{Ac}$ als Sehne den 60gradigen Bogen $\widehat{An}$ ab, und beschreibe von B aus mit der Sehne des 120gradigen Bogens $\widehat{Bn}$ den Kreisbogen $\widehat{nA''}$, bis nämlich die Wand in A'' getroffen wird.

Alsdann ist, wie es sein soll:

$$\overline{AA''} = x_1 H = (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\, H,$$

wenn man beachtet, dass das Stück $\overline{BA''}$ der Seite des regelmässigen Dreieckes im Kreise von dem Diameter H gleich ist.

Annäherungsweise ist übrigens $\overline{AA''} = \frac{1}{2}(\frac{1}{7} + \frac{1}{8})\, H$, somit das arithmetische Mittel zwischen dem 7. und 8. Theile der Druckhöhe, weshalb auch nach dieser Regel die Construction jener Theilhöhe vorgenommen werden kann.

Merkwürdiger Weise hängt die Höhe des nicht umstürzenden Mauertheiles, wenigstens in dem untersuchten Falle, blos von der Höhe der ganzen Mauer ab; die Neigung der Bruch- oder gefährlichen Fläche aber, wofür der Richtungswinkel in der Fig. 189 mit a bezeichnet erscheint, variirt jedenfalls mit der betreffenden Mauerstärke, folglich auch mit denjenigen Elementen, von welchen dieselbe abhängt.

Denn es ist:

$$\operatorname{tg} \measuredangle A A' A'' = \operatorname{tg} a = \frac{\overline{A A''}}{\overline{A A'}} = \frac{x_1 H}{B_1} = \frac{x_1}{\left(\frac{B_1}{H}\right)},$$

folglich mit Benützung der Resultate (523) und (524) auch:

$$\operatorname{tg} a = \frac{0 \cdot 227}{\sqrt{\frac{s w}{q}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (525).$$

Um einen Begriff zu bekommen, wie gross der Neigungswinkel a werden kann, führe man dessen Berechnung für $\frac{s w}{q} = 0 \cdot 1$ und $\frac{s w}{q} = 1 \cdot 0$ durch, innerhalb welcher Grenzen die praktisch vorkommenden Fälle in der Regel liegen. Dadurch erhält man einerseits $a = 35^0 41'$ und andererseits $a = 12^0 47'$.

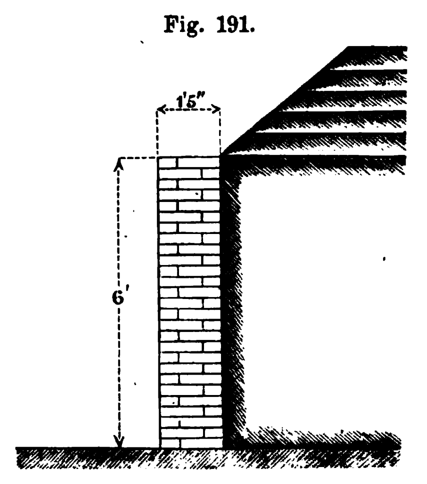
Je ungünstiger überhaupt die auf den Umsturz bezüglichen Verhältnisse sind, je grösser also der Erddruck und je leichter das Mauerwerk ist, desto kleiner wird der fragliche Winkel und eben so umgekehrt; ein Resultat, was in der That dem praktischen Gefühle entspricht.

Es erübriget noch zu bemerken, dass die Steinschaaren, welche nach dem Umsturz der Mauern ganz oder theilweise stehen bleiben, durch die Wirkung desselben etwas horizontal verschoben werden, wie dies aus dem Versuche erhellet, welchen Martony am 18. Mai 1827 angestellt hat. (Siehe Figur 191.)

Hiebei war die Mauer vertical aus Ziegeln ohne Mörtel aufgeführt, hatte eine Höhe von 6', nämlich 27 Ziegelschaaren über einander, und eine Dicke von 1' 5" (1½ Ziegel stark); das dahinter befindliche Materiale war locker aufgeschüttete Damm-

erde, welche zunächst in gleicher Höhe mit der Mauerkrone abgeglichen wurde. Hierauf fand allmälig eine schichtenweise Ueber-

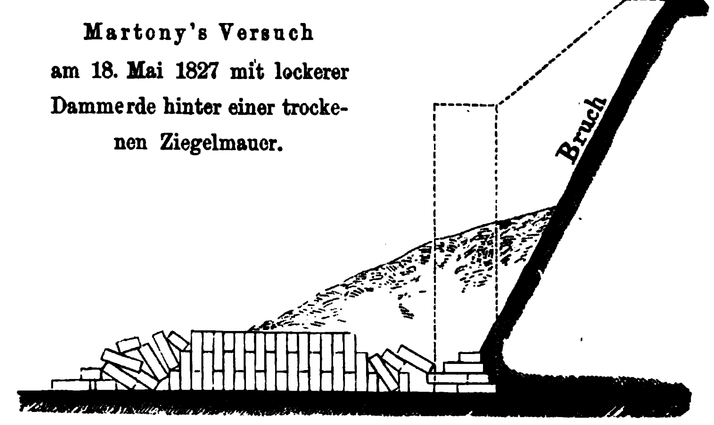
Fig. 191.



höhung der Anschüttung statt, bis der Umsturz der Mauer erfolgte.

Die Art und Weise dieses Umsturzes ist in der Fig. 192 angedeutet, woraus man ersieht, dass die ganz oder theilweise

Fig. 192.



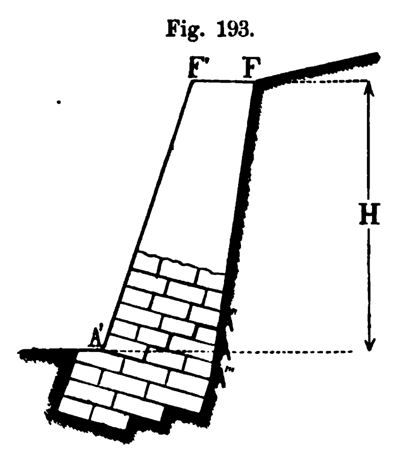
stehen gebliebenen Ziegelschaaren horizontal etwas verschoben wurden. Die Drehungskante für den Umsturz lag zwar hier nicht

in der Basis, sondern zwei Ziegelschaaren höher; allein dieser Umstand beirret das hierüber Gesagte nicht wesentlich, und findet seine Erklärung wohl darin, dass bei solchen Versuchen manches auch vom Zufalle abhängt, dessen Wirkungen ausserhalb des Kreises einer jeden Berechnung liegen.

Die Höhe des stehen gebliebenen Mauertheiles betrug die vierfache Ziegeldicke, was mit dem Resultate der vorstehenden theoretischen Untersuchung ganz gut übereinstimmt. Denn nach der Formel (523) ergibt sich die fragliche Theilhöhe (wegen $H = 6' = 72''$) mit $x_1 H = 9 \cdot 6''$, und da die durchschnittliche Dicke eines Ziegels mit $\left(\frac{72''}{27}\right) = 2\frac{2}{3}''$ in Rechnung zu nehmen ist, so findet man, dass in jener auf $9 \cdot 6''$ berechneten Theilhöhe $\left(\frac{9 \cdot 6}{2\frac{2}{3}}\right) = 3 \cdot 6$ Ziegeldicken enthalten sind, wonach, weil jedenfalls die nächst gelegene ganze Zahl zu berücksichtigen ist, die Anzahl der Ziegelschaaren, deren Absturz nicht oder wenigstens nicht vollständig zu erwarten war, mit vier sich ergibt — also gerade so, wie dies thatsächlich stattgefunden hat.

Wie man im nächsten Capitel sehen wird, kommt es bei geböschten Futtermauern mitunter vor, dass die Lagerfugen des Mauerwerkes nicht horizontal, sondern schief, und zwar normal auf die äussere Mauerböschung $\overline{A'F'}$ (Fig. 193) angeordnet werden, um namentlich das Gleiten der Steinschaaren übereinander zu verhindern. Dieser Umstand nimmt indessen auf die Bestimmung der Mauerstärken auf Grundlage des Umsturzmomentes keinen oder wenigstens keinen nennenswerthen Einfluss, weil die Bruch- oder gefährliche Fläche

Fig. 193.



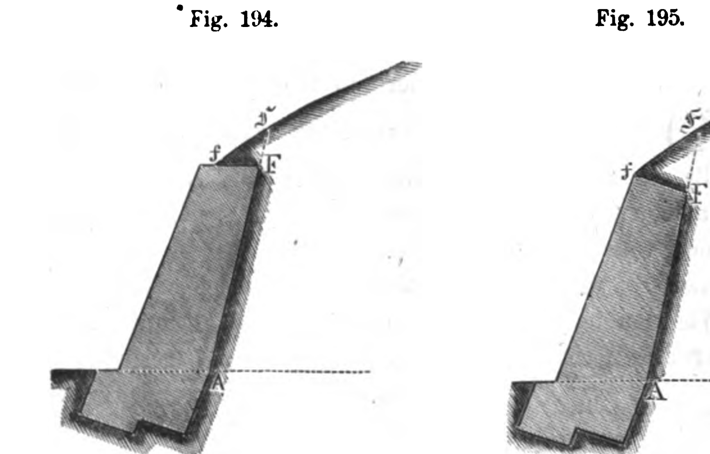
nicht mit der Lagerfuge $\overline{A'A'''}$ zusammenfällt, sondern in Uebereinstimmung mit den Erörterungen des laufenden §. treppen-

förmig nach aufwärts ($A'A''$) entsteht, und dieserwegen der Hauptsache nach das Ergebniss der vorstehenden Untersuchung ebenfalls noch als giltig betrachtet werden kann, welches nämlich darin besteht, dass es bei der Berechnung jener Mauerstärken zulässig ist, die Bruchfläche horizontal anzunehmen.

§. 114.

Fälle, in denen das Erdreich ganz oder theilweise die Mauerkrone bedeckt. (Fig. 194.) Es genügt, hier

Fig. 194. Fig. 195.



so zu verfahren, dass man die Druckhöhe für die Wirkung des Erddruckes bis zu dem Punkte $\mathfrak{F}$ annimmt, welcher gefunden wird, wenn man die rückwärtige Wandseite $\overline{AF}$ bis zur Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales verlängert; das Mauerwerk dagegen kommt nach seinem wirklichen Profile in Rechnung. Das Gewicht des kleinen Erdprismas mit dem Profile $Ff\mathfrak{F}$ oberhalb der Mauerkrone kann man ausser Acht lassen. Zuweilen wird die Mauerkrone $\overline{Ff}$ nicht horizontal, sondern (wie in Fig. 195) schief, nämlich normal auf die äussere Mauerböschung angelegt; auch in einem solchen Falle kann man das Vorbemerkte gelten lassen.

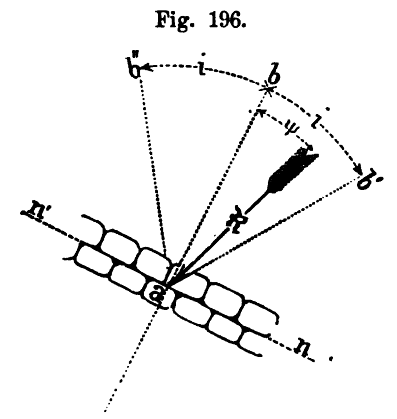
Zweites Capitel.

Stabilität der Futtermauern gegen Gleiten.

§. 115.

Allgemeine Bedingung, das Gleiten von übereinander liegenden Mauerwerks-Steinschaaren zu verhindern. In dieser Beziehung ist auf zweierlei Acht zu geben; einerseits auf die Richtung der resultirenden Druckkraft gegen die Lagerfugen des Mauerwerkes, und andererseits auf die Grösse des Coefficienten für die gleitende Reibung zwischen den Mauersteinen. Eigentlich setzt sich dem Gleiten der übereinanderliegenden Steine noch die Cohäsion des Mörtels entgegen, wovon jedoch hier ebenso, wie in dem vorigen Capitel abgesehen werden soll. Ist (Fig. 196) $\mathfrak{R}$ die resultirende Druckkraft auf die Lagerfuge $\overline{nn'}$ des Mauerwerkes, $\overline{ab}$ das auf diese Fuge gestellte Loth, und bezeichnet $i = \measuredangle\, b a b' = \measuredangle\, b a b''$ den Reibungswinkel für die gleitende Reibung in jener Lagerfuge, so herrscht nach einem bekannten Satze der Mechanik in allen Fällen noch das Gleichgewicht, in denen die Druckkraft nicht ausserhalb des sogenannten Reibungskegels, welcher durch die um die Achse $\overline{ab}$ vorgenommene Rotation der Winkelschenkel $\overline{ab'}$ und $\overline{ab''}$ entsteht, gelegen ist. Hiernach darf der Winkel ψ, den die Druckkraft mit dem Lothe auf die Lagerfuge des Mauerwerkes einschliesst, nicht grösser, als der Reibungswinkel i werden.

Fig. 196.



Damit also von den beiden Steinschaaren, die sich in der Lagerfuge $\overline{nn'}$ berühren, nicht eine über die andere hinweggleitet, muss die Relation vorhanden sein:

$$\psi \overline{\gtrless} i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (526),$$

wobei selbstverständlich blos der numerische Werth von ψ in Betracht kommt, da es im Uebrigen gleichgiltig ist, nach welcher Seite hin die Druckkraft von dem Lothe $\overline{ab}$ abweicht.

Für $\psi = i$ besteht der Grenzzustand des Gleichgewichtes, welcher zugleich als Beginn der Gleitungsbewegung anzusehen ist.

Wäre $i = 0$, daher keine Reibung zwischen den Steinen vorhanden, so müsste dann auch $\psi = 0$ werden, d. h. die Druckkraft lothrecht auf die Lagerfuge gerichtet sein.

Die Erfüllung dieser Bedingung erscheint aber durchaus nicht nothwendig, weil der Reibungswinkel i jedenfalls einen von Null verschiedenen Werth hat, der, wie die Erfahrung zeigt, gar nicht unbedeutend ist.

Für die gleitende Reibung von Stein auf Stein unter den in der Praxis vorkommenden Verhältnissen kann man nämlich in Bezug auf den dazu gehörigen Reibungs-Coefficienten (dieser heisse k) annehmen, dass der Werth hiefür von $\frac{1}{2}$ bis 1 variirt, so dass man $k = \frac{3}{4}$ als eine Durchschnittszahl gelten lassen kann. Indem nun bekanntermassen

$$k = \operatorname{tg} i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (527)$$

ist, so ergeben sich für den Reibungswinkel i beispielsweise folgende Werthe:

Für $k = \frac{1}{2} \ldots\ldots i \doteq 26^0\,34'$,

„ $k = \frac{3}{4} \ldots\ldots i = 36^0\,53'$,

„ $k = 1 \ldots\ldots i = 45^0\,0'$,

so dass unter den vorbezeichneten Grenzen die Werthe von i zwischen $26\frac{1}{2}$ und 45 Graden hineinfallen, und der Scheitelwinkel des erwähnten Reibungskegels von 53 bis 90 Graden variirt, daher jedenfalls eine ganz ansehnliche Grösse annimmt.

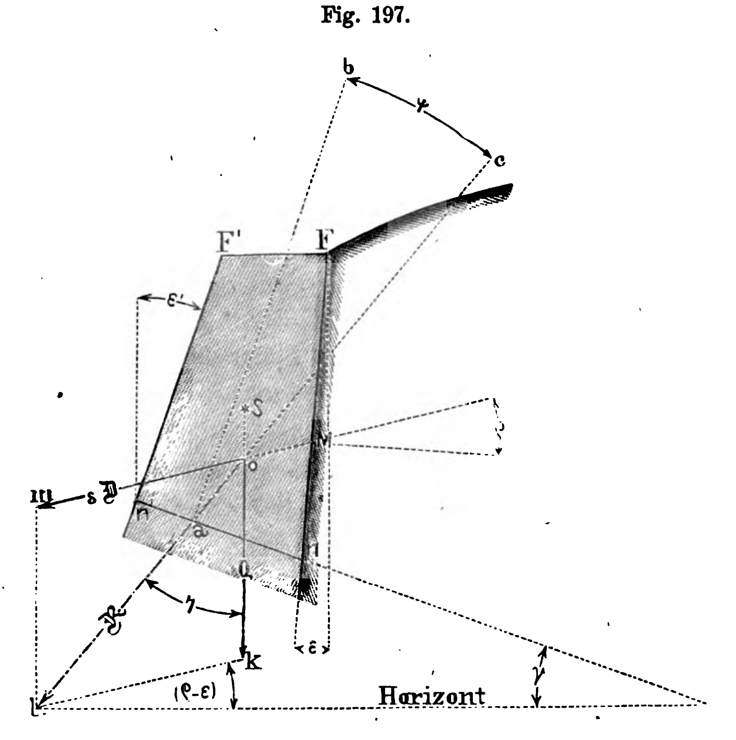
§. 116.

Anwendung der im vorigen §. angedeuteten Regel auf Futtermauern. Betrachtet man (Fig. 197) irgend eine Lagerfuge der Futtermauer, etwa jene in $\overline{nn'}$, so sind die Kräfte,

welche den Druck in dieser Fuge erzeugen, einerseits der schiefe Erddruck 𝔇 auf den Mauertheil $\overline{Fn}$ und andererseits das Gewicht Q dieses Letzteren. Für eine $s$fache Sicherheit ist jener Erddruck $s$mal zu nehmen, so dass die beiden in Betracht kommenden Kräfte s𝔇 und Q sind, welche sich zu einer Resultirenden, diese heisse ℜ, zusammensetzen.

Der Erddruck 𝔇 äussert sich in dem Druckmittelpunkte M und seine Richtung ist durch die Gerade $\overline{Mm}$ bestimmt, welche

Fig. 197.



von der Normalen auf die gedrückte Mauerwand den Reibungswinkel ϱ einschliesst, der nämlich auf die Reibung zwischen Erdreich und Stützwand sich bezieht. Das Mauergewicht dagegen wirkt im Schwerpunkte S des betreffenden Mauerkörpers nach senkrechter Richtung, so dass der Durchschnittspunkt beider Kräfte nach o zu liegen kommt. Construirt man nun von diesem

Punkte aus die beiden Kräfte, macht man nämlich $\overline{om} = s\mathfrak{P}$ und $\overline{ok} = Q$, so ergibt sich aus dem Kräftenparallelogramme $klmo$ die vorerwähnte resultirende Druckkraft $\mathfrak{R} = \overline{lo}$. Deren Richtung ist durch die Linie $\overline{lac}$ bestimmt, und wenn man jetzt die Normale $\overline{ab}$ auf die Lagerfuge nn' zieht $(\overline{ab} \perp \overline{nn'})$, so wird die durch den Winkel ψ bezeichnete Abweichung der Richtung jener Resultirenden von dieser Normalen ersichtlich.

Für die Grösse dieses Winkels besteht, wie man leicht findet, die Relation:

$$\psi = (\eta - \nu) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (528)$$

wobei ν den Neigungswinkel der Mauerwerksfuge $\overline{nn'}$ gegen den Horizont, und η denjenigen Winkel bedeutet, den die Resultirende $\mathfrak{R}$ mit der Schwerkraft Q einschliesst. Ersterer hängt davon ab, in welcher Weise die Mauerwerksfugen ausgeführt werden, und Letzterer ist aus dem Kräftenparallelogramme abzuleiten, es ist nämlich:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{s\mathfrak{P} \cos(\varrho - \varepsilon)}{Q + s\mathfrak{P} \sin(\varrho - \varepsilon)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (529),$$

wenn die Abweichung der gedrückten Stützwand von der verticalen Richtung wieder, wie früher, mit dem Winkel ε bezeichnet wird.

Aus der Gleichung (528) folgt:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \eta - \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} \nu},$$

und wenn man hierin die Relation (529) berücksichtiget, weiter:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{s\mathfrak{P} \cos(\nu + \varrho - \varepsilon) - Q \sin \nu}{s\mathfrak{P} \sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q \cos \nu} \quad\ldots\ldots\ldots (530),$$

wonach in Verbindung mit den Relationen (526) und (527) die Bedingung zum Vorschein kommt:

$$k \geqq \frac{s\mathfrak{P} \cos(\nu + \varrho - \varepsilon) - Q \sin \nu}{s\mathfrak{P} \sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q \sin \nu} \quad\ldots\ldots\ldots (531).$$

Diese Formel vereinfachet sich in besonderen Fällen. Es wird nämlich für eine horizontale Mauerfuge $\nu = 0$, für eine verticale Hinterwand der Mauer $\varepsilon = 0$, und, wenn das Hinterfüllungsmaterial Wasser ist, oder überhaupt die Reibung an der Stützwand nicht besonders in Rechnung kommt, $\varrho = 0$.

Steht die Mauerfuge $\overline{nn'}$ normal auf der vorderen Mauerböschung, und weicht diese um den Winkel ε' von der verticalen Richtung ab, so hat man $\nu = \varepsilon'$ zu setzen.

In der Regel sind die Lagerfugen des Mauerwerkes unter sich parallel, sodann ergibt sich schon nach einiger Ueberlegung, dass, wenn man in der Betrachtung der einzelnen Lagerfugen von der Mauerkrone gegen das Fundament zu fortschreitet, die Werthe für das Mauergewicht Q verhältnissmässig weniger zunehmen, als jene für den Erddruck $\mathfrak{D}$.

Aus diesem Grunde wird der Werth auf der rechten Seite der Relation (531) im Allgemeinen desto mehr wachsen, je tiefer die in Betracht stehende Mauerwerksfuge liegt, woraus folgt, dass die grösste Gefahr des Ausgleitens in der untersten Steinschaar, welche unmittelbar auf dem Fundamente liegt, also in derselben Gegend zu suchen ist, wo auch die Umsturzgefahr vorherrscht. Im Nachfolgenden wird daher die Untersuchung sogleich auf diese unterste Steinschaar bezogen werden.

Um übrigens die Formel (531) anzuwenden, kann man auf zweierlei Art verfahren.

Entweder: Man berechnet zuerst die nöthige Mauerstärke nach der Anleitung im vorigen Capitel, nämlich in Bezug auf das Umsturzmoment, bestimmt hiernach das davon abhängige Mauergewicht Q, und setzt dieses Resultat, so wie die sonstigen Einfluss nehmenden Daten in Formel (531); ergibt sich hiebei, dass die in dieser Formel angedeutete Relation für k wirklich statt hat, so ist die aus der Beachtung des Umsturzmomentes abgeleitete Mauerstärke auch zur Verhinderung des Gleitens genügend. Wenn jedoch bei einer solchen Berechnung die Relation für k nicht zum Vorschein kommt, so muss die erwähnte Mauerstärke vergrössert werden.

Oder: Man berechne unmittelbar aus der Grenz-Relation für k:

$$k = \frac{s\,\mathfrak{D}\cos(\nu + \varrho - \varepsilon) - Q\sin\nu}{s\,\mathfrak{D}\sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q\cos\nu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (532)$$

die ihr entsprechende Mauerstärke, nämlich dadurch, dass man Q allgemein als Function dieser Mauerstärke ausdrückt,

und sodann diese letztere bestimmt. Das Resultat wird anzeigen, wie stark die Mauer anzulegen wäre, um das Gleiten der auf einander ruhenden Steinschaaren zu verhindern.

Man vergleiche nun diese Mauerstärke mit derjenigen, welche mit Rücksicht auf die Verhinderung des Umsturzes der Mauer sich berechnet, und wähle von beiden Resultaten für die Ausführung die grössere Stärke.

Die Mauerwerksfugen werden entweder horizontal, oder, namentlich bei geböschten Mauern, normal auf die äussere Mauerböschung angelegt. Dass die letztgenannte Richtung mehr, als die horizontale, geeignet ist, das Gleiten zu verhindern, ist schon nach einiger Ueberlegung einleuchtend.

Um sogleich zu untersuchen, ob die aus der Betrachtung des Umsturzmomentes sich ergebende Mauerstärke bei der horizontalen Anordnung der Mauerwerksfugen auch zur Verhinderung des Gleitens genüge, oder welche grössere Mauerstärke hiezu vorhanden sein müsse, setze man für horizontale Lagerfugen in der Gleichung (532) zunächst $\nu = 0$, ferner anstatt Q und $\mathfrak{D}$ die betreffenden Werthe, nämlich:

$$Q = \tfrac{1}{2} q (B + b) H = \tfrac{1}{2} q [2B - (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H] H$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{w} \frac{H^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} w \frac{H^2}{\cos \varepsilon \cos \varrho},$$

worin $\mathfrak{w}$ und w die Einheitsgewichte der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeiten sind, welche an die Wand die gleichen Drücke $\mathfrak{D}$ und beziehungsweise D hervorbringen würden.

Hiernach, und weil $\operatorname{tg} \varrho = \mu$ ist, erhält man:

$$k = \frac{\left(\frac{s w}{q}\right) \frac{\cos (\varrho - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos \varrho}}{\left(\frac{s w}{q}\right) \frac{\sin (\varrho - \varepsilon)}{\cos \varepsilon \cos \varrho} + 2 \left(\frac{B}{H}\right) - (n - \operatorname{tg} \varepsilon)}$$

$$= \frac{\frac{s w}{q} (1 + \mu \operatorname{tg} \varepsilon)}{\left(\frac{s w}{q}\right) (\mu - \operatorname{tg} \varepsilon) + 2 \left(\frac{B}{H}\right) - (n - \operatorname{tg} \varepsilon)} \quad \ldots (533),$$

woraus für die zur Verhinderung des Gleitens nothwendige Minimal-Mauerstärke (B) folgt:

$$\frac{B}{H} = -\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{s\,w}{q}(\mu - \operatorname{tg}\varepsilon)\right] + \frac{s\,w}{q}\left(\frac{1+\mu\operatorname{tg}\varepsilon}{2\,k}\right) + \tfrac{1}{2}\,n \quad (534).$$

Ist die Mauer vorne und rückwärts vertical, also $n = \operatorname{tg}\varepsilon = 0$, so hat man insbesondere:

$$\frac{B}{H} = \frac{s\,w}{2q}\left(\frac{1}{k} - \mu\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (535).$$

Ist die Mauer blos rückwärts vertical, vorne aber geböscht, so findet man:

$$\frac{B}{H} = \frac{s\,w}{2q}\left(\frac{1}{k} - \mu\right) + \tfrac{1}{2}\,n \ldots\ldots\ldots\ldots (536).$$

Ist die Mauer endlich mit parallelen Böschungen versehen, somit $n = \operatorname{tg}\varepsilon$, so ergibt sich:

$$\frac{B}{H} = \frac{s\,w}{2q}\left[\operatorname{tg}\varepsilon - \mu + \frac{1}{k}(1 + \mu\operatorname{tg}\varepsilon)\right] \ldots\ldots (537).$$

Nimmt man bei solchen Rechnungen auf die Reibung zwischen Erdreich und Stützwand nicht unmittelbar, sondern erst bei der Feststellung des Sicherheits-Coefficienten s Rücksicht, so ist $\mu = 0$ zu setzen, hiernach w zu bestimmen, s aber nach den Andeutungen im §. 111 zu wählen. Im Gegenfalle ist anstatt $\mu = \operatorname{tg}\varrho$ die entsprechende Grösse einzuführen, dieser der Werth von w anzupassen, und für s, der Bemerkung im §. 112 gemäss, ein entsprechend grösserer Coefficient wie früher zu wählen.

Ex. Wie gross ist die geringste Mauerstärke zur Verhinderung des Gleitens in dem mit I bezeichneten Falle (Seite 460), wenn $k = \frac{3}{4}$, alles Uebrige aber, wie dort, angenommen wird.

Wegen $\mu = 0$ und $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot226$ erhält man aus der hieher passenden Gleichung (535):

$$\frac{B}{H} = 0\cdot151,\ B = 0\cdot151\,H = 4\cdot53 \text{ Fuss.}$$

Macht man die Auflösung in der Weise, dass man μ nicht gleich Null setzt, sondern etwa, wie in demselben Beispiele auf Seite 477, $\mu = \frac{1}{2}$, dagegen $s = 6$ und $\frac{s\,w}{q} = 0\cdot652$ substituirt, so findet man auf Grundlage der bezogenen Gleichung (535):

$$\frac{B}{H} = 0\cdot163,\ B = 0\cdot163\,H = 4\cdot89 \text{ Fuss.}$$

Jedenfalls ist die so erhaltene Mauerstärke weit kleiner, als diejenige, die zur Verhinderung des Umsturzes sich als nothwendig herausstellt, weshalb die Gefahr eines etwaigen Gleitens ganz in den Hintergrund tritt, weil eben die erwähnte grössere Mauerstärke auszuführen sein wird.

So wie in dem gegebenen Beispiele, wird man in der Regel finden, dass selbst bei horizontaler Fugenrichtung die Gleitungsgefahr mehr in den Hintergrund tritt, insolange es sich um Mauern handelt, die vertical stehen oder wenigstens nicht sehr liegend sind.

Nur unter extremen Verhältnissen kommt das Gegentheil zum Vorschein, wenn nämlich das specifische Gewicht des Mauerwerkes im Vergleiche zu jenem des Hinterfüllungsmateriales aussergewöhnlich leicht, oder die natürliche Böschung dieses letzteren sehr flach sein sollte.

Insbesondere bei Mauern, welche dem Wasserdrucke zu widerstehen haben, kann der Fall, dass die Gleitungsgefahr in den Vordergrund tritt, leicht vorkommen. Für solche Mauern, welche gewöhnlich rückwärts vertical sind, hat man nämlich bei der Benützung der Formeln (506) und (534) zu setzen: $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, $m = 1$ und $w = g = 56 \cdot 4$ Pfd., wonach die zur Beseitigung der Umsturzgefahr nöthige Mauerstärke (B') sich ergibt mit:

$$\frac{B'}{H} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{s\,g}{q} + n^2\right)} \quad \ldots\ldots (538),$$

die zur Beseitigung der Gleitungsgefahr erforderliche Mauerstärke (B'') aber mit:

$$\frac{B''}{H} = \frac{1}{2k}\left(\frac{s\,g}{q}\right) + \tfrac{1}{2}\,n \quad \ldots\ldots (539).$$

Hiebei wird $B' \gtreqless B''$, wenn folgende Relationen vorhanden sind:

$$\frac{s\,g}{q} \lesseqgtr \tfrac{1}{3}\,k\left[2\sqrt{3n^2 - 3nk + k^2} - (3n - 2k)\right] \quad (540),$$

worunter selbst unter gewöhnlichen Verhältnissen öfter die letzte Relation statt hat, d. h. der Fall zum Vorschein kommt, dass zur Verhinderung des Gleitens eine grössere Mauerstärke sich

ergibt, als jene ist, welche zur Verhinderung des Umsturzes genügen würde.

Wenn man übrigens beachtet, dass bei den Berechnungen auf die Cohäsion des Mörtels keine Rücksicht genommen wurde und dass man in vielen Fällen im Stande sein wird, durch Anbringung von Steindöbeln der Gleitungsgefahr wirksam zu begegnen, so wird in der Praxis die Nothwendigkeit, grössere Mauerstärken, als die durch die Betrachtung der Umsturzwirkung ermittelten, auszuführen, selbst bei der horizontalen Fugenrichtung nur selten sich ergeben.

Ein sehr wirksames Mittel, der Gleitungsgefahr entgegen zu treten, ist überdies die Schiefstellung der Mauerwerksfugen.

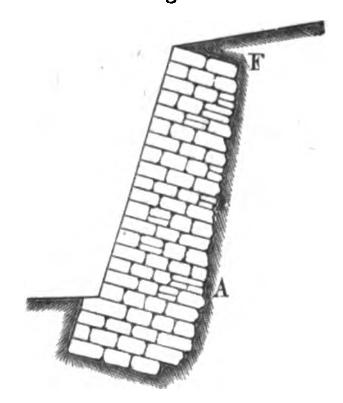
In Fällen, wenn die äussere Mauerböschung ziemlich bedeutend ist, wie dies insbesondere bei liegenden Mauern vorkommen kann, ist es nämlich üblich und zweckmässig, die Lagerfugen des Mauerwerkes nicht horizontal, sondern schief, und zwar, weil dann für die Ausführung am bequemsten, normal auf die äussere Mauerböschung anzuordnen, indem sonst die Gleitungsgefahr zu sehr in den Vordergrund treten, und die aus diesem Grunde nöthigen Mauerstärken verhältnissmässig zu gross ausfallen könnten, als dass die Ausführung solcher für eine ökonomische Bauführung zu empfehlen wären. In den praktisch üblichen Fällen genügt eine solche Schiefstellung zur Verhinderung des Gleitens vollkommen, wie man sich nöthigenfalls auch durch Rechnung überzeugen kann, wenn man die Formel (532) in geeigneter Weise anwendet.

Es ist übrigens keineswegs nothwendig, bei der Ausführung solcher Mauern, ja von Futtermauern überhaupt, die an ihrer Rückseite zu situirenden Steine so passend zu behauen, dass die innere Mauerböschung eben werde; im Gegentheile ist es vom Vortheile, wenn die dortige Begrenzungsfläche ($\overline{AF}$, wie in der Figur 198 angedeutet) einigermassen unregelmässig und hiedurch die Rauhigkeit derselben gesteigert wird. Denn dadurch kann die Reibung zwischen dem Erdreiche und der Mauer vermehrt, und in Folge dessen der active Erddruck auf dieselbe vermindert

werden, was für die Stabilitätsverhältnisse jedenfalls günstig ist, wenn man nur im Sonstigen für eine regelrechte Aufmauerung Sorge trägt, nämlich hiebei mit lagerhaften Steinen arbeitet, Laufer und Binder gehörig abwechseln lässt, überall „Voll auf Fug“ construirt, u. s. w.

Wenn auf die bemerkte Weise der Coefficient jener Reibung grösser ausfiele, als der für die Reibung zwischen den Erdtheilchen, so wird in den meisten Fällen auch von diesem Reibungsüberschusse ein nicht zu unterschätzender Nutzen für die Mauer-Stabilität erwartet werden können, insoferne man es in der Praxis gewöhnlich mit cohärirendem Hinterfüllungsmateriale zu thun hat, bei welchem man laut der Relation (9) nicht mehr, wie bei cohäsionslosem Materiale, an die Beschränkung, dass der in die Betrachtung eintretende Coefficient der Reibung an der Stützwand jenen für die Reibung zwischen den Erdtheilchen nicht überschreiten dürfe, gebunden ist, und zwar um so weniger, als es nach den Bemerkungen im §. 37 nöthig ist, bei der Aufschichtung des Hinterfüllungsmateriales für dessen thunlichste Verdichtung, wodurch zugleich die Cohäsion desselben wächst, Sorge zu tragen.

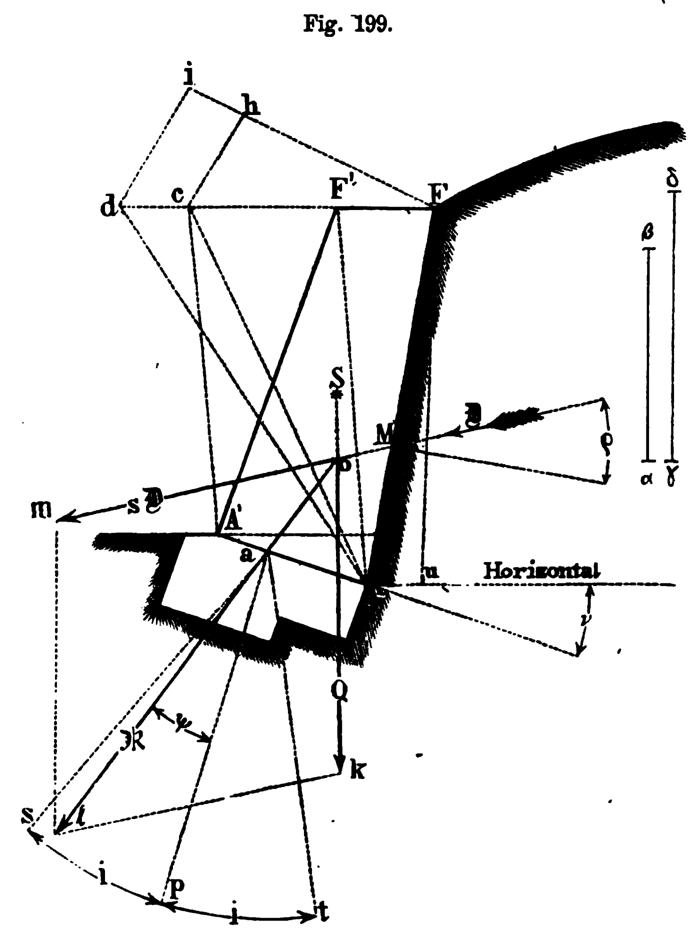
Fig. 198.



Zu weit darf man indessen einzelne Mauersteine nicht in das dahinter gelegene Erdreich hineingreifen lassen, weil sonst der eine oder der andere von solchen Steinen abgebrochen oder aus seiner Lage gerückt, überdies das Erdreich bei allfälliger Setzung wegen der ungleichen Widerstände, die an den verschiedenen Mauerschaaren dem Nachsinken der Erdschichten sich entgegen stellen würden, mehr als sonst rissig, und dadurch zum Nachtheile des Ganzen das Wassereinsickern befördert werden könnte.

Abgesehen von jeder Rechnung kann man auch auf rein grafischem Wege die Ueberzeugung sich verschaffen, ob in einem gegebenen Falle ein ausreichender Gleitungswiderstand vorhanden ist. Man construire nämlich eben so, wie in den Figuren 183 und 187 angedeutet, das Kräftenparallelogramm aus dem Mauergewichte und dem sfachen Erddrucke, und untersuche sodann,

Fig. 199.



unter welchem Winkel die Resultirende dieser Kräfte die Mauerwerksfuge trifft. Liegt die Resultirende nicht ausserhalb des so-

genannten Reibungskegels, so ist hinlängliche Sicherheit gegen die Gleitungsgefahr vorhanden, im Gegentheile nicht.

Vermittelst der Figur 199 ist das Gesagte erläutert, und insbesondere hiebei der allgemeinere Fall einer schiefen Fugenrichtung berücksichtiget.

$\overline{A'A''}$ ist nämlich die in Betracht kommende am tiefsten gelegene Lagerfuge des Mauerwerkes oberhalb dem Fundamente. Das Gewicht des Erdprismas $A''Fu$ repräsentirt die Intension des auf die Stützwand $\overline{A''F}$ wirkenden schiefen Erddruckes $\mathfrak{P}$, dessen Angriffspunkt in M sein soll, so dass $\overline{A''M} = \frac{1}{3}\,m\,.\,\overline{A''F}$, und hierin je nach Umständen der Coefficient $m \gtreqless 1$ ist. Das Gewicht Q des Mauerwerks ist gleich jenem eines Steinprismas mit dem Profile $A''cF$, oder gleich dem eines Erdprismas mit dem Profile $A''dF$, wobei das erstgenannte Profil $A''cF$ mit dem Mauerprofil $A'A''FF'$ einerlei Grösse hat ($\overline{A'c} \parallel \overline{A''F'}$), und die Grundlinie $\overline{Fc}$ desselben nach dem Verhältnisse $\frac{q}{g} = \frac{\overline{\gamma\,\delta}}{\overline{\alpha\,\beta}}$ zu vergrössern ist, um die Grundlinie $\overline{Fd}$ des zweiterwähnten Profiles $A''dF$ zu erhalten. Ist ferner in S der Schwerpunkt des Mauerprofiles*) und $\overline{Sk}$ die lothrechte Richtung des Mauergewichtes Q, so findet man das obbesprochene Kräftenparallelogramm $klmo$, wenn man $\overline{ok} = \overline{Fd}$ als Repräsentanten des Mauergewichtes Q und $\overline{om} = s\,.\,\overline{A''u} = s\,.\,\mathfrak{P}$ als Repräsentanten des $s$fachen schiefen Erddruckes aufträgt. Die Diagonale $\overline{ol} = \mathfrak{R}$ gibt die Resultirende, welche die Mauerwerksfuge in a, und zwar unter dem Winkel ψ gegen das Loth $\overline{ap}$ auf diese Fuge trifft.

Trägt man endlich den Reibungswinkel i von dem letztgenannten Lothe $\overline{ap}$ nach beiden Seiten auf, nämlich $\measuredangle\,pas = \measuredangle\,pat = i$, so deutet sat den bezüglichen Reibungskegel an, und man kann jetzt entnehmen, welche Lage jene Resultirende gegen diesen Reibungskegel einnimmt.

---

*) Hiebei kann man ebenso vorgehen, wie in der Fig. 123 bei der Aufsuchung des Schwerpunktes von dem Vierecke $ABDE$, worauf die dortige Anmerkung (pag. 278, 279) Bezug nimmt.

Fällt $\mathfrak{R}$ noch innerhalb desselben, wie in der Figur, oder geradezu in die Conusseite, ist alsd $\psi \leqq i$, so ist selbst bei einem $s$fachen Erddruck noch keine Gleitungsgefahr, eventuell geradezu der Grenzzustand des Gleichgewichtes vorhanden; während für $\psi > i$ die gewünschte Sicherheit gegen eine solche Gleitungsgefahr nicht mehr bestehen würde.

Die Principien für diese grafische Darstellung sind augenscheinlich dieselben, welche schon früher bei der grafischen Untersuchung der Stabilitätssicherheit gegen Umsturz (Fig. 187) angewendet wurden, nur besteht zwischen beiden Methoden im Allgemeinen, wenn nämlich die Mauerwerksfugen schief sind, insoferne ein Unterschied, als die Lagerfuge $\overline{A'A''}$ wohl als gefährliche oder Bruchfläche für das Gleiten, nicht aber auch als solche für den Umsturz anzusehen ist. In letzterer Beziehung ist vielmehr die gefährliche oder Bruchrichtung, wenigstens nahezu, unabhängig von der Fugenrichtung, denn es ist laut der Erklärung zur Figur 193 erlaubt, erstere nach $\overline{AA'}$, nämlich horizontal anzunehmen. In dieser Verschiedenheit der Umstände, welche bei den verglichenen zwei grafischen Methoden in Betracht kommt, liegt die Ursache, warum man bei der Untersuchung des Gleitungswiderstandes die Grösse des Erddruckes auf die Wand $\overline{FA''}$ und jene des Mauergewichtes $A'A''FF'$ zu berücksichtigen hat, während es sich bei der Untersuchung des Widerstandes gegen Umsturz darum handelt, das Resultat für den Erddruck auf die kleinere Wandfläche $\overline{FA}$ und jenes für das geringere Mauergewicht $A'AFF'$ einzuführen. Nur für den Fall horizontaler Lagerfugen verschwindet der angedeutete Unterschied.

Es ist übrigens einleuchtend, dass bei der Auflösung der Aufgabe in Fig. 199 sowohl die Lage des Schwerpunktes S vom Mauerprofile, als auch jene des Erddruckmittelpunktes M ganz ohne Einfluss auf das Schlussergebniss, nämlich auf die Grösse des Winkels ψ, ist, daher es zu dem besprochenen Zwecke nicht geradezu nöthig erscheint, die fraglichen zwei Punkte genau aufzusuchen, sondern es auch genügt, die Orte hiefür allenfalls blos beiläufig anzunehmen.

Drittes Capitel.

Stabilität der Futtermauern in Bezug auf die Festigkeit der Mauersteine.

§. 117.

Allgemeine Stabilitätsbedingungen in der angedeuteten Hinsicht. Nach §. 108 soll auch die Gefahr eines Einsturzes von Futtermauern, aus Anlass eines etwaigen Zerquetschens der Mauersteine durch übergrossen Druck, in's Auge gefasst werden. In dieser Beziehung kommt ein neues Element, nämlich die Zerdrückungs-Festigkeit des Bausteines und derjenige Sicherheits-Coefficient in Betracht, welcher anzeigt, der wie vielte Theil jener Festigkeit durch die vereinte Wirkung des Erddruckes und des Mauergewichtes höchstens beansprucht werden darf. Per Quadrateinheit der Lagerfläche des Steines soll die Zerdrückungs-Festigkeit desselben mit $\mathfrak{Z}$, seine zulässig grösste Beanspruchung aber mit $\mathfrak{z}$, und der damit im Zusammenhange stehende Sicherheits-Coefficient mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet werden, wonach man hat:

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (541).$$

Der Sicherheits-Coefficient wird gewöhnlich zwischen 10 und 20 angenommen. Die Zerdrückungs-Festigkeit der Bausteine ist sehr verschieden. In Wiener Centnern und per Wiener □ Zoll verstanden variirt $\mathfrak{Z}$ für gebrannte Ziegel von 5 bis 40, für natürliche Bausteine (weicher Gattung) von 10 bis 20, (härterer Gattung) von 20 bis 50, (sehr harter Gattung) von 50 bis 100 und darüber; für Granit insbesondere von 80 bis 130*).

Verbreitet sich der Druck zwischen zwei aufeinander liegenden Steinen gleichmässig über die Lagerfläche, so geht die

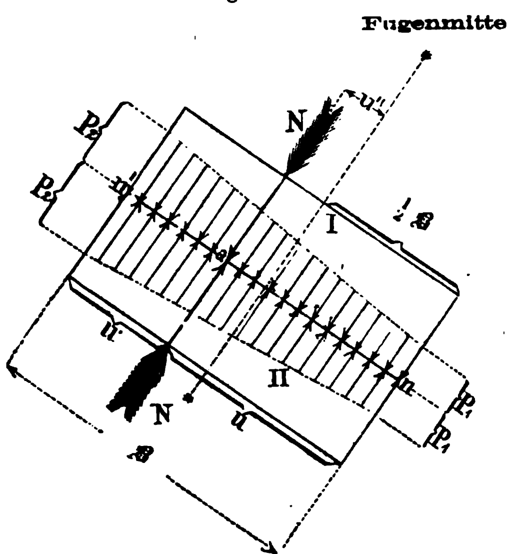
*) Siehe die Beschreibung der vom Verfasser durchgeführten Festigkeits-Versuche mit Ziegeln und natürlichen Bausteinen. Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines ex 1865 und 1866.

Druckresultirende bekanntlich durch den Schwerpunkt dieser Lagerfläche, also bei einer rechteckigen Gestalt derselben durch ihren Mittelpunkt. Hat daher die Druckresultirende eine andere Lage, so kann offenbar von dem Vorhandensein einer solchen gleichförmigen Druckvertheilung keine Rede mehr sein.

Um über die, in einem derartigen Falle wirklich stattfindende Druckvertheilung in's Klare zu kommen, dienen die nachfolgenden Betrachtungen.

Gesetzt, es liegen zwei Steine I und II (Fig. 200), deren Länge (normal auf die Zeichnung gedacht) gleich der Einheit ist,

Fig. 200.



so aufeinander, dass sie sich in der rechteckigen Lagerfläche $\overline{nn'}$ von der Breite $\mathfrak{B}$ und der Länge 1 innig berühren.

Die Resultirende der in dieser Lagerfuge auftretenden Normalpressungen sei N und ihr Angriffspunkt in a, welcher einerseits von dem Fugenende n um die Grösse u entfernt sein, und andererseits die Lagerfläche in ihrer halben Länge treffen soll. Ist a, wie im Allgemeinen vorausgesetzt, nicht in der halben

Fugenbreite gelegen, so kann dies nur von einer nach dieser Fugenbreite vorhandenen ungleichförmigen Vertheilung der Pressungen herrühren, deren Aufsuchung nicht nur bei den Futtermauern insbesondere, sondern bei Steinconstructionen überhaupt wichtig ist.

Insolange die Steine als unpressbar vorausgesetzt werden, bleibt die Aufgabe eine unbestimmte, weil man sich dann offenbar unendlich viele von einander verschiedene Druckvertheilungsgesetze denken kann, von welchen jedes einzelne die Eigenschaft hat, dass hiernach die Druckresultirende ihrer Grösse nach gleich N wird, und die Lagerfläche normal in a trifft. Um dieser Unbestimmtheit zu entgehen, ist es nöthig, auf die Pressbarkeit der Steine Rücksicht zu nehmen, nämlich zu erwägen, welche Formveränderungen in den an einander gepressten Steinen entstehen*).

Zunächst ist die Annahme zulässig, dass ungeachtet solcher Formveränderungen die Lagerfläche selbst eine Ebene bleibt, somit die beiden Steine sich so zusammenpressen, wie dies in der Figur 201 ersichtlich ist.

Die punktirten Körpertheile ober- und unterhalb der Lagerfuge $\overline{nn'}$ deuten die Zusammendrückungen dieser Steine an, welche in der Wirklichkeit **sehr klein** sein werden, in der Figur aber der Deutlichkeit halber weit grösser gezeichnet wurden.

Hiernach ist $\overline{nn}$ die Grösse der Zusammendrückung eines jeden Steines an dem Einen Fugenende in n, $\overline{n'n'}$ jene an dem anderen Fugenende in n', und $\overline{cc}$ jene an einer beliebigen Zwischenstelle in c. Heisst man die auf die Quadrateinheit bezogenen Pressungen, welche an den gedachten drei Stellen, nämlich in n, n_1 und c, stattfinden, aufeinanderfolgend p_1, p_2 und p, so kann

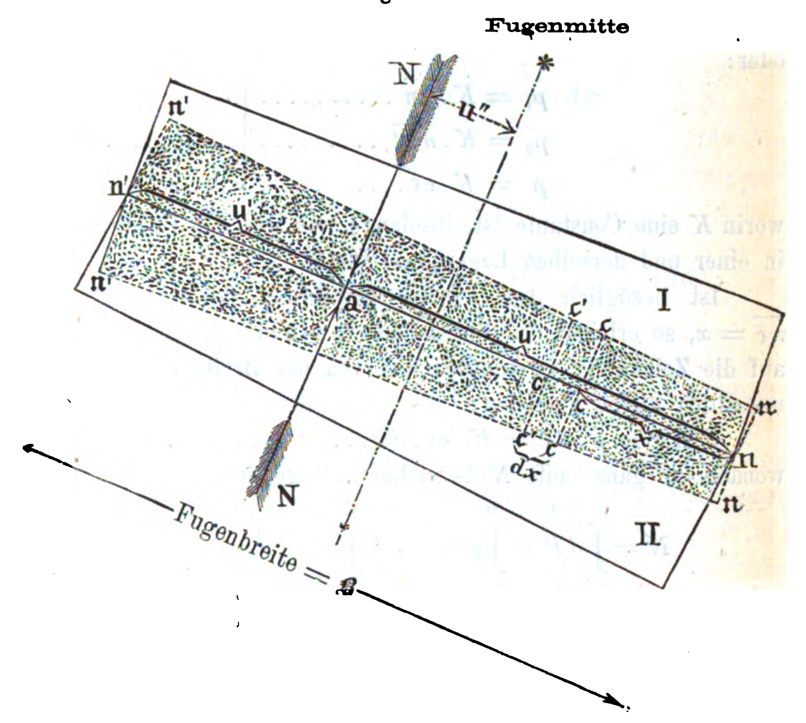
*) Analoge Fälle kommen bekanntlich auch bei den Holz- und Eisenconstructionen vor. Wenn z. B. ein über mehrere Stützen continuirlich laufender Träger belastet wird, so lassen sich die Reactionen der Stützpunkte und überhaupt die ganzen Festigkeitsverhältnisse nur dadurch bestimmen, dass man hiebei auch auf die Formveränderung in Folge der Belastung des Trägers Rücksicht nimmt.

man in Anbetracht der Kleinheit der stattfindenden Zusammendrückungen setzen:

$$p_1 : p_2 : p = \overline{n\mathfrak{n}} : \overline{n'\mathfrak{n}'} : \overline{c\mathfrak{c}} \text{ . . . . } (542),$$

weil das überhaupt für feste, mehr oder weniger elastische Körper giltige Annäherungs-Gesetz, wonach die Grösse einer ganz kleinen

Fig. 201.



Formveränderung zu der Grösse der Erzeugungskraft im geraden und einfachen Verhältnisse steht, auch im vorliegenden Fall angewendet werden kann.

Wenn man daher die an den einzelnen Fugenstellen auftretenden Pressungen (per □ Einheit) normal auf die Fugenrichtung vermittelst Ordinaten grafisch darstellt, so werden diese letzteren, indem man von dem einen Fugenende zu dem anderen allmälig fortschreitet, ihre Begrenzung durch eine gerade Linie

erhalten, wie dies bereits in der früheren Figur 200 angedeutet wurde. Hieraus folgt, dass an dem Einen Fugenende die kleinste, und an dem anderen die grösste Pressung stattfinden muss, während den an allen sonstigen Stellen der Fugenbreite entstehenden Pressungen Zwischenwerthe zukommen.

Den obigen Bemerkungen zu Folge hat man noch:

$$\frac{p_1}{n\mathfrak{n}} = \frac{p_2}{n'\mathfrak{n}'} = \frac{p}{c\mathfrak{c}} = K,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = K.\overline{n\mathfrak{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_2 = K.\overline{n'\mathfrak{n}'} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p \;= K.\overline{c\mathfrak{c}} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (543),$$

worin K eine Constante ist, insolange man bei der Untersuchung in einer und derselben Lagerfläche bleibt.

Ist bezüglich der beliebig gewählten Stelle die Distanz $\overline{nc} = x$, so erleidet das Fugenelement von der Länge 1 (normal auf die Zeichnung verstanden) und von der Breite $\overline{cc'} = dx$ die unendlich kleine Pressung:

$$dP = p\,.\,dx = K\,.\,\overline{c\mathfrak{c}}\,.\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (544),$$

wonach die ganze mit N bezeichnete Fugenpressung gleich ist:

$$N = \int_{x=0}^{x=\mathfrak{B}} dP = \int_0^{\mathfrak{B}} p\,dx = K\int_0^{\mathfrak{B}} \overline{c\mathfrak{c}}\,.\,dx$$

$$= K\,.\,\text{area } nn'\mathfrak{n}\mathfrak{n}' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (545).$$

Die Grösse der gesammten Normalpressung ist sonach mit der Grösse der ganzen Zusammendrückung eines Steines, d. i. mit der punktirten Fläche des Trapezes $nn'\mathfrak{n}\mathfrak{n}'$ proportional.

Nun ist aber, wegen $\overline{nn'} = \mathfrak{B}$, auch:

$$\text{area } nn'\mathfrak{n}\mathfrak{n}' = \tfrac{1}{2}\,(\overline{n\mathfrak{n}} + \overline{n'\mathfrak{n}'})\,\mathfrak{B},$$

oder, indem man die Relationen (543) beachtet:

$$\text{area } nn'\mathfrak{n}\mathfrak{n}' = \frac{1}{2K}\,(p_1 + p_2)\,\mathfrak{B},$$

somit nach Formel (545):

$$N = \tfrac{1}{2}\,(p_1 + p_2)\,\mathfrak{B} \ldots\ldots\ldots\ldots (546).$$

Nennt man p_0 das arithmetische Mittel zwischen p_1 und p_2, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N = p_0\, \mathfrak{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (547).$$

Für die Lage des Druckmittelpunktes a hat man, indem man auf die statischen Druckmomente in Bezug auf irgend eine Drehungsachse, etwa jene in n, übergeht, wegen $\overline{an} = u$, offenbar:

$$N \,.\, u = \int_0^{\mathfrak{s}} x\, dP = K \int_0^{\mathfrak{s}} x \,.\, \overline{c\mathfrak{c}} \,.\, dx$$

$$= K \int_0^{\mathfrak{s}} x \,.\, \text{area}\; c c' \mathfrak{c} \mathfrak{c}',$$

und, wenn anstatt N der Werth aus (545) gesetzt wird:

$$u = \frac{\int_0^{\mathfrak{s}} x \,.\, \text{area}\; c c' \mathfrak{c} \mathfrak{c}'}{\text{area}\; n n' \mathfrak{n} \mathfrak{n}'} \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots (548);$$

d. h. die resultirende Normalkraft N geht durch den Schwerpunkt des schon oben erwähnten Trapezes $nn'\mathfrak{n}\mathfrak{n}'$.

In Folge dieser Eigenschaft ist:

$$u = \tfrac{1}{3}\, \mathfrak{s} \left(\frac{p_1 + 2\,p_2}{p_1 + p_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (549).$$

Aus der Verbindung der Formeln (547) und (549) ergibt sich sofort:

$$p_0 = \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) = \frac{N}{\mathfrak{s}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (550),$$

$$p_1 = 2\left(2 - 3\,\frac{u}{\mathfrak{s}}\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (551),$$

$$p_2 = 2\left(3\,\frac{u}{\mathfrak{s}} - 1\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (552).$$

Führt man den Abstand u' der Druckresultirenden von dem anderen Fugenende n' ein, ist nämlich $u' = \mathfrak{S} - u$, so erhält man:

$$p_1 = 2\left(3\,\frac{u'}{\mathfrak{B}} - 1\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (553),$$

$$p_2 = 2\left(2 - 3\,\frac{u'}{\mathfrak{B}}\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (554),$$

Berücksichtiget man endlich den Abstand u'' der Normalpressung N aus der halben Fugenbreite, setzt man nämlich $u = \frac{1}{2}\mathfrak{B} + u''$ oder $u' = \frac{1}{2}\mathfrak{B} - u''$, wobei u'' positiv oder negativ sein kann, so hat man auch:

$$p_1 = \left(1 - 6\,\frac{u''}{\mathfrak{B}}\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (555),$$

$$p_2 = \left(1 + 6\,\frac{u''}{\mathfrak{B}}\right) p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (556).$$

Hieraus ergeben sich folgende Gesetze:

1. Befindet sich die Druckresultirende in der halben Fugenbreite, so hat man, wegen $u = u' = \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ oder $u'' = 0$, insbesondere:

$$p_1 = p_2 = p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (557),$$

es findet also eine gleichmässige Druckvertheilung über die ganze Fuge statt:

2. Ist $u > \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ und $< \frac{2}{3}\mathfrak{B}$, oder, was auf das Gleiche hinauskommt, $u' < \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ und $> \frac{1}{3}\mathfrak{B}$, mithin $u'' > 0$ und $< \frac{1}{6}\mathfrak{B}$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 < p_0 \text{ und } > 0 \ldots\ldots\ldots \\ p_2 > p_0 \text{ und } < 2\,p_0 \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (558).$$

3. Ist $u < \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ und $> \frac{1}{3}\mathfrak{B}$, oder $u' > \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ und $< \frac{2}{3}\mathfrak{B}$, daher u'' negativ und numerisch kleiner als $\frac{1}{6}\mathfrak{B}$, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 > p_0 \text{ und } < 2\,p_0 \ldots\ldots \\ p_2 < p_0 \text{ und } > 0 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (559),$$

somit das Umgekehrte, wie unter Punkt 2.

4. Für $u = \frac{2}{3}\mathfrak{B}$, also $u' = \frac{1}{3}\mathfrak{B}$ oder $u'' = \frac{1}{6}\mathfrak{B}$ ist:

$$p_1 = 0,\ p_2 = 2\,p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (560).$$

5. Das Gegentheil findet für $u = \frac{1}{3}\mathfrak{B}$, $u' = \frac{2}{3}\mathfrak{B}$ oder $u = - \frac{1}{6}\mathfrak{B}$ statt, denn dann ist:

$$p_1 = 2\,p_0,\ p_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (561).$$

6. Grösser als $\frac{2}{3}\mathfrak{B}$ oder kleiner als $\frac{1}{3}\mathfrak{B}$ dürfen u und u' in den Gleichungen (550) bis (554) nicht werden, d. h. die Druck-

resultirende darf sich nicht mehr, als um den sechsten Theil der Fugenbreite aus deren Mitte entfernen, oder mit anderen Worten, dieselbe darf aus dem mittleren Drittel der Fugenbreite nicht heraustreten, falls die aufgestellten Berechnungsformeln noch Anwendung finden sollen, weil sonst einer der beiden Druckwerthe p_1 und p_2 negativ ausfiele, also auf einen Zug hinweisen würde, der das Oeffnen der Fuge an der betreffenden Seite anstrebt, für welchen Fall aber die vorigen Gleichungen nicht mehr giltig sind.

Abgesehen von diesem Falle, der noch zu erörtern ist, lassen sich die bemerkten Gesetze in folgender Weise mit Worten ausdrücken:

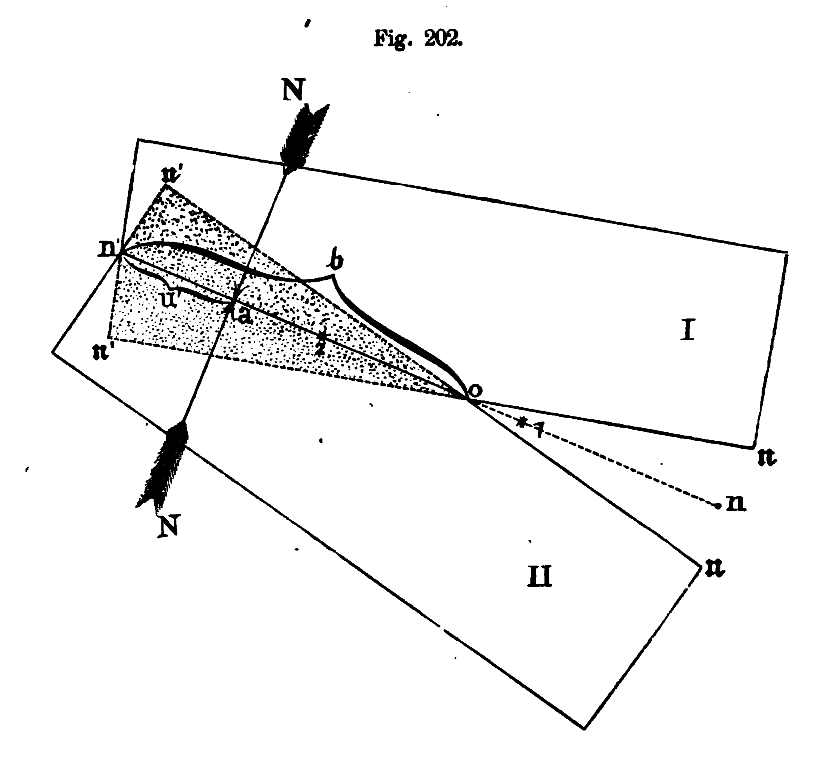
Von den beiden Fugenenden erleidet das der resultirenden Druckkraft näher gelegene eine grössere, und das andere eine kleinere Prossung, als bei einer gleichförmigen Druckvertheilung über die ganze Fuge. Die Differenz jener beiden Pressungen wird desto grösser, je mehr die Druckresultirende der halben Fugenbreite entrückt ist: das arithmetische Mittel hieraus aber ist jedenfalls eben so gross, wie die Pressung per □ Einheit der Fugenfläche bei gleichförmig gedachter Druckvertheilung.

Liegt der Druckmittelpunkt an einem der beiden Enden des mittleren Drittels der Fugenbreite, so ist die Beanspruchung des Steinmateriales ungleichförmiger und somit auch ungünstiger, als bei irgend einer Zwischenstellung der Druckresultirenden; denn dann wird das näher gelegene Fugenende einer doppelt so grossen Pressung, als bei gleichförmig gedachter Druckvertheilung, ausgesetzt, während das andere Fugenende gar keine Pressung empfängt.

Es erübriget jetzt noch den Fall zu untersuchen, wenn der Angriffspunkt der resultirenden Druckkraft N ausserhalb des mittleren Drittels der Fugenbreite, etwa in a (Fig. 202), gelegen ist. An dem davon entfernteren Fugenende in n entsteht dann ein Oeffnen der Fuge, indem die Steine sich so in einanderdrücken, wie dies in der erwähnten Figur angedeutet ist.

Es stellt nämlich $\overline{nn'} = \mathfrak{b}$ die ganze Breite der Fuge vor, in welcher die beiden Steine I und II ursprünglich aufeinander lagen. Die Strecke $\overline{1, 2}$ bildet darin das mittlere Fugendrittel, ausserhalb welchem der resultirende Normaldruck seinen An-

Fig. 202.



griffspunkt a hat. In Folge dieses Druckes berühren sich jetzt die Steine nur mehr in dem Fugentheil $\overline{on'}$ von der Breite $\mathfrak{b}$, während in dem anderen Theil zwischen o und n die Fuge etwas klafft. Die punktirten Körpertheile $on'n'$ ober- und unterhalb der Fuge zeigen hiebei wieder (in vergrössertem Massstabe) die beiderseitigen Zusammendrückungen an.

Die per □ Einheit entfallende Pressung der Steine ist offenbar in o, wo keine Zusammendrückung vorhanden ist, gleich Null, und sie nimmt von da an nach den Ordinaten der Zusammen-

drückung, also nach jenen einer geraden Linie, bis n' allmälig zu, wo ihr grösster Werth auftritt.

Im Weiteren kann die Untersuchung in derselben Weise, wie früher, durchgeführt werden, wenn man beachtet, dass der gegenwärtige Fall gerade so ist, wie wenn die Steintheile zwischen o und n nicht vorhanden wären, sondern der Gesammtdruck N zwischen zwei Steinen von der kleineren Breite $\mathfrak{b}$ stattfände, und zwar derart, dass hiebei die per ☐ Einheit entfallende Pressung an dem Einen Ende dieser Breite (nämlich in o) gleich Null würde.

Nach dem hier in Betracht kommenden Punkt 4 der vorhin aufgestellten Gesetze kann die eben ausgesprochene Bedingung nur dann eintreten, wenn

$$\overline{an'} = u' = \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{b} \quad \text{.................} (562)$$

ist, was auch aus dem erhellet, weil jetzt die Druckresultirende N durch den Schwerpunkt des, die Grösse der Zusammendrückung repräsentirenden Dreieckes $on'\mathfrak{n}'$ gehen muss, wobei es übrigens bei der Kleinheit desselben gleichgiltig ist, die Richtung des Druckes N senkrecht auf $\overline{on'}$ oder $\overline{o\mathfrak{n}'}$ anzusehen.

Ferner erhält man für die Durchschnittspressung p_0 per ☐ Einheit der Theilfuge $\overline{on'}$, analog mit der Gleichung (550):

$$p_0 = \frac{N}{\mathfrak{b}} = \frac{N}{3\,u'} \quad \text{.................} (563),$$

und für die Pressungen p_1 und p_2, welche an den Enden dieser Theilfuge stattfinden, eben so, wie in den Relationen (560), nämlich einerseits bei o, wie schon erwähnt:

$$p_1 = o \quad \text{.........................} (564),$$

und andererseits bei n':

$$p_2 = 2\,p_0 = \frac{2\,N}{\mathfrak{b}} = \frac{2\,N}{3\,u'} \quad \text{...........} (565).$$

Hiernach beträgt die g r ö s s t e per Quadrat-Einheit entfallende P r e s s u n g (nämlich die mit p_2 bezeichnete bei n') das D o p p e l t e der D u r c h s c h n i t t s p r e s s u n g p_0; oder auch z w e i D r i t t t h e i l e von demjenigen Drucke per ☐ Einheit, der vorhanden wäre, wenn d e r g a n z e N o r m a l d r u c k i n d e m F u g e n-

theile $\overline{an'}$ gleichförmig auftreten würde, da ja in dem letztgedachten Falle ein Druck von $\frac{N}{u'}$ per □ Einheit entfiele.

Je kleiner u' wird, d. h. je näher die Druckresultirende an das Fugenende n' rückt, desto grösser wird die dort auftretende Pressung p_2 per □ Einheit, und für $u' = o$ erhält man $p_2 = \infty$. Dieses Resultat ist leicht erklärlich, denn für $u' = o$ wirkt der Normaldruck N ausschliesslich auf das Fugenende in n', somit auf eine blosse Kante, welche demselben keine, oder wie man auch sagen kann, nur eine unendlich kleine Druckfläche darbietet. Empfängt aber eine solche einen endlichen Druck, und berechnet man, wie viel hiernach auf die Druckflächeneinheit entfiele, so ergibt sich offenbar ein unendlich grosses Resultat.

Da in einem solchen Falle die Steine an der gepressten Kante zerquetscht werden würden, so folgt hieraus die Regel, dass die resultirende Druckkraft niemals durch ein Fugenende gehen darf, sondern vielmehr ihr Angriffspunkt innerhalb der Fugenbreite, und zwar in einer angemessenen Entfernung von jedem der beiden Fugenenden gelegen sein muss.

Wie gross die Minimal-Entfernung ist, bis auf welche die resultirende Druckkraft dem einen oder dem anderen Fugenende nahe kommen darf, hängt mit der Druckfestigkeit des Steinmateriales und dem Grade der Sicherheit, den man in dieser Beziehung erreichen will, zusammen.

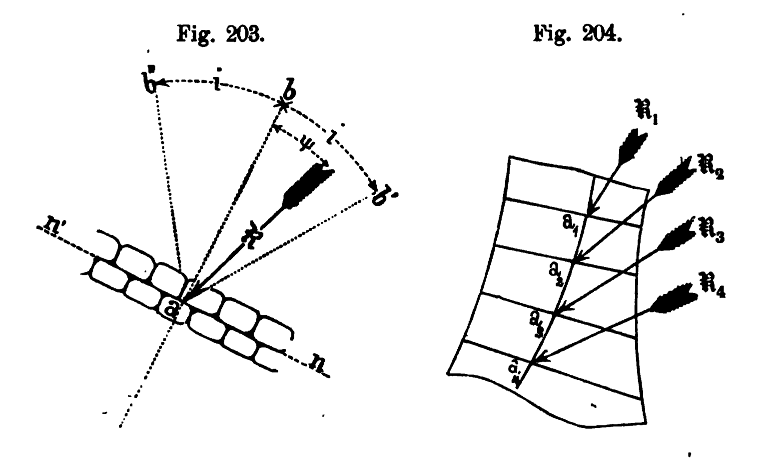
Es darf nämlich die in der Formel (541) mit $\mathfrak{z}$ bezeichnete zulässig grösste Pressung der Steine per □ Einheit der Druckfläche nicht kleiner sein, als die thatsächlich entstehende, wie solche aus den Gleichungen (551) bis (556), oder aus der Formel (565) sich ergibt, je nachdem die Druckresultirende inner- oder ausserhalb des mittleren Drittels der ganzen Fugenbreite gelegen ist. Es muss daher jedenfalls sein:

$$\mathfrak{z} \left\{ \begin{array}{l} \text{sowohl} \quad \overline{\overline{>}}\, p_1 \\ \text{als auch} \quad \overline{\overline{>}}\, p_2 \end{array} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (566).$$

Tritt dies nicht ein, so ist der in Bezug auf die Steinfestigkeit verlangte Sicherheitsgrad nicht vorhanden.

Insoferne nach der ganzen Fugenbreite zwischen n und n' (Fig. 203) mehrere zusammenstossende Steine liegen, tritt bei den vorigen Untersuchungen an die Stelle eines jeden der beiden Steine I und II eine ganze Steinschaar, sonst aber können die angedeuteten Resultate gleichfalls angewendet werden. Wenn ferner, wie es gewöhnlich vorkommt, die einwirkende Druckkraft die Lagerfuge $\overline{nn'}$ schief, etwa um dem Winkel ψ gegen das Loth $\overline{ab}$ auf dieselbe, trifft, so hat man anstatt der normalen

Fig. 203. Fig. 204.



Druckkraft N, welche bei den vorigen Berechnungen in Betracht zu ziehen ist, den Werth $\mathfrak{R} \cos \psi$ zu setzen, wenn $\mathfrak{R}$ die Grösse jener schiefen Druckkraft bezeichnet.

Verbindet man (Fig. 204) die in den aufeinander folgenden Lagerfugen sich ergebenden Druckmittelpunkte a_1, a_2, a_3, $a_4 \ldots$, wo nämlich die resultirenden Druckkräfte $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ die bezüglichen Lagerfugen treffen, so erhält man die sogenannte Mittellinie des Druckes im Mauerwerke. Aus einer solchen Figur ist sogleich zu ersehen, wie weit die jeweilige Druckresultirende von jedem der beiden Fugenenden absteht.

Anmerkung.

Der Umstand, dass in den Fällen, wenn die Druckresultirende ausserhalb des mittleren Drittels der ganzen Fugenbreite liegt, an dem von ihr

entfernteren Fugenende eine auf das Oeffnen der Fuge abzielende Drehungswirkung sich äussert, ist nicht geeignet, die mitunter vorkommende Behauptung zu rechtfertigen, es müsse bei Steinconstructionen unter allen Umständen das Eintreten solcher Fälle, weil gefährlich, vermieden, und dieserwegen vorgesorgt werden, dass die Druckresultirende aus dem mittleren Fugendrittel nicht heraustrete, sondern höchstens bis an Eines der beiden Enden dieses Fugendrittels heranrücke.

Zunächst ist nämlich zu bemerken, dass in Fällen der bezeichneten Art, von einer eigentlichen Gefahr insolange nicht die Rede sein kann, als eine solche nicht schon aus einer anderen Ursache herantritt, daher insolange nicht, als überhaupt noch eine ausreichende Sicherheit sowohl gegen das Umkippen als auch gegen das Gleiten besteht, und zugleich das Steinmateriale nicht über das Zulässige hinaus gepresst wird. Steht in diesen drei Beziehungen die Stabilität einer Steinconstruction ausser Zweifel, so hat die Frage, ob nicht vielleicht der Mittelpunkt der Pressungen in den Steinschaaren irgendwo ausserhalb des mittleren Fugendrittels gelegen sei, in der Regel nur eine untergeordnete Wichtigkeit. Ja noch mehr. Wollte man nämlich stets die Regel festhalten, dass es zu empfehlen sei, bei einer Steinconstruction in dem ungünstigsten Falle ihrer Beanspruchung die Mittellinie des Druckes dort, wo sie von der die Schwerpunkte der Mauerwerksschaaren verbindenden Achse verhältnissmässig am meisten ausweicht, geradezu bis an das Eine oder das andere Ende des mittleren Fugendrittels reichen zu lassen, so würde man selbst dann, wenn die Festigkeit des Steinmateriales eine ganz ausreichende ist, mitunter zu Resultaten für die betreffende Mauerstärke gelangen, welche mit den praktischen Erfahrungen nicht im Einklange sind.

In ähnlicher Weise spricht sich auch Scheffler in seinem auf Seite 46 des vorliegenden Buches angeführten Werke aus, und zwar auf Seite 63, wo von der Mittellinie des Druckes in einem Gewölbe die Rede ist. Dort heisst es nämlich:

„Im Uebrigen kann man an ausgeführten Brücken beobachten, dass „bei den besseren Baumaterialien, als Granit, hartem Kalk- und Sandstein, „die Drucklinie oftmals fast ganz genau die eigentliche Kante des Fugen„schnittes erreicht, dass also auch die von manchen Schriftstellern, nament„lich von Navier, angenommene Hypothese, wonach die Pressung von der „Einen Kante nach der anderen gleichmässig wachsen, also die Re„sultante um den dritten Theil der Fugenbreite von der letzteren Kante „abstehen und das Material an dieser Kante pro Quadrateinheit doppelt „so stark gedrückt werden würde, als wenn eine gleichförmige Ver„theilung des Druckes stattfände, für die Praxis ganz unzulässig ist.“

Man kann freilich einwenden, dass in dem Falle, wenn die Mittellinie des Druckes in einer Steinconstruction aus dem mittleren Fugendrittel heraustritt, an dem Einen Ende solcher Fugen die Steine klaffen würden, daher dort eine Lockerung ihrer Verbindung mit der Mörtelschichte entstehen müsse. Allein in den meisten Fällen geschieht dies dennoch nicht, oder in kaum nennenswerthem Grade, worüber sich folgende Erklärung geben lässt:

Die zwischen den Steinschaaren in Betracht kommenden Pressungen gelangen in der Regel schon während der Maueraufführung oder gleich nach ihrer Vollendung grösstentheils oder ganz zur Wirksamkeit. Zu einer solchen Zeit ist das Mauerwerk noch in einem mehr oder weniger grünen Zustande, in Folge dessen in den Lagerfugen, wo die Druckresultirende sehr excentrisch wirkt, eine zweifache Veränderung fast gleichzeitig auftritt. Denn einerseits besteht die auf ein Oeffnen solcher Fugen an dem Einen ihrer beiden Enden abzielende Drehungswirkung, andererseits aber tritt eine gewisse allgemeine Setzung des Mauerwerkes ein, welche eine auf das Gegentheil, nämlich auf die Verengung der Lagerfugen abzielende Wirkung äussert. Indem nun durch die Eine Wirkung eine Erweiterung und durch die andere eine Verengung der sehr excentrisch gepressten Lagerfugen entstehen würde, wenn man jede der beiden Wirkungen abgesondert in's Auge fasst, so erklärt es sich, wie das vereinigte Resultat beider Wirkungen mitunter sogar ein derart günstiges sein kann, dass nicht nur kein Oeffnen oder Klaffen, sondern vielmehr eine Verengung solcher Fugen zum Vorschein kommt. Ausserdem ist zu beachten, dass eben in Folge der allgemeinen Setzung des Mauerwerkes der weiche Mörtel aus den sich verengenden Fugenstrecken zum Theile in die relativ weiteren hinübergedrängt wird, so dass selbst für den Fall, als diese letzteren Fugenstrecken im Vergleiche zu ihrem anfänglichen Zustande hin und wieder wirklich sich etwas geöffnet hätten, eine genügende Ausfüllung derselben mittelst Mörtel nicht ausgeschlossen bleibt, zumal es sich ja nur um verhältnissmässig ganz kleine Veränderungen in den Lagerfugen handeln kann. Und sollte es schliesslich doch vorkommen, dass Mörtelbänder hie und da etwas rissig werden, so ist dies an und für sich *in der Regel* noch nicht genügend, um hieraus auf eine eigentliche Gefahr für den Bestand des Mauerwerkes zu schliessen, weil hiezu, wie schon früher bemerkt, noch andere ungünstige Umstände hinzutreten müssten, deren Vorhandensein von Fall zu Fall erst zu constatiren wäre. Uebrigens zeigt die Erfahrung, dass eben wegen der vorbemerkten allgemeinen Setzung eines Mauerwerkes ein Rissigwerden von manchen Mörtelbändern, namentlich in grossen Mauerwerkskörpern selbst dann, wenn die einzelnen Steinschaaren keine sehr ungleichförmige Pressung erfahren, nicht immer hintangehalten werden kann, und dass man darin

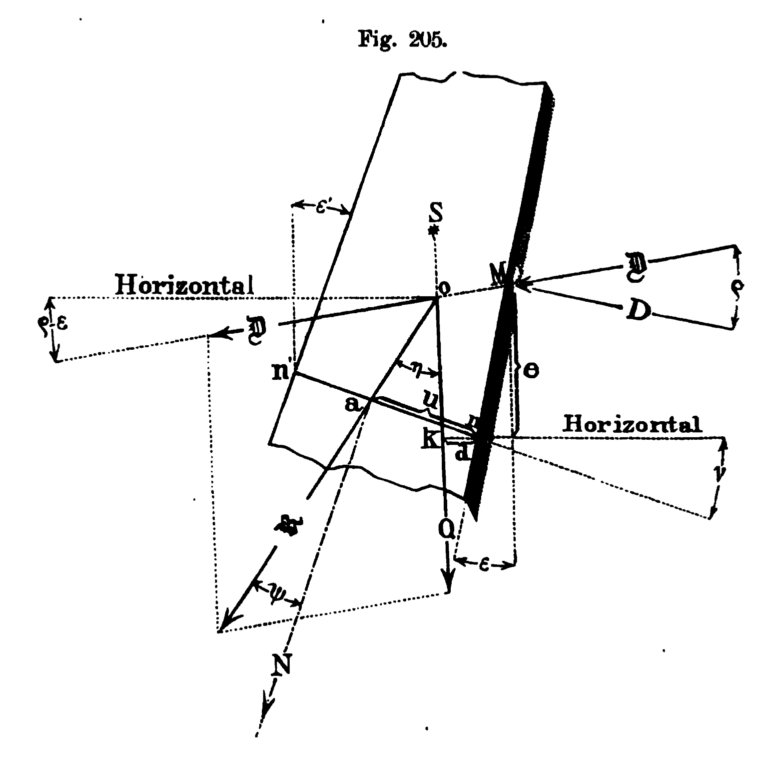
auch insolange nichts Bedenkliches findet, als ein solcher kaum zu vermeidender Uebelstand innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen bleibt.

Gleichwohl ist nicht in Abrede zu stellen, dass es in vielen Fällen zweckmässig und nothwendig sein kann, die Construction eines Mauerwerkskörpers so anzuordnen, dass der im Eingange dieser Anmerkung citirten Behauptung, ohne sie deshalb als eine allgemein giltige anzusehen, Genüge geleistet wird.

§. 118.

Vorgang bei der Untersuchung der Stabilität von Futtermauern in Bezug auf die Druckfestigkeit der Mauersteine. Ist $\overline{nn'}$ irgend eine Lagerfuge der in Fig. 205

Fig. 205.



angedeuteten Futtermauer, so setzt sich der oberhalb dieser Fuge stattfindende schiefe Erddruck 𝔇 mit dem darauf ruhenden Mauer-

gewichte Q zu der mit $\mathfrak{R}$ bezeichneten Resultirenden zusammen, welche die Fuge in a (von n um die Grösse u entfernt) trifft, und mit dem Normaldrucke N den Winkel ψ einschliesst.

Die Distanz des Erddruckmittelpunktes M von dem durch n gelegten Horizont wird mit e, jene des Punktes n aber von der durch den Schwerpunkt S des Mauerprofiles vertical wirkenden Resultirenden des Mauergewichtes Q, nämlich das Stück $\overline{kn}$, mit d bezeichnet. Im Uebrigen ist die Zeichnung jener in der Figur 197 analog, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt blos der einfache Erddruck $\mathfrak{P}$ in Betracht kommt, während es sich dort um das s-fache desselben handelte.

Zunächst hat man daher, wie in der Gleichung (530), nur jetzt mit Beseitelassung der Grösse s:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mathfrak{P} \cos(\nu + \varrho - \varepsilon) - Q \sin \nu}{\mathfrak{P} \sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q \cos \nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (367).$$

Weiter hat man zum Behufe der Bestimmung des Normaldruckes N:

$$\measuredangle (\mathfrak{P}, Q) = 90^0 - (\varrho - \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (568),$$

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{P}^2 + Q^2 + 2\,\mathfrak{P}\,Q \cos \measuredangle (\mathfrak{P}, Q)}$$

$$= \sqrt{\mathfrak{P}^2 + Q^2 + 2\,\mathfrak{P}\,Q \sin(\varrho - \varepsilon)} \ldots\ldots\ldots\ldots (569),$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{\mathfrak{P} \sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q \cos \nu}{\mathfrak{R}} \ldots\ldots (570);$$

also:

$$N = \mathfrak{R} \cos \psi = \mathfrak{P} \sin(\nu + \varrho - \varepsilon) + Q \cos \nu \ldots\ldots (571).$$

Um den Angriffspunkt a der Druck-Resultirenden in der Fuge $\overline{nn'}$ zu finden, beachte man, dass das statische Moment von $\mathfrak{R}$ eben so gross sein muss, wie die Summe der statischen Momente von $\mathfrak{P}$ und Q, und zwar in Bezug auf jede beliebig gelegene Drehungsachse. Nimmt man solche der Bequemlichkeit halber in n an, so hat man:

$$\mathfrak{R}\,.\,u \cos \psi = \mathfrak{P}\,.\,\frac{e}{\cos \varepsilon} \cos \varrho + Q d,$$

oder:

$$N u = \mathfrak{P}\, e \frac{\cos \varrho}{\cos \varepsilon} + Q d,$$

mithin:

$$u = \frac{\mathfrak{P}\, e \frac{\cos \varrho}{\cos \varepsilon} + Q\, d}{\mathfrak{P} \sin (\nu + \alpha - \varepsilon) + Q \cos \nu} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (572),$$

worin man anstatt $\mathfrak{P} \cos \varrho$ auch den normalen Erddruck D substituiren kann.

Offenbar hängt der Werth von u davon ab, wo die in Betracht gezogene Mauerwerksfuge $\overline{n n'}$ liegt, derselbe ist daher mit der jeweiligen Druckhöhe veränderlich. Zeichnet man hiernach die Mittellinie des Druckes, so findet man unter den in der Praxis üblichen Constructionsverhältnissen, dass der Mittelpunkt für die Druckresultirende namentlich in den unteren Mauerwerksschichten desto mehr an die äussere Mauerflucht rückt, je weniger dieselben von dem Fundamente entfernt sind. Hieraus, und weil auch der Druck im Mauerwerke nach unten zunimmt, ergibt sich die Berechtigung, das Stattfinden der grössten Pressung der Steine in der untersten Schichte, und zwar an der äusseren Mauerflucht anzunehmen, folglich auch dort den geringsten Sicherheitsgrad gegen die Gefahr einer Steinzerquetschung zu suchen, insoferne nämlich das Mauerwerk aus Steinen von derselben oder wenigstens nahezu gleichen Qualität zusammengesetzt gedacht wird.

Man wird also an dieser ungünstigen Stelle die per ☐ Einheit entfallende Pressung der Mauersteine nach den Regeln im vorigen §. berechnen, und auf Grundlage der Formel (566) beurtheilen, ob und inwieweit der nothwendige Sicherheitsgrad gegen das Zerquetschen vorhanden ist.

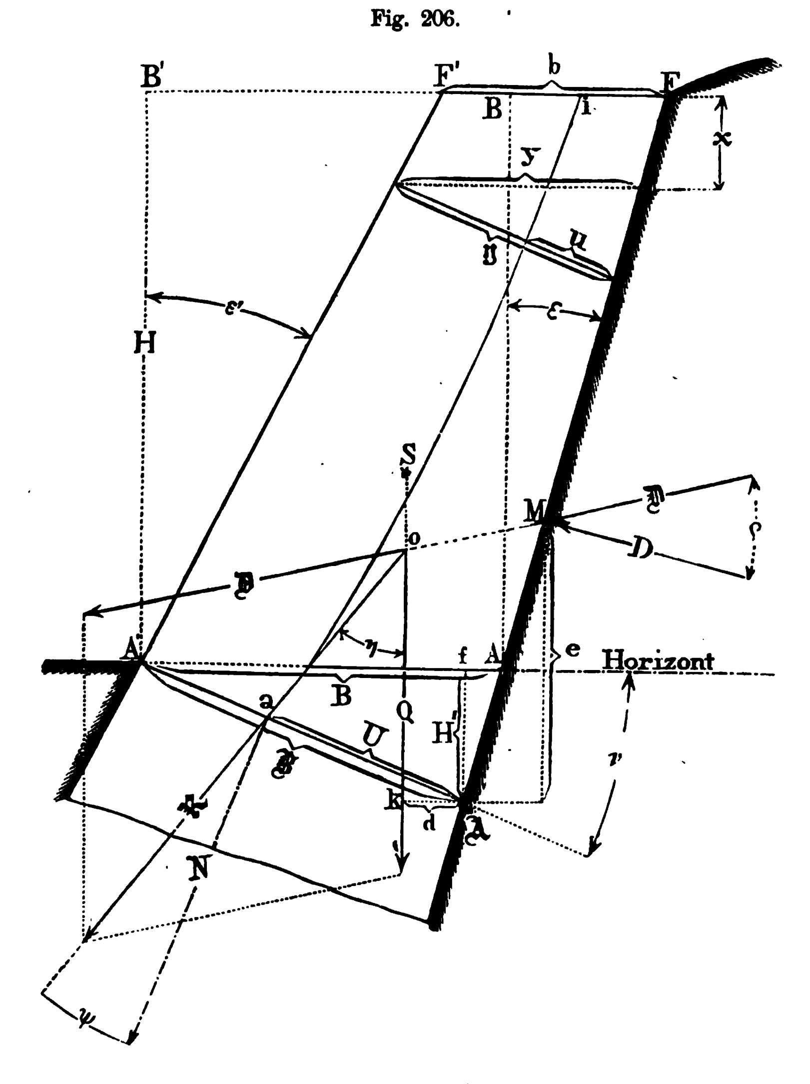
Uebrigens kann, wenn man es für nöthig erachtet, die Mittellinie des Druckes im Mauerwerke auch förmlich berechnet oder construirt werden.

§. 119.

Anwendung der vorangedeuteten Untersuchungsmethode. Es sei für die in der Figur 206 dargestellte Futtermauer (von der Höhe $\overline{AB} = \overline{A'B'} = H$ über dem Fundamente)

die horizontale Mauerbreite an der Krone $\overline{FF'} = b$ und jene an der Basis $\overline{AA'} = B$; ferner $\overline{A'\mathfrak{A}}$ die Richtung der um den

Fig. 206.



Winkel ν geneigten Lagerfuge am Fundamente und $\overline{A'\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$ die Breite dieser letzteren; $\mathfrak{D}$ der schiefe Erddruck auf die Wand

$\overline{\mathfrak{A}F}$, $D = \mathfrak{P} \cos \varrho$ der Normaldruck auf dieselbe, Q das Mauergewicht $\mathfrak{A}A'FF'$ und $\mathfrak{R}$ die aus $\mathfrak{P}$ und Q sich ergebende Resultirende, welche die Lagerfuge $\overline{\mathfrak{A}A'}$ in a trifft und den Normaldruck $N = \mathfrak{R} \cos \psi$ auf diese Fuge hervorbringt; $H' = \overline{\mathfrak{A}f}$ endlich die Distanz, um welche das innere Fugenende $\mathfrak{A}$ unter dem durch das äussere Fugenende A' gedachten Horizont tiefer liegt. Die Grössen ε, ε', ψ, η, d und e haben dieselben Bedeutungen, wie in der Figur 205, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt sogleich die Fundamentfuge $\overline{A'\mathfrak{A}}$ in Betracht kommt, während dort von einer beliebig situirten Fuge die Rede war.

Zunächst handelt es sich um die Bestimmung der Gleichungen (571) und (572) für den Normaldruck N und die Lage seines Angriffspunktes a, nämlich um die Berechnung der Distanz $\overline{\mathfrak{A}a} = U$.

Zu diesem Behufe kann man vorerst die Werthe für die in jenen Formeln erscheinenden massgebenden Grössen ausdrücken und hiebei das nachfolgende Verfahren beobachten:

$$\mathfrak{B} = B \frac{\sin \measuredangle \mathfrak{A}AA'}{\sin \measuredangle A\mathfrak{A}A'} = B \frac{\sin (90^\circ - \varepsilon)}{\sin (90^\circ - \nu + \varepsilon)} = B \frac{\cos \varepsilon}{\cos (\nu - \varepsilon)}$$

$$= B \cdot \frac{1}{\cos \nu \, (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu)} = B \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu} \dots\dots\dots (573).$$

$$H' = \mathfrak{B} \sin \nu = B \frac{\sin \nu \cos \varepsilon}{\cos (\nu - \varepsilon)} = B \left(\frac{\operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) = \gamma B \quad (574),$$

$$\text{Coefficient } \gamma = \left(\frac{\operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) \dots\dots\dots\dots (575).$$

$$\overline{A'f} = \mathfrak{B} \cos \nu = B \frac{\cos \varepsilon \cos \nu}{\cos (\nu - \varepsilon)} = B \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) = \gamma_1 B \quad (576),$$

$$\text{Coefficient } \gamma_1 = \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) \dots\dots\dots\dots (577).$$

$$\overline{Af} = B - \overline{A'f} = B (1 - \gamma_1) = B \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) = \gamma_2 B \ (578),$$

$$\text{Coefficient } \gamma_2 = \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}\right) \dots\dots\dots\dots (579).$$

$$\begin{aligned} F &= \text{area } \mathfrak{A}A'F'F = \tfrac{1}{2} (B + b) H + \tfrac{1}{2} BH' \\ &= BH - \tfrac{1}{2} (\operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon) H^2 + \tfrac{1}{2} \gamma B^2 \\ &= BH - \tfrac{1}{2} (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H^2 + \tfrac{1}{2} \gamma B^2 \\ &= \tfrac{1}{2} [\gamma B^2 + 2 BH - (n - \operatorname{tg} \varepsilon) H^2] \\ &= \tfrac{1}{2} [\gamma B^2 + 2 BH - \gamma_3 H^2] \dots\dots\dots\dots\dots\dots (580): \end{aligned}$$

Coefficient $\gamma_3 = (n - \text{tg}\,\varepsilon)$ und $\text{tg}\,\varepsilon' = n$ ......(581).

$Q = qF = \frac{1}{2} q\,[\gamma B^2 + 2\,BH - \gamma_3 H^2]$ ....(582);

q = Gewicht der cubischen Einheit des Mauerwerkes.

Qd = stat. Moment des Mauergewichtes Q in Bezug auf die Drehungsachse in $\mathfrak{A}$.

Um dieses Moment zu erhalten, suche man früher das Moment in Bezug auf die Drehungsachse in A', welches S_M heissen soll und zu Qd in folgender Abhängigkeit steht:

$$S_M = Q\,[\overline{A'f} - d] = Q\,.\,\overline{A'f} - Qd.$$

Hieraus folgt dann:

$$Qd = Q\,.\,\overline{A'f} - S_M,$$

oder:

$$Qd = \tfrac{1}{2}\,q\gamma_1\,[\gamma B^2 + 2\,BH - \gamma_3 H^2]\,B - S_M \;\ldots\ldots\; (583).$$

Es ist aber:

$$S_M = \left\{\begin{matrix} S'_M = \\ \text{Moment} \\ \text{des Mauerwerkes} \\ AA'F'F \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} S''_M = \\ \text{Moment} \\ \text{des Mauertheiles} \\ \mathfrak{A}AA' \end{matrix}\right\},$$

wobei S'_M denselben Werth hat, wie das in der Gleichung (501) ausgedrückte Moment, also:

$$S'_M = \tfrac{1}{2}\,q\,[B^2H + BH^2\,\text{tg}\,\varepsilon - \tfrac{1}{3}\,H^3\,(n^2 - \text{tg}^2\,\varepsilon)]$$

$$= \tfrac{1}{6}\,q\,[3\,B^2H + 3\,BH^2\,\text{tg}\,\varepsilon - H^3\,(n^2 - \text{tg}^2\,\varepsilon)]$$

$$= \tfrac{1}{6}\,q\,[3\,B^2H + 3\,BH^2\,\text{tg}\,\varepsilon - \gamma_4\,H^3],$$

Coefficient $\gamma_4 = (n^2 - \text{tg}^2\,\varepsilon)$ ....(584).

Das Moment S''_M hat man aus der Gleichung zu suchen:

$$S''_M = q\,[\tfrac{1}{2}\,\overline{A'f}\,.\,\overline{\mathfrak{A}f}\,.\,\tfrac{2}{3}\,\overline{A'f} + \tfrac{1}{2}\,\overline{Af}\,.\,\overline{\mathfrak{A}f}\,(\overline{AA'} - \tfrac{2}{3}\,\overline{Af})]$$

$$= \tfrac{1}{6}\,q\,.\,H'\,\left(2\,\overline{A'f}^2 + 3\,B\,.\,\overline{Af} - 2\,\overline{Af}^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\,q\gamma\,(2\gamma_1^2 + 3\gamma_2 - 2\gamma_2^2)\,B^3 = \tfrac{1}{6}\,q\gamma\,(1 + \gamma_1)\,B^3$$

$$= \tfrac{1}{6}\,q\,\text{tg}\,\nu\,\frac{(2 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\nu)}{(1 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\nu)^2}\,B^3 = \tfrac{1}{6}\,q\,\gamma_5\,B^3,$$

Coefficient $\gamma_5 = \text{tg}\,\nu\,\dfrac{(2 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\nu)}{(1 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\nu)^2} = \gamma\,(1 + \gamma_1)$..(585).

Hiernach hat man:

$$Qd = \tfrac{1}{6} q \, (\gamma_6 B^3 + \gamma_7 B^2 H - \gamma_8 B H^2 + \gamma_4 H^3) \ldots\ldots (586),$$

wobei die Coefficienten γ_6, γ_7, und γ_8 die nachstehenden Werthe haben:

$$\gamma_6 = \gamma \, (2 \gamma_1 - 1) \quad = \operatorname{tg} \nu \frac{(1 - \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu)}{(1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (587),$$

$$\gamma_7 = 3 \, (2 \gamma_1 - 1) \quad = 3 \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (588),$$

$$\gamma_8 = 3 \, (\gamma_1 \gamma_3 + \operatorname{tg} \varepsilon) = 3 \left(\frac{n + \operatorname{tg}^2 \varepsilon \operatorname{tg} \nu}{1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \nu} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (589).$$

Ausserdem kann man schreiben:

$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{(\text{Druckhöhe})^2}{\cos \varepsilon},$$

worin w das Gewicht per Cubikeinheit der sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit vorstellt, welche denselben Normaldruck D ausüben würde. Es ist daher:

$$D = \tfrac{1}{2} w \frac{(H + H')^2}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{2} w \frac{(H + \gamma B)^2}{\cos \varepsilon}$$

sowie:

$$\mathfrak{P} = \frac{D}{\cos \varrho} = \tfrac{1}{2} w \frac{(H + H')^2}{\cos \varepsilon \cos \varrho} = \tfrac{1}{2} w \frac{(H + \gamma B)^2}{\cos \varepsilon \cos \varrho} \ldots\ldots (590).$$

Die auf die Lage des Erddruckmittelpunktes M bezügliche Grösse e kann gesetzt werden:

$$e = \tfrac{1}{3} m \, (\text{Druckhöhe}) = \tfrac{1}{3} m \, (H + H')$$
$$= \tfrac{1}{3} m \, (H + \gamma B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (590),$$

worin der Coefficient m entweder gleich der Einheit ist, oder einen diesen etwas übersteigenden Werth hat.

Hiernach erhält man anstatt des Gliedes $\mathfrak{P} \sin (\nu + \varrho - \varepsilon)$ in der Gleichung (571) folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{P} \sin (\nu + \varrho - \varepsilon) = \tfrac{1}{2} w \frac{(H + H')^2}{\cos \varepsilon \cos \varrho} \sin (\nu + \varrho - \varepsilon) =$$
$$= \tfrac{1}{2} w \, (H + \gamma B)^2 \cos \nu \, [\operatorname{tg} \nu \, (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varrho) + \operatorname{tg} \varrho - \operatorname{tg} \varepsilon]$$
$$= \tfrac{1}{2} w \cos \nu \, \gamma_9 \; (H + \gamma B)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (591),$$

Coefficient $\gamma_9 = \operatorname{tg} \nu \, (1 + \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \varrho) + \operatorname{tg} \varrho - \operatorname{tg} \varepsilon \ldots (592).$

Ferner wird das erste Glied im Zähler des Bruches (572):

$$\mathfrak{P} e \frac{\cos \varrho}{\cos \varepsilon} = \tfrac{1}{6} m w \frac{(H + H')^3}{\cos^2 \varepsilon} = \tfrac{1}{6} \frac{m w}{\cos^2 \varepsilon} (H + \gamma B)^3 \ldots (593).$$

Mit Rücksicht auf alle diese besonderen Theil-Ausdrücke hat man endlich für den Normaldruck N laut Gleichung (571):

$$N = \frac{1}{2} q \cos \nu \left[\gamma B^2 + 2BH - \gamma_3 H^2 + \gamma_0 \frac{w}{q} (H + \gamma B)^2 \right] \quad (594),$$

und für die aus der Gleichung (572) zu bestimmende Distanz u, welche für die hier in Betracht stehende unterste Lagerfuge insbesondere U heissen soll:

$$U = \frac{1}{3 \cos \nu} \times$$

$$\times \frac{\gamma_6 B^3 + \gamma_7 B^2 H - \gamma_8 BH^2 + \gamma_4 H^3 + \frac{m w}{q \cos^2 \varepsilon} (H + \gamma B)^3}{\gamma B^2 + 2BH - \gamma_3 H^2 + \gamma_9 \frac{w}{q} (H + \gamma B)^2} \quad (595),$$

in welchen Gleichungen noch $\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}}$ und $\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon)$ gesetzt werden kann, um da in der Regel die Tangentenwerthe der Winkel ε und ν bekannt sind, ohne Hilfe von trigonometrischen Tabellen zu rechnen.

Ist die Oberfläche des Erdreiches, von der Mauerkrone an, nach einer Ebene ansteigend, und nicht zufällig belastet, so hat man $m = 1$ zu setzen, und w ist unabhängig von der Druckhöhe. Ist jene Oberfläche horizontal und zugleich in gleichförmiger Weise zufällig belastet, so hat man im Sinne des §. 75 anstatt des ohne eine solche Belastung sich ergebenden Werthes von w_0 einen entsprechend grösseren, nämlich:

$$w = w_0 \left(1 + \frac{2 \mathfrak{p}}{\text{Druckhöhe}}\right) = w_0 \left(1 + \frac{2 \mathfrak{p}}{H + H'}\right)$$

$$= w_0 \left(1 + \frac{2 \mathfrak{p}}{H + \gamma B}\right) = w_0 \left(\frac{H + \gamma B + 2 \mathfrak{p}}{H + \gamma B}\right) \dots (596)$$

für den Coefficienten m aber zu setzen:

$$m = \frac{1 + \frac{3 \mathfrak{p}}{\text{Druckhöhe}}}{1 + \frac{2 \mathfrak{p}}{\text{Druckhöhe}}} = \frac{H + H' + 3 \mathfrak{p}}{H + H' + 2 \mathfrak{p}}$$

$$= \frac{H + \gamma B + 3 \mathfrak{p}}{H + \gamma B + 2 \mathfrak{p}} \dots (597),$$

worin $\mathfrak{p}$ die zufällige Belastung per □ Einheit der Erdreichoberfläche bezeichnet.

In einem derartigen Falle wird das letzte Glied in der Gleichung (594) und eben so jenes im Nenner der Gleichung (595):

$$\gamma_9 \frac{w}{q} (H + \gamma B)^2 = \gamma_9 \frac{w_0}{q} (H + \gamma B + 2\mathfrak{p}) (H + \gamma B) \quad ..(598),$$

ferner das letzte Glied des Zählers in der letztbezogenen Gleichung:

$$\frac{m\, w}{q \cos^2 \varepsilon} (H + \gamma B)^3 = \frac{w_0}{q \cos^2 \varepsilon} (H + \gamma B + 3\mathfrak{p}) (H + \gamma B)^2 .. \quad (599).$$

Um noch die Mittellinie des Druckes im Mauerwerke $\widehat{[ai]}$, nämlich für jeden beliebigen Höhentheil x den dazu gehörigen Werth von u (anstatt U) zu erhalten (Fig. 206), wird man in den vorigen Gleichungen überall x anstatt H, y aber anstatt B setzen, und hiebei die zwischen y und x stattfindende Relation (494), nämlich $y = b + (n - \text{tg}\, \varepsilon)\, x$, benützen, so wie noch darauf Acht zu geben haben, ob und inwieweit auch die Grössen w und m von x abhängig seien, wodurch schliesslich u als eine Function von x sich darstellt.

In besonderen Fällen werden sich die gegebenen Formeln mehr oder weniger vereinfachen. Handelt es sich z. B. um den Wasserdruck, so ist $w = g$, $\varrho = 0$ und $m = {}^1/_3$ zu setzen; sind die Lagerfugen horizontal, so ist $v = 0$; sind sie normal auf die äussere Mauerböschung, so wird $v = \varepsilon'$; für vorne und rückwärts vertical begrenzte Mauern ist $\varepsilon = \varepsilon' = n = 0$; u. s. w.

Ex. An der italienischen Reichsstrasse bei Tarvis in Kärnthen bestehen 10 Klafter hohe Stützmauern, vorne $\frac{1}{8}$ und rückwärts $\frac{1}{12}$ geböscht. Ihre horizontale Breite beträgt an der Krone 9 und an der Basis 14 Fuss. Das Mauerwerk ist aus Bruchstein und hat ein Gewicht von circa 125 Pfunden per Cubikfuss. Die Lagerfugen des Mauerwerkes sind normal auf die äussere Mauerböschung angeordnet. Für das dahinter liegende Erdreich kann man nach den diessfälligen Erhebungen und unter Beachtung der Bemerkungen im §. 37 das durchschnittliche Gewicht mit 85 Pfunden per Cubikfuss, und das Verhältniss zwischen Anlage und Höhe der natürlichen Erdböschung mit 1·3 annehmen. Bei der bedeutenden Rauhheit der inneren Mauerböschung und bei der geschehenen Verdichtung des Erdreiches durch Anstampfen, soll ferner der Coefficient für die Reibung an der Wand eben so gross, wie jener für die Reibung zwischen den Erdtheilchen, eingeführt

werden. Behufs der Wirkung der zufälligen Belastung auf der Strassenbahn berücksichtige man endlich die Regeln im §. 75, beziehungsweise 35.

Hiernach hat man folgende Daten: $H = 60'$, $b = 9'$, $B = 14'$, $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{12}$, $n = \operatorname{tg} \varepsilon' = \operatorname{tg} \nu = \frac{1}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 3$, $\mu = \operatorname{tg} \varrho = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{10}{13}$, $g = \mathfrak{p} = 0 \cdot 85$ Ctr. und $q = 1 \cdot 25$ Ctr., in Folge welcher man zunächst findet:

$\mathfrak{B} = 14 \cdot 00' = B$, $\gamma = \frac{12}{73}$, $H' = \frac{12}{73} B = 2 \cdot 30'$, $\gamma_1 = \frac{72}{73}$, $\gamma_2 = \frac{1}{73}$, $\gamma_3 = \frac{1}{12}$, $\gamma_4 = \frac{1}{48}$, $\gamma_5 = \frac{1740}{5329}$, $\gamma_6 = \frac{8552}{53290}$, $\gamma_7 = \frac{213}{73}$, $\gamma_8 = \frac{145}{292}$, $\gamma_9 = \frac{10}{17}$, $\cos \nu = \frac{6}{37} \sqrt{37}$, $\frac{1}{\cos \nu} = \frac{1}{6} \sqrt{37}$, $\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{145}{144}$.

Ferner ist, bezüglich der in den Gleichungen (598) und (599) erscheinenden Grösse w_0, nach der Tabelle XV für $\operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 3$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1}{12}$:

$$\frac{w_0}{g} = 0 \cdot 153, \; w_0 = 0 \cdot 153 \, g = 0 \cdot 1300 \text{ Ctr.},$$

somit hiernach und auf Grund der Gleichungen (594) und (595) nach geschehener Reduction:

$$N = \mathfrak{k}_1 B^2 + \mathfrak{k}_2 B H + \mathfrak{k}_3 H^2 + \mathfrak{k}_4 B + \mathfrak{k}_5 H,$$

$$U = \frac{\mathfrak{k}_6 B^3 + \mathfrak{k}_7 B^2 H - \mathfrak{k}_8 B H^2 + \mathfrak{k}_9 H^3 + \mathfrak{k}_{10} B^2 + \mathfrak{k}_{11} B H + \mathfrak{k}_{12} H^2}{N},$$

wenn die Dimensionen B und H vorläufig noch in ihrer allgemeinen Bedeutung belassen werden. Die angedeuteten Coefficienten haben folgende numerische Werthe:

$\mathfrak{k}_1 = 0 \cdot 1028$	$\mathfrak{k}_4 = 0 \cdot 0155$	$\mathfrak{k}_7 = 0 \cdot 6096$	$\mathfrak{k}_{10} = 0 \cdot 0015$
$\mathfrak{k}_2 = 1 \cdot 2512$	$\mathfrak{k}_5 = 0 \cdot 0941$	$\mathfrak{k}_8 = 0 \cdot 0927$	$\mathfrak{k}_{11} = 0 \cdot 0183$
$\mathfrak{k}_3 = 0 \cdot 0040$	$\mathfrak{k}_6 = 0 \cdot 0334$	$\mathfrak{k}_9 = 0 \cdot 0262$	$\mathfrak{k}_{12} = 0 \cdot 0556$

Setzt man jetzt $B = 14'$ und $H = 60'$, so findet man insbesondere:

$$N = 1091 \text{ Ctr. und } U = 7 \cdot 76 \text{ Fuss.}$$

In diesem Beispiele beträgt daher die resultirende Normalpressung in der untersten Lagerfuge des Mauerwerkes ($\overline{\mathfrak{A} A'}$, Fig. 206) 1091 Centner, und ihr Angriffspunkt ist ausserhalb der Fugenmitte, nämlich in a, welcher Punkt von dem inneren Fugenende $\mathfrak{A}$ um $7 \cdot 76$ und von dem äusseren in A' um $6 \cdot 24$ Fuss absteht, weshalb auch eine ungleichförmige Fugenpressung stattfinden muss.

In der That beträgt in der erwähnten Fuge die durchschnittliche Pressung, laut Gleichung (550):

$$p_0 = \frac{N}{\mathfrak{B}} = 77 \cdot 9 \text{ Centner per } \square \text{ Fuss}$$

$$\text{oder} = 0 \cdot 54 \quad \text{„} \quad \text{„} \; \square \text{ Zoll,}$$

während nach den Gleichungen (551) und (552) die thatsächlich auftretende Minimalpressung in $\mathfrak{A}$ mit

$p_1 = 0 \cdot 67 \, p_0 = 0 \cdot 36$, und die Maximalpressung in A' mit

$p_2 = 1 \cdot 33 \, p_0 = 0 \cdot 72$ Centnern pr. $\square$ Zoll Druckfläche sich ergibt.

Profil 10 Klafter hoher Stützmauern an der italienischen Reichsstrasse bei Tarvis in Kärnthen.

Fig. 207.

Zufällige Last = 0·85 Ctr. pr. □'

Fuss

F' b F

$\mathfrak{b}$ $\mathfrak{y}$ $\mathfrak{F}$

x

y u $\mathfrak{y}$

A' B U a $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$

0 5 10 20 30 40 50 60

Gleichung für die Mittellinie des Druckes im Mauerwerke:

$$u = \frac{24 \cdot 47 + 50 \cdot 221\, x + 0 \cdot 1435\, x^2 + 0 \cdot 02272\, x^3}{8 \cdot 47 + 11 \cdot 510\, x + 0 \cdot 1090\, x^2}$$

Mauerböschung:

Aussen .... $\frac{1}{6}$

Innen.............. .. $\frac{1}{12}$

Mauerstärke:

Oben ..$b = \mathfrak{b} =$ 9 } Fuss.
Unten $B = \mathfrak{B} =$ 14 }

Lagerfugen normal auf die äussere Mauerböschung.

Wiener Fu-s		
x	$y = \mathfrak{y}$	u
0	9	2·89
5	$9\frac{5}{12}$	4·10
10	$9\frac{5}{6}$	4·19
20	$10\frac{2}{3}$	4·49
30	$11\frac{1}{2}$	5·03
40	$12\frac{1}{3}$	5·78
50	$13\frac{1}{6}$	6·70
60	14	7·76

Horizont an der Mauerbasis.

Hiernach wäre bei einer 10- bis 20-fachen Sicherheit für den Baustein mindestens eine Zerdrückungsfestigkeit von 3·6 bis 14·4 Centnern per □ Zoll erforderlich. In dem angeführten Falle wurde zwar die Steinfestigkeit nicht besonders erhoben, gleichwohl ist kein Zweifel vorhanden, dass dieselbe weitaus grösser als absolut nothwendig ist, weil bekanntlich schon Bruchsteine weicher Gattung eine Festigkeit von 10 bis 20 Centnern per □ Zoll haben, thatsächlich aber eine ziemlich harte Steingattung zur Verwendung kam.

In der Figur 207 sind die Querschnittsverhältnisse der ausgeführten Stützmauern ersichtlich gemacht, und es ist hierin zugleich die Mittellinie des Druckes im Mauerwerke, wie solche unter den thatsächlichen Verhältnissen sich ergibt, eingezeichnet. Die Gleichung für ihre Hauptstrecke $\overline{ai}$, nämlich $u =$ Function (x), ist dort ebenfalls angegeben. Sie wird dadurch gefunden, dass man in der oben gefundenen Formel für U die Grössen x, y und u anstatt H, B und U einsetzt, und weiter für y, der Gleichung (494) gemäss, den Werth $[b + (n - \text{tg}\,\varepsilon)\,x] = (9 + \frac{1}{12}\,x)$ substituirt. Die zur Druckhöhe x gehörige Fugenbreite $\mathfrak{y}$ ist von der horizontalen Mauerbreite y so wenig verschieden, dass beide überall als gleich gross gelten können; denn es ist laut Gleichung (573):

$$\frac{\mathfrak{y}}{y} = \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2\,\nu}}{1 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\nu} = \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2\,\varepsilon'}}{1 + \text{tg}\,\varepsilon\,\text{tg}\,\varepsilon'} = 0 \cdot 9999.$$

Der Nenner des Bruches in jener Curvengleichung gibt unmittelbar die ganze Normalpressung an, welche in der zur Druckhöhe x gehörigen Lagerfuge das Mauerwerk erleidet; und zwar findet man hiefür, insbesondere für $x = 0$, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60 Fussen, aufeinanderfolgend 8, 69, 134, 282, 452, 643, 856, 1091 Centner, wovon das letzte Resultat bereits oben angegeben wurde. Hiernach unterliegt es auch keinem Anstande, nach den Regeln im §. 116 die jeweilig entstehende Maximalpressung der Steinschaaren per □ Zoll zu bestimmen, und man findet auf diese Weise die grösste Beanspruchung des Mauersteines in der untersten Lagerfuge $\overline{A'\mathfrak{A}}$, was man übrigens, weil vorhergesehen, bei der obigen Berechnung des Beispieles gleich im Vorhinein angenommen hat.

Für die ganz kleine Strecke der Mittellinie des Druckes von i aufwärts bis an die Mauerkrone gilt die angegebene Curvengleichung nicht mehr, weil sonst, was offenbar nicht zulässig ist, für x negative Werthe angenommen werden müssten. Dort besteht vielmehr eine andere Curvengleichung, welche übrigens nach den früheren Daten und Resultaten leicht aufzufinden ist. Nachdem indessen in der Gegend der Mauerkrone die Mittellinie des Druckes, weil dort die Pressung in den Mauerschichten verhältnissmässig sehr klein ist, keine praktische Bedeutung hat, so mag die Bemerkung genügen, dass das bezügliche Curvenstück in F endet und nahezu

geradlinig wird, insoferne man die schiefe Lagerfugenrichtung auch dort beibehält, was übrigens nicht geradezu nothwendig ist, indem es sich ja nur darum handelt, den Raum für den im Profil dreieckig erscheinenden Mauerkopftheil $F\mathfrak{J}F'$ entsprechend auszumauern.

Bei dieser Gelegenheit mag ein Rückblick auf die Anmerkung am Schlusse des §. 116 gemacht, und in Bezug auf das vorgeführte der Baupraxis entnommene Beispiel untersucht werden, ob und inwiefern die dort erwähnten, von mancher Seite behaupteten Regeln, in Betreff der zur Mauerstabilität nothwendigen Lage der Druckmittellinie, sich bewahrheiten. Hiernach würde zunächst zu fordern sein, dass diese Linie nirgends aus dem mittleren Fugendrittel heraustrete. Diese Regel trifft aber in dem obigen Beispiele nicht zu, weil, wie aus der Figur 207 zu ersehen ist und auch die Untersuchung der für u gegebenen Gleichung lehrt, von der Mauerkrone angefangen bis etwas unter i hinab die Mittellinie des Druckes noch in das erste Fugendrittel, von der inneren Mauerböschung an gerechnet, fällt. Offenbar wäre es ganz irrig, dieserwegen eine Gefahr für den Bestand des Objectes zu befürchten, und zwar, auch ganz abgesehen von der seitherigen Erfahrung hierüber, schon aus dem einfachen, jedoch hinreichenden Grunde, weil die Pressung der Steinschichten an der Mauerkrone und zunächst unterhalb derselben, wo eben die Mittellinie des Druckes aus dem mittleren Fugendrittel heraustritt, verhältnissmässig so gering ist, dass sie überhaupt gar nicht in Betracht zu kommen braucht, somit es wohl ganz gleichgiltig sein kann, wohin die resultirende Druckkraft eine dort oben befindliche Lagerfuge trifft.

Als zweite vermeintliche Regel, welche mit der ersterwähnten in Verbindung steht, wird von mancher Seite*) ausgesprochen, dass für den praktisch zulässigen Grenzwerth der Stärke von Futtermauern $U = \frac{2}{3}\mathfrak{B}$ (Fig. 206) werden soll, d. h. die Mittellinie des Druckes soll die Mauerbasis in einem Punkt a treffen, welcher von dem inneren Ende $\mathfrak{A}$ der Lagerfuge $\overline{A'\mathfrak{A}}$ um zwei Drittel der Fugenbreite $\mathfrak{B}$ absteht.

Dagegen ist vor Allem zu bemerken, dass bei dem Eintreffen dieser Eigenschaft der Grenzzustand des Gleichgewichtes in Bezug auf das Fugenöffnen, welches durch die Anwendung der behaupteten Regel eben beseitiget werden soll, geradezu erreicht, somit in der angedeuteten Hinsicht kein Sicherheitsüberschuss vorhanden sein würde, was doch nicht zugelassen werden könnte, wenn man überhaupt glaubt, dass ein ausreichend gesicherter Gleichgewichtszustand in dem vorigen Sinne jedenfalls herzustellen nothwendig sei.

---

*) Siehe Prof. Ott's Vorträge über Baumechanik. I. Theil. Prag, 1871.

In dem voruntersuchten Beispiele trifft die gedachte Regel auch keineswegs zu, denn es wurde hiebei $U = 7 \cdot 76$ Fuss gefunden, welcher Werth geringer ist, als zwei Dritttheile der 14 Fuss messenden Fugenbreite. Es mag aber untersucht werden, wie gross die Stärke der besprochenen Futtermauer zu wählen gewesen wäre, damit man $U = \frac{2}{3} \mathfrak{B}$ erhalten hätte.

Zu diesem Behufe muss man auf die oben aufgestellte Gleichung:

$$U = \frac{k_6 B^3 + k_7 B^2 H - k_8 B H^2 + k_9 H^3 + k_{10} B^2 + k_{11} B H + k_{12} H^2}{k_1 B^2 + k_2 B H + k_3 H^2 + k_4 B + k_5 H}$$

zurückkehren, hierin $U = \frac{2}{3} \mathfrak{B} = \frac{2}{3} B$ (weil $\mathfrak{B}$ und B sehr nahe gleich sind) dann $H = 60$ Fuss, so wie für die Coefficienten $k_1, k_2 \ldots k_{12}$ die bereits berechneten Werthe einsetzen, endlich aber die so entstehende cubische Gleichung nach der Unbekannten B auflösen. Geschieht dies, so hält man:

$$B^3 + 383 \cdot 7\, B^2 + 9847 \cdot 8\, B - 166775 \cdot 0 = 0,$$

und hieraus:

$$B = \mathfrak{B} = 11 \cdot 57 \text{ Fuss.}$$

Hiernach hätte man, falls die in Betracht stehende Regel richtig wäre, die 60 Fuss hohen Stützmauern an der Basis nur $11 \cdot 57$ Fuss und an der Krone nur $(11 \cdot 57 - \frac{1}{12} H) = 6 \cdot 57$ Fuss stark anzulegen brauchen. Thatsächlich aber messen dieselben unten 14 und oben 9 Fuss, also fast um $2\frac{1}{2}$ Fuss mehr, und dennoch berechtigen die hiebei gemachten Erfahrungen durchaus nicht zu dem Schlusse, als seien diese Mauern zu massiv gehalten; denn es sind an denselben ungeachtet ihrer Stärke hin und wieder nicht unbedeutende Ausbauchungen entstanden, so dass es sicherlich ein Wagniss gewesen wäre, wenn man die Mauerstärken um ein so bedeutendes Mass von $2\frac{1}{2}$ Fussen, wie es nach der erwähnten Regel sich ergeben würde, reducirt hätte. In der Fig. 207 sind die Querschnittsverhältnisse, wie diese bei einer solchen Reducirung entstanden wären, ebenfalls anschaulich gemacht, indem dort die entsprechende neue Vorderböschung der Mauer mittelst Punktirung angedeutet wurde. Schon der einfache Anblick des so reducirten Mauerprofiles ist nicht geeignet, das praktische Gefühl erfahrener Ingenieure zu befriedigen, so dass man gleichsam auch in empirischer Weise zu demselben Ausspruch über das Unzulässige der besprochenen Reducirung gelangt.

Aus dieser Darstellung geht daher im Anschlusse an die Anmerkung im §. 116 neuerdings hervor, dass die vermeintlichen Regeln, von denen oben die Rede war, nicht als zuverlässlich betrachtet werden können.

Wenn übrigens (wie in Ott's Baumechanik) darauf hingewiesen wird, dass die jenen Regeln angepasste Methode zur Bestimmung der Mauerstärken derjenigen, welche aus der Betrachtung des Umsturzmomentes unter Einführung eines Stabilitäts-Coefficienten sich ergibt, vorzuziehen, und dass diese letztere Methode schon aus dem Grunde verwerflich sei, weil sie von

der Voraussetzung ausgeht, dass die Umsturzkante den Druck der Resultirenden, welche sich aus dem s-fachen Erddrucke und dem Mauergewichte zusammensetzt, aufzunehmen im Stande wäre, was — da eine Kante, ohne beschädiget zu werden, einem endlichen Drucke nicht widerstehen könne — absurd sei; so ist dagegen zu bemerken, dass hier jedenfalls ein Missverständniss zu Grunde liegt. Denn jener Stabilitäts-Coefficient dient nur zur rechnungsmässigen Durchführung, und muss der Erfahrung gemäss so gross gewählt werden, dass ein ausreichender Stabilitätsüberschuss vorhanden ist. Geschieht dies, so kann der Fall, dass die Druckresultirende durch die Umsturzkante geht, thatsächlich gar nicht vorkommen, obgleich man in der Rechnung die bezüglichen statischen Momente auf diese Kante beziehen muss. Zudem ist es unzulässig, diese auf die Sicherung gegen Umsturz Bezug nehmende Methode mit der Frage, wie gross die Pressung an irgend einer Stelle sei, in unmittelbare Verbindung zu bringen, weil die Art und Weise, wie der vorgedachte Stabilitäts-Coefficient in die Rechnung eingeführt wird, zur Beantwortung einer solchen Frage nicht mehr anwendbar ist, sondern dann nach den Lehren des laufenden Capitels vorgegangen werden muss, wo es sich nicht nur um einen ganz anderen Sicherheits-Coefficienten, nämlich s, siehe Formel (541), sondern auch um eine ganz andere Art und Weise seiner Einführung in die Rechnung handelt.

So wie in dem vorhin behandelten Beispiele wird fast in allen Fällen sich das Resultat ergeben, dass eine Störung des Gleichgewichtes von Futtermauern in Folge einer übergrossen Pressung der Mauersteine nicht zu befürchten sei, wenn nur die Mauerdimensionen den sonstigen Stabilitätsbedingungen gemäss angeordnet sind.

Zweiter Abschnitt.

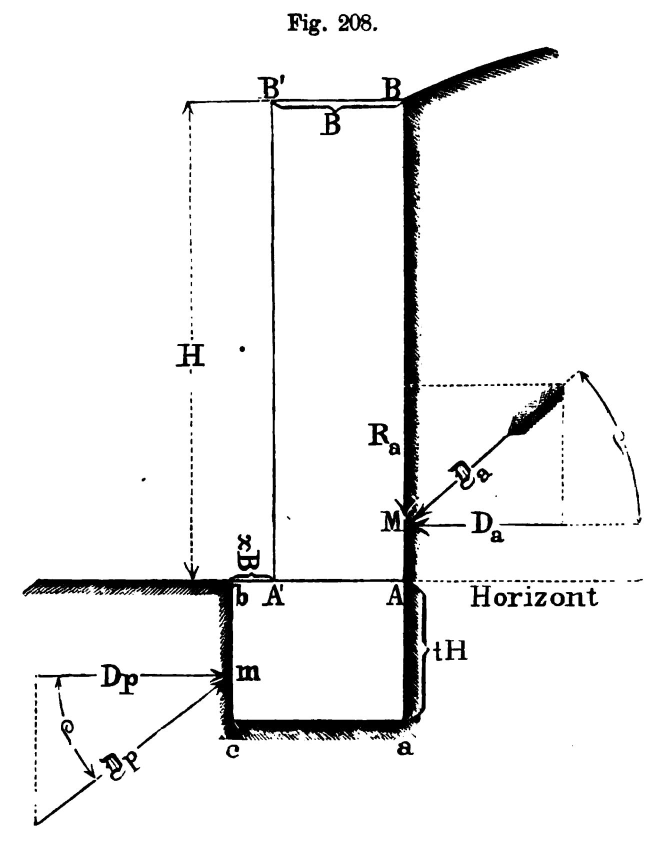
Stabilität der Futtermauern mit Rücksicht auf ihr Fundament.

§. 120.

Stärke der Futtermauern im Fundamente. Unter der Voraussetzung, dass der Untergrund, worauf das Mauerfundament steht, unnachgiebig ist, eventuell diese Eigenschaft durch

künstliche Mittel (Rostlegung, Pilotirung, Betonirung u. s. w.) erhält, lassen sich Berechnungen über die nöthige Fundamentsmauerdicke anstellen. In der Regel ist die Stabilität des Fundamentes gegen Umsturz zu berücksichtigen. Um das diessfällige Verfahren anzudeuten, wird es genügen, den in der Fig. 208

Fig. 208.



ersichtlichen Fall, in welchem eine Stützmauer mit verticalen Seitenwänden in Betracht steht, zu untersuchen.

Damit das Fundament gegen Umsturz um die Kante in c gesichert ist, muss im Grenzzustande des Gleichgewichtes das Umsturzmoment des activen Erddruckes $\mathfrak{D}_a$, welcher in der ganzen Mauerhöhe $\overline{aB}$ stattfindet, ebenso gross sein, wie das Wider-

standsmoment des Mauerwerkes, vermehrt um jenes des passiven Erddruckes $\mathfrak{P}_p$, welcher der Fundamentshöhe $\overline{bc}$ zugehört. Selbstverständlich hat man für eine s-fache Sicherheit den activen Erddruck $s$mal zu nehmen. Sind M und m die Mittelpunkte des activen und passiven Erddruckes, und bezeichnet S_M das statische Widerstandsmoment des Mauerwerkes, so hat man dem Gesagten zu Folge die Bedingungsgleichung:

$$s D_a . \overline{Ma} - s R_a . \overline{ac} = S_M + D_p . \overline{cm} \quad \ldots\ldots (600),$$

wenn D_a den normalen activen und D_p den normalen passiven Erddruck, ferner R_a die durch den ersteren an der Stützwand entstehende Reibung bezeichnen. Ist der betreffende Reibungswinkel ϱ und der dazu gehörige Reibungs-Coefficient $\mu = \operatorname{tg} \varrho$, so hat man bekanntlich folgende Relationen:

$$D_a = \mathfrak{P}_a . \cos \varrho = \mathfrak{P}_a . \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$R_a = D_a . \operatorname{tg} \varrho = D_a . \mu.$$

Da im Grenzzustande des Gleichgewichtes derselbe Reibungs-Coefficient auch in Bezug auf den passiven Erddruck anzuwenden ist, so hat man ausserdem:

$$D_p = \mathfrak{P}_p . \cos \varrho = \mathfrak{P}_p . \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Nennt man w_a das per Cubikeinheit entfallende Gewicht einer sich einzubildenden tropfbaren Flüssigkeit, welche eine mit dem normalen activen Erddruck gleiche Pressung auf die ganze Wandhöhe $\overline{aB}$ hervorzubringen im Stande wäre, und hat die Bezeichnung w_p die analoge Bedeutung für den normalen passiven Erddruck innerhalb der Fundamenthöhe $\overline{bc}$, so erhält man:

$$D_a = \tfrac{1}{2} w_a . \overline{Ba}^2 = \tfrac{1}{2} w_a (1 + t)^2 H^2,$$

$$D_p = \tfrac{1}{2} w_p . \overline{bc}^2 = \tfrac{1}{2} w_p t^2 H^2;$$

indem man die Fundamentstiefe $\overline{bc} = tH$ setzt, und hiebei t als einen numerischen Coefficienten ansieht, der mit H multiplicirt jene Tiefe ergibt.

Für die Bestimmung der Lage des Druckmittelpunktes M, in Betreff des activen Erddruckes, dient die Relation:

$$\overline{aM} = \tfrac{1}{3} m \,.\, \overline{aB} = \tfrac{1}{3} m \,(1 + t)\, H,$$

worin, je nach der Form der Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales, der Coefficient $m \gtreqless 1$ ist; der Mittelpunkt des passiven Erddruckes dagegen liegt, da die Oberfläche des Erdreiches vor dem Fundamentsfusse als eben angenommen wird, in dem dritten Theile der dortigen Druckhöhe, es ist also:

$$\overline{cm} = \tfrac{1}{3} \overline{bc} = \tfrac{1}{3} t H.$$

Wird noch die Mauerstärke ober dem Fundamente mit B, und der Fundaments-Vorsprung $\overline{A'b}$ mit xB bezeichnet, wobei x wieder einen gewissen Coefficienten vorstellt, so wird es sich eben darum handeln, den geeigneten Werth dieses Coefficienten x zu berechnen.

Geht man zu diesem Behufe auf die oben aufgestellte Bedingungsgleichung (600) zurück, und berücksichtiget die weiter gegebenen Erklärungen und Bezeichnungen, so specialisirt sich jene Bedingungsgleichung in folgender Weise:

$$\tfrac{1}{6} m s w_a (1 + t)^3 H^3 - \tfrac{1}{2} \mu s w_a (1 + x)(1 + t)^2 B H^2 =$$
$$= S_M + \tfrac{1}{6} w_p t^3 H^3.$$

Nun ist aber, wenn das Einheitsgewicht des Mauerwerkes wie früher, q heisst:

$$S_M = q\,[\overline{AA'} \,.\, \overline{AB}\,(\overline{bA'} + \tfrac{1}{2} \overline{AA'}) + \overline{ac} \,.\, \overline{bc} \,.\, \tfrac{1}{2} \overline{ac}]$$
$$= \tfrac{1}{2} q\,[1 + 2x + t\,(1 + x)^2]\, B^2 H,$$

somit erhält man nach einiger Reduction:

$$3q\,[1 + 2x + t\,(1 + x)^2] \left(\frac{B}{H}\right)^2 + 3\,\mu s w_a (1 + x)(1 + t)^2 \left(\frac{B}{H}\right) -$$
$$- m s w_a (1 + t)^3 + w_p t^3 = 0,$$

woraus, wenn die Fundamentstiefe und die sonstigen Daten bekannt sind, die den fraglichen Fundaments-Vorsprung bestimmende Grösse x berechnet werden kann.

Zur bequemeren Berechnung mag man hiebei in nachstehender Art verfahren:

Für $t = 0$ wäre kein Fundamentmauerwerk vorhanden, die Mauer stände dann lediglich auf der Basis $\overline{AA'}$, wo die Mauerstärke B zur Stabilität in Bezug auf die Umsturzkante in A' ausreichend sein würde, so dass in diesem Falle $x = 0$ sein müsste. Die vorige Gleichung muss somit die Eigenschaft haben, dass hierin x und t gleichzeitig verschwinden. Wird dies beachtet, so findet man die Relation:

$$3\,q\left(\frac{B}{H}\right)^2 + 3\,\mu s w_a \left(\frac{B}{H}\right) = m s w_a \;\ldots\ldots\ldots\;(601),$$

und hieraus:

$$\frac{B}{H} = -\frac{\mu s w_a}{2q} + \sqrt{\left(\frac{\mu s w_a}{2q}\right)^2 + \frac{m s w_a}{3q}},$$

wodurch sich die Mauerstärke oberhalb des Fundamentes ergibt*).

Setzt man den aus der Relation (601) sich ergebenden Werth:

$$3\,q\left(\frac{B}{H}\right)^2 = m s w_a\left[1 - \frac{3\mu}{m}\left(\frac{B}{H}\right)\right]$$

in die allgemeine Bedingungsgleichung, welche zwischen x und t stattfindet, und führt man hiebei die abkürzenden Bezeichnungen:

$$\left(\frac{w_p}{m s w_a}\right) = \gamma \text{ und } \left(\frac{3\mu}{m}\right)\left(\frac{B}{H}\right) = \delta \;\ldots\ldots\ldots\;(602)$$

ein, so findet man nach gepflogener Reduction:

$$x^2 + \frac{(1+t)(2-\delta+\delta t)}{(1-\delta)\,t}\,x = \frac{(2-\delta)+(3-\delta)\,t-(\gamma-1)\,t^2}{(1-\delta)},$$

woraus folgt:

$$x = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \sqrt{c_3 + c_4 t + c_5 t^2 + c_6 t^3 + c_7 t^4}}{2(1-\delta)\,t} \;\ldots\;(603),$$

worin den angedeuteten Coefficienten die Werthe zukommen:

$$\left.\begin{array}{ll|l} c_0 = -(2-\delta) & & c_4 = 4(2-\delta) \\ c_1 = -2 & & c_5 = 2(6-4\delta+\delta^2) \\ c_2 = -\delta & & c_6 = 4(3-3\delta+\delta^2) \\ c_3 = (2-\delta)^2 & & c_7 = 4\gamma(1-\delta)-(2-\delta)^2 \end{array}\right\} \;\ldots\;(604).$$

---

*) Die Richtigkeit dieses Ergebnisses erhellet aus der Vergleichung desselben mit der Formel (506), wenn man dort $n = \operatorname{tg} \varepsilon = 0$ setzt.

Ex. Es werde das auf den Seiten 476 und 477 angegebene Beispiel neuerdings, nämlich zu dem Zwecke in Betracht gezogen, um die Stärke der Fundamentmauer für den Fall zu bestimmen, wenn die Fundamentstiefe drei Fuss beträgt. Nach den dort angegebenen Daten und berechneten Resultaten hat man zunächst:

$H = 30$ Fuss, $\text{tg}\,\alpha = 1 \cdot 2$, $g = 80$ Pfd., $q = 120$ Pfd., $\mu = \text{tg}\,\varrho = \frac{5}{6}$, $s = 6$, $w_a = 0 \cdot 163\, g = 13 \cdot 04$ Pfd. und $\frac{B}{H} = 0 \cdot 269$.

Da ferner die Oberfläche des Hinterfüllungsmateriales horizontal ist so wird $m = 1$ angenommen. Hiernach ergibt sich:

$$\gamma = \frac{w_p}{78 \cdot 24} \text{ und } \delta = 0 \cdot 6725.$$

Um noch w_p ausfindig zu machen, hat man die Gleichungen (491) und (492) zu beachten, worin für den vorliegenden Fall $a = \text{tg}\,\alpha$, $b = 0$, $n = \text{cotg}\,(\alpha - \varphi)$ und $\mu = \text{tg}\,\varrho = \text{cotg}\,\alpha$ einzusetzen ist. Geschieht dies, so findet man:

$$\frac{w_p}{g_p} = \left(\frac{\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + a^2}\,\mu}{a - \mu}\right)^2 = \left[\frac{a\,(\sqrt{2} + \sqrt{1 + a^2})}{a^2 - 1}\right]^2$$
$$= \left(\frac{\sin\alpha}{1 - \sqrt{2}\cos\alpha}\right)^2 \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos 45^\circ - \cos\alpha}\right)^2,$$

daher mit Rücksicht auf den besonderen Werth von $a = \text{tg}\,\alpha = 1 \cdot 2$:

$$\frac{w_p}{g_p} = 65 \cdot 9.$$

Das Einheitsgewicht des Erdreiches ist hier g_p benannt, wobei durch den Zeiger p angezeigt wird, dass das dem Fundamente vorliegende Erdreich, wo der passive Erddruck entsteht, gemeint sei. Nach den Bemerkungen im §. 98 hat man für w_p das Gewicht dieses Erdreiches im verdichteten Zustande in Rechnung zu bringen, daher hiefür $g_p = 90$ Pfd. angenommen werden soll, während der, zur Bestimmung des activen Erddruckes, oben beispielsweise eingeführte Werth für g nur mit 80 Pfunden bemessen wurde, weil man zu diesem Zwecke (laut §. 37) die erwähnte Verdichtung des Erdreiches ausser Acht lassen kann. In Folge der so geschehenen Annahme für g_p hat man nunmehr:

$$w_p = 5931 \text{ Pfd. und } \gamma = 75 \cdot 8.$$

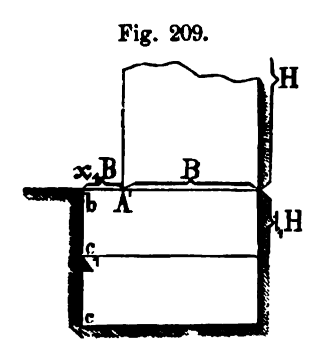
Mit Hilfe der jetzt bekannten Werthe von γ und δ findet man endlich nach der Gleichung (603):

$$x = 0 \cdot 051 \text{ und } x B = \overline{A'b} = 0 \cdot 014\, H = 0 \cdot 42 \text{ Fuss}.$$

Das auf eine solche Weise gefundene Resultat für x ist jedoch nur dann anwendbar, wenn, wie vorausgesetzt, die Um-

sturzgefahr wirklich in Bezug auf die am tiefsten gelegene Kante c (Fig. 209) in den Vordergrund tritt. Es ist daher noch zu untersuchen, ob es nicht eine höher gelegene Drehungskante, etwa c_1, gibt, in Bezug welcher die Umsturzgefahr näher gerückt ist, oder mit anderen Worten, man hat die Frage zu beantworten, ob nicht für eine kleinere Fundamentstiefe, als die

Fig. 209.



gegebene, ein grösserer Fundamentsvorsprung nothwendig werde. Zu diesem Behufe wird man in der Gleichung (603) das Maximum von x in Bezug auf t suchen, und diesen Maximalwerth (x_1) als massgebend betrachten, falls sich hiebei herausstellen sollte, dass der dazu gehörige Werth von t (er heisse t_1) noch kleiner, als der, der gegebenen Fundamentstiefe entsprechende wäre. Sucht man das fragliche Maximum, indem man die oben aufgestellte Gleichung für x nach t differenzirt, so erhält man nach gepflogener Reduction zur Bestimmung des bezüglichen Werthes von t_1 folgende Gleichung:

$$C_0 + C_1 t_1 + C_2 t_1^2 + C_3 t_1^3 + C_4 t_1^4 + C_5 t_1^5 + C_6 t_1^6 = 0 \quad ..(605),$$

worin die angedeuteten Coefficienten die Werthe haben:

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= (2-\delta)^3 \\
C_1 &= 2\,(2-\delta)^2\,(3-\delta) \\
C_2 &= (2-\delta)\,[12 - 9\delta + 2\delta^2 - 3\gamma\,(2-\delta)] \\
C_3 &= 2\,(2-\delta)\,[(1-\delta)\,(2-\delta) - 2\gamma] \\
C_4 &= 2\,\delta\,\gamma\,(2-\delta) - 9 + 5\delta - \delta^2 \\
C_5 &= 4\,(\gamma-1)\,(3 - 3\delta + \delta^2) \\
C_6 &= (\gamma-1)\,[(2-\delta)^2 - 4\gamma\,(1-\delta)]
\end{aligned}\right\} \quad (606).$$

Ex. Macht man gleich die Anwendung auf das vorige Beispiel, so hat man $\gamma = 75 \cdot 8$ und $\delta = 0 \cdot 6725$ zu setzen, und man erhält nach den Relationen (606):

$C_0 = 2 \cdot 33940$, $C_1 = 8 \cdot 20330$, $C_2 = - 391 \cdot 6410$, $C_3 = - 401 \cdot 344$, $C_4 = 129 \cdot 250$, $C_5 = 429 \cdot 279$ und $C_6 = - 7295 \cdot 674$, daher mit Benützung dieser Coefficienten, und wenn man durchaus mit C_6 dividirt, die geordnete Bedingungsgleichung:

$$t_1^6 - 0 \cdot 05884\, t_1^5 - 0 \cdot 01772\, t_1^4 + 0 \cdot 05501\, t_1^3 + 0 \cdot 05368\, t_1^2 - 0 \cdot 001125\, t_1 - \\ - 0 \cdot 0003207 = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine brauchbare Wurzel, nämlich $t_1 = 0 \cdot 0845$, somit ist die Tiefe, in welcher die Kante für den zunächst drohenden Umsturz liegt:

$$\overline{b\, c_1} = t_1 H = 2 \cdot 54 \text{ Fuss},$$

daher in der That geringer, als die ganze Fundamentstiefe, welche drei Fuss beträgt.

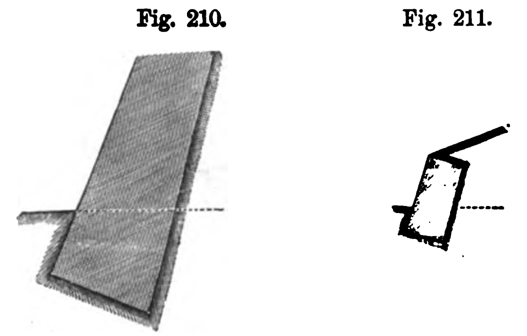
Der Maximalwerth x_1, welcher jenem Werthe von t_1 entspricht, folgt nunmehr nach der Gleichung (603) mit: $x_1 = 0 \cdot 055$, d. h. der Fundamentsvorsprung beträgt:

$$\overline{A'b} = x_1 B = 0 \cdot 44 \text{ Fuss},$$

welcher übrigens nur unbedeutend grösser ist, als der früher berechnete.

Selbstverständlich hat eine solche Rechnung nicht den Zweck, bei der Ausführung mit ängstlicher Genauigkeit sich an das Resultat zu halten, indem dieses eigentlich nur anzeigt, wie gross der Fundamentsvorsprung wenigstens gemacht werden soll; verschiedene praktische Rücksichten, insbesondere jene, welche auf

Fig. 210. Fig. 211.



die Herstellung eines ordentlichen Steinverbandes im Mauerwerke Bezug nehmen, werden es häufig nothwendig machen, den frag-

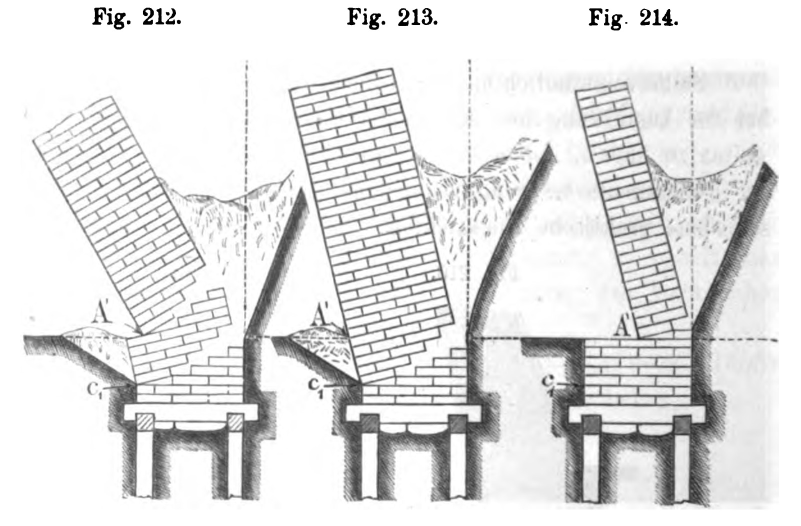
lichen Fundamentsvorsprung grösser, als er rechnungsmässig sich ergibt, auszuführen.

In manchen Fällen wird die Nothwendigkeit der Herstellung eines Fundamentsvorsprunges auch ganz entfallen. Dies kann eintreten bei Mauern mit nach unten sich entsprechend erweiternden Profilen (Fig. 210), übrigens auch bei dem Abgange dieser Eigenschaft unter der Voraussetzung, dass die Mauerstärke oberhalb des Fundamentes aus irgend einem Grunde ohnehin schon eine reichlicher bemessene, nämlich eine grössere ist, als solche mit Rücksicht auf den betreffenden Stabilitäts-Coefficienten sich ergibt, was z. B. bei niedrigen Mauern leicht vorkommen kann. (Fig. 211.)

§. 121.

Gestalt der gefährlichen oder Bruchfuge. Aus den Bemerkungen im §. 113 kann man schliessen, dass die gefähr-

Fig. 212. Fig. 213. Fig. 214.



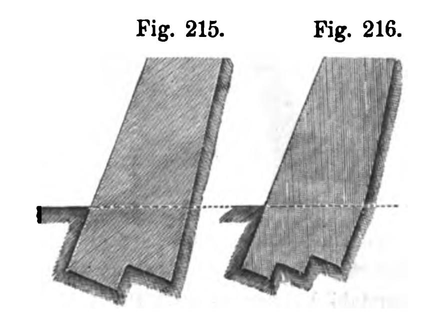
liche, also die eventuelle Bruchfuge auch im Fundamente stufenförmig anzunehmen sei, wie dies beispielsweise in der Fig. 212 angedeutet erscheint. Ist, wie in dem Falle nach dieser Figur vorausgesetzt wird, der Sicherheitsgrad in Beziehung auf den

Umsturz für die Kante A' derselbe, wie für die Kante c_1, so entstehen gleichzeitig zwei gefährliche Fugen, jede treppenförmig aufsteigend. Davon liegt die Eine im Fundamente in einer gewissen bis c_1 reichenden Tiefe, welche mit Rücksicht auf die Bemerkungen im vorigen §. nicht immer der ganzen Fundamentstiefe gleich ist; die andere aber, bei A' beginnend, befindet sich in dem darauf stehenden Mauerwerke.

Ist dagegen die Gleichheit des Sicherheitsgrades an den gedachten zwei Kanten nicht vorhanden, so wird nur Eine gefährliche Fuge entstehen, wie dies beispielsweise in den Figuren 213 und 214 ersichtlich gemacht ist. Im Falle nach Fig. 213 ist nämlich der Sicherheitsgrad in Bezug auf den Umsturz der ausserhalb des Fundamentes stehenden Mauer grösser, als jener der ganzen Construction einschliessig des Fundamentes, es ist daher in diesem letzteren allein die gefährliche Fuge zu suchen; im Falle nach Figur 214 aber gilt das Umgekehrte.

Die in Bezug auf die Stufenform der gefährlichen Fuge gemachten Andeutungen führen zur Erkenntniss, dass es nicht unumgänglich nothwendig sei, die hintere Fundamentsecke nach Art der Fig. 210 anzuordnen; vielmehr ist es unter Umständen

Fig. 215. Fig. 216.

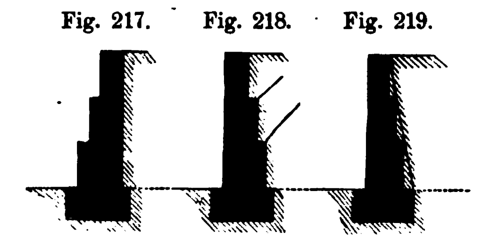


zulässig und wegen Ersparniss an Mauerwerk sogar zu empfehlen, den Fundamentsfuss an der Rückseite in einer passenden Weise abzustufen (Siehe die Figuren 215 und 216.)

Schluss-Bemerkungen.

Absätze an der Vorderseite einer Stützmauer, wie in Figur 217, sind augenscheinlich vortheilhaft; nur wird man die Breitseite solcher Absätze nicht horizontal anlegen, sondern etwas abdachen, damit das Regen-

Fig. 217. Fig. 218. Fig. 219.

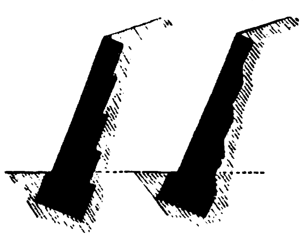


und Schneewasser besser abfliessen kann. Dagegen können Absätze an der Rückseite einer Stützwand mitunter nicht unbedeutende Nachtheile im Gefolge haben.

Das Erdreich setzt sich nämlich in der Regel mehr, als das Mauerwerk, wodurch es leicht geschehen kann, dass im Ersteren Risse entstehen, entweder von den Absätzen aufsteigend, wie in der Figur 218, oder die Absätze berührend, wie in der Figur 219. An solchen rissigen Stellen wird die Cohäsion des Erdreiches zerstört, und zudem erhält dieses die Fähig-



Fig. 220. Fig. 221.

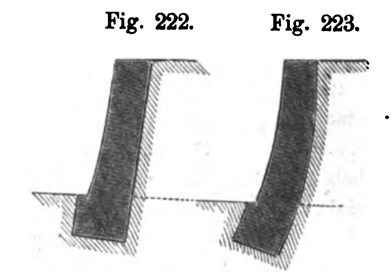


keit, mehr Wasser als sonst aufzunehmen, sei es, dass dasselbe von oben oder unten her eindringt. Jedenfalls wird dadurch der active Erddruck zum Nachtheile der Mauerstabilität vergrössert. Dies gilt nicht nur für verticale, sondern auch, obgleich in verringertem Grade, für liegende Mauern (Fig. 220). Zuweilen wird es, um den Nachtheil der erwähnten Absätze wegzuschaffen, zweckmässig sein, dieselben, wie in der Figur 221 angedeutet, lothrecht zu begrenzen.

Endlich kann es vortheilhaft sein, die vordere Mauerfläche, wie in Figur 222, oder gleichzeitig auch die hintere Mauerfläche, wie in Figur 223 krumm anzuordnen, so dass im Ganzen genommen die Mauer mehr oder

weniger liegend wird, und ihre Stärke von oben nach unten angemessen zunimmt. Stellt man hiebei die Lagerfugen stets normal auf die Aussenfläche der Mauer, so werden dieselben zwar unter sich nicht parallel, indessen wäre ein solches Verfahren insoferne rationell, als aus den Betrachtungen über die Stabilität einer Futtermauer gegen das Gleiten die Ueber-

Fig. 222. Fig. 223.



zeugung sich ergibt, dass in dieser Beziehung zur Erreichung einer möglichst *gleichmässigen* Sicherheit in den verschiedenen Lagerfugen die Neigung dieser letzteren gegen den Horizont desto grösser werden soll, je tiefer dieselben unter der Mauerkrone gelegen sind.

In Fällen, wo die Rückwand einer Futtermauer stufenförmig oder krumm ist, also nicht alle Wandelemente eine und dieselbe Richtung haben, kann man, da sich derzeit ein genaueres Verfahren nicht angeben lässt, annäherungsweise den darauf stattfindenden Erddruck berechnen, wenn man für die ganze Wand eine und dieselbe *durchschnittliche* Böschung einführt, somit an Stelle des gegebenen Falles einen anderen, nahezu gleichbedeutenden setzt, in welchem die Rückwand eine Ebene mit jener Durchschnittsböschung bildet. Nur, wenn das Hinterfüllungsmateriale tropfbar flüssig ist, und es sich daher um die Bestimmung des hydrostatischen Druckes handelt, hat man nicht nöthig, zu einem Annäherungs-Verfahren zu greifen, weil dann bekanntlich die Aufgabe genau aufgelöset werden kann.

Berichtigungen.

Seite:	Zeile:	statt:	lies:
6..	5 v. o...	ungestampften	angestampften
25..	10 v. u...	und	lothrechter Stand und
38..	6 v. u...	abgehoben	aufgehoben
39..	6 v. u...	Differial	Differential
68..	4 v. u...	α und ε	α und c
79..	5 v. o...	$g' = g\left(1 + \frac{2p}{\mathfrak{h}}\right)$	$g' = g\left(1 + \frac{2p}{g\mathfrak{h}}\right)$
90..	8 v. u...	0·308	0·318,
103..	3 v. o...	$D_0 = \frac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$	$D_0 = \frac{1}{2}gH^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$
105..	15 v. o...	$D_0 = \frac{1}{2}g\frac{H^2}{\cos\varepsilon}\left(1-\frac{h_0}{H}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$	$D_0 = \frac{1}{2}H^2\left(1-\frac{h_0}{H}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$
166..	9 v. u...	Neigung	Steigung
202..	10 v. o...	$\overline{Er^2}$	$\overline{Er}^2$
224..	1 v. o...	den	dem
238..	7 v. o...	$FfF,$	FfF'
288..	7 v. o...	Bedingungsgleichung	Bedingung
307..	9 v. o...	$\frac{A}{\cos\varrho}$	$\frac{\Delta}{\cos\varrho}$
348..	2 v. o...	ausreichenden	ausreichend
376..	5 v. u...	wenn auf	wenn
437..	11 v. o...	Winkel	Winkel ε
527..	5 v. o...	125	1·25

15.. In der Fig. 2 soll der Raum 2 nicht punktirt sein.

